De la relativité de l'incertitude relative sur les grandeurs relatives ou comment vérifier expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique

par **Alain LE RILLE**
Lycée Camille Pissarro - 95000 Pontoise
alain.lerille@prepas.org

RÉSUMÉ

L'incertitude relative sur l'énergie mécanique n'a aucun sens physique puisque celle-ci, comme l'énergie potentielle, est définie à une constante près : en changeant les conventions qui fixent cette constante, on modifie la valeur de la précision expérimentale sur l'énergie mécanique ! Après cette constatation, nous proposons une méthode simple pour s'assurer de la conservation de l'énergie mécanique.

Imaginons une variation de température $\delta\theta = 0{,}50$ °C autour de $\theta = 2{,}0$ °C. On sait bien que pour exprimer la variation relative de la température, il ne faut pas utiliser la température relative (mesurée en degrés celsius : $\frac{\delta\theta}{\theta} = \frac{0{,}50\,°C}{2{,}0\,°C}$) mais plutôt la température absolue (mesurée en kelvin : $\frac{\delta T}{T} = \frac{0{,}50\,K}{(2{,}0 + 273{,}15)K} = 0{,}18\,\%$).

Nous allons voir qu'un problème similaire se pose pour l'énergie mécanique, ce qui n'est pas sans conséquences lorsque l'on veut vérifier expérimentalement sa conservation. Pour ce faire, les manipulations ne manquent pas : déplacement d'un mobile autoporteur sur une table inclinée [1], chute libre avec ou sans [2] vitesse initiale, dans l'air ou même dans l'eau [3], etc., pour peu que le dispositif élimine les forces non conservatives (frottements…, [4]). Dans la suite de l'article, on s'appuiera sur le bel article de D. BIBOUD [1], en récupérant en particulier ses valeurs expérimentales.

Une fois l'expérience terminée, on dispose de N mesures. L'indice i $\left(i \in [1;N]\right)$ repère le numéro du point expérimental dans les valeurs t_i (les dates), v_i (les vitesses), Ec_i (les énergies cinétiques), z_i (les altitudes), Ep_i (les énergies potentielles), et enfin Em_i (les énergies mécaniques).

Bien entendu, le passage de l'expérience (les valeurs Em_i sont toutes numériquement différentes, avec leur incertitude de mesure), à la théorie (« l'énergie mécanique est constante ») ne va pas de soit ([5]). Mais, traditionnellement, on donne une représentation graphique des résultats (*cf.* figure 1) : et « à l'œil, les variations semblent faibles ». Pour quantifier cela, on vérifie que l'incertitude relative sur l'énergie mécanique est très petite devant 1 [1]. Professeur et élèves peuvent alors rentrer chez eux, la joie du devoir accompli : « l'énergie mécanique se conserve bien ».

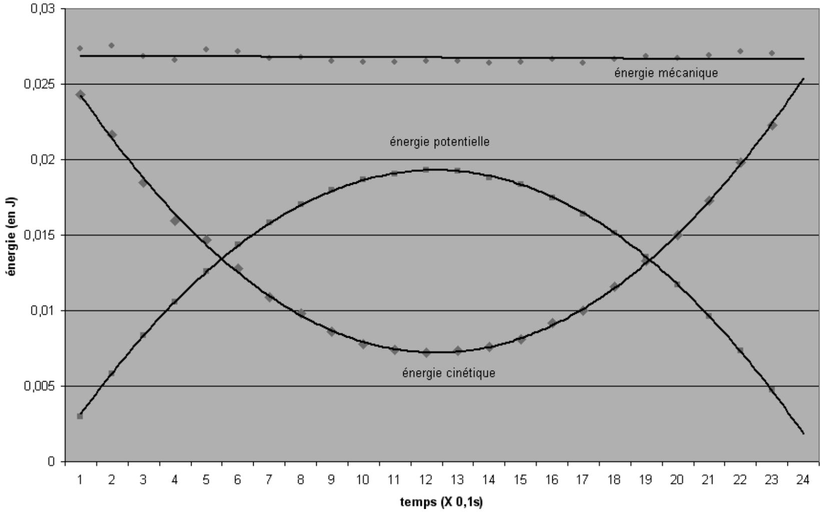

Figure 1

Malheureusement, le raisonnement précédent n'est pas valable ! Pour le démontrer, rappelons brièvement les définitions de quelques grandeurs statistiques calculables à partir des données expérimentales (on s'intéresse à l'énergie mécanique, mais cela est généralisable aux autres énergies, bien entendu) :

- la valeur moyenne : $\langle E_m \rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} Em_i}{N}$;
- l'incertitude absolue : ΔE_m définie :
  - soit par l'écart moyen : $\Delta E_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \left| Em_i - \langle E_m \rangle \right|}{N}$;
  - soit par l'écart quadratique moyen (ou écart type) : $\Delta E_m = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} \left[Em_i - \langle E_m \rangle \right]^2}{N}}$.

Les différences entre les deux méthodes n'ont pas d'influence sur l'ordre de grandeur du rapport sans unité suivant :

- l'incertitude relative : $\left| \dfrac{\Delta E_m}{\langle E_m \rangle} \right|$.

L'énergie potentielle étant fixée à une constante près, $Ep'_i = Ep_i + E_0$ convient tout aussi bien (E_0 correspond par exemple à un changement de l'altitude nulle dans le repère : $z'_i = z_i + z_0$). Aussi, l'énergie mécanique $Em_i = Ep_i + Ec_i$ est aussi fixée à une constante près : $Em'_i = Em_i + E_0$ est une nouvelle énergie mécanique, tout aussi valable que l'ancienne.

La valeur moyenne de l'énergie mécanique calculée à partir des nouvelles données expérimentales en est affectée :

$$\left\langle E_m \right\rangle' = \frac{\sum_{i=1}^{N} Em'_i}{N} = \left\langle E_m \right\rangle + E_0$$

mais pas son incertitude absolue :

$$\Delta E'_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left[Em'_i - \left\langle E_m \right\rangle' \right]^2}{N}} = \Delta E_m.$$

Aussi, l'incertitude relative sur l'énergie mécanique dépend des conventions (de la constante E_0) :

$$\left| \frac{\Delta E'_m}{\left\langle E_m \right\rangle'} \right| \neq \left| \frac{\Delta E_m}{\left\langle E_m \right\rangle} \right|,$$

comme le montre le tableau 1 et la figure 2, où sont consignés ces grandeurs, après traitement des résultats expérimentaux de [1].

Convention	Décalage énergétique E_0	Moyenne $\left\langle E_m \right\rangle$	Incertitude relative $\left\| \frac{\Delta E_m}{\left\langle E_m \right\rangle} \right\|$
n°	mJ	mJ	%
1	0	26,8	1
2	– 20,0	6,8	4
3	– 26,0	0,8	37
4	– 30,0	-3,2	9

Tableau 1

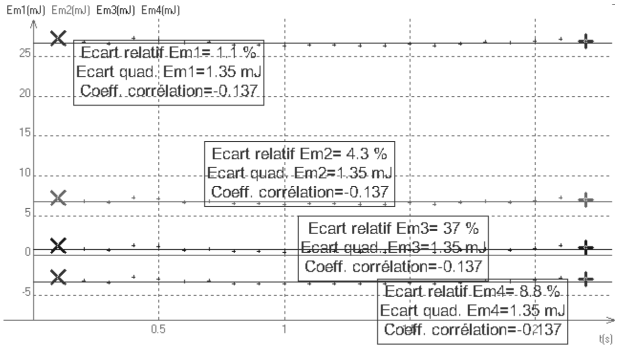

Figure 2

Il est donc clair que l'incertitude relative d'une grandeur relative comme l'énergie mécanique est toute… relative ! Comment, dans ces conditions, faire confiance à cette grandeur (qui n'a visiblement aucun sens physique) pour s'assurer de la conservation de l'énergie mécanique ?

Pour surmonter le problème, revenons à ce qui donne naissance au concept d'énergie mécanique : à partir de grandeurs (l'énergie cinétique, les énergies potentielles) qui ne se conservent pas (d'après les données de [1], $\Delta E_c \approx \Delta E_p \approx 5\,\text{mJ}$), le physicien en a créé une nouvelle (l'énergie mécanique) qui (du point de vue théorique) doit être constante. En fait expérimentalement, elle est fixée à $\Delta E_m \approx 0{,}3\,\text{mJ}$ [1] près.

Vérifier expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique revient donc à s'assurer que, au regard de la fluctuation $\Delta E_c \approx \Delta E_p$ de l'énergie cinétique (et de l'énergie potentielle), l'énergie mécanique est constante : $\Delta E_m << \Delta E_c \approx \Delta E_p$. Remarquons que cela revient à regarder la représentation graphique des résultats expérimentaux à la même échelle pour toutes les énergies.

Donc, le rapport sans unité, pertinent, à former :

- n'est pas $\dfrac{\Delta E_m}{\langle E_m \rangle}$;
- c'est plutôt $\dfrac{\Delta E_m}{\Delta E_c} \approx \dfrac{\Delta E_m}{\Delta E_p}$.

C'est une grandeur sans dimension, absolue, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des conventions (de la constante qui fixe l'énergie potentielle). Dans le cas des mesures de [1], ce rapport vaut 6 %.

Notons que, puisqu'on modélise les données expérimentales par une constante, on ne fait rien d'autre qu'une régression linéaire ($y = a \cdot x + b$) un peu particulière ($a = 0$). D'autres grandeurs statistiques peuvent alors être utilisées pour vérifier l'adéquation de la régression linéaire aux résultats expérimentaux : le coefficient de corrélation linéaire, « mal adapté » [6] en physique et le χ^2, qui « donne une réponse immédiate à l'acceptabilité du modèle » [6], mais « il ne faut pas croire que le test du χ^2 dispense d'une réflexion supplémentaire » [6].

La problématique de la vérification d'une théorie à l'épreuve de l'expérience n'a été qu'ici effleurée. Le lecteur qui voudra poursuivre sur ce sujet (et en particulier sur l'interprétation de la précision des résultats expérimentaux), lira avec profit les références [5 à 11].

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] BIBOUD D. Plan incliné étudié avec un tableur. *Bull. Un. Phys.*, juin 1999, vol. 93, n° 815 (1), p. 1025-1034.

[2] BEAUFILS D. et IMBROGNO J.-C. Incertitudes expérimentales - Étude de cas : Logiciel Chute. *Bull. Un. Phys.*, juin 1993, vol. 87, n° 755, p. 883-894.

[3] ZIMMER A. Une boule à crochet tombe dans une piscine ! *Bull. Un. Phys.*, octobre 2001, vol. 95, n° 837, p. 1407-1428.

[4] PÉREZ J.-P. Grandeurs qui se conservent et grandeurs conservatives. *Bull. Un. Phys.*, juin 1998, vol. 92, n° 805 (1), p. 981-987.

[5] BRÉNASIN J. La signification de la mesure dans une activité expérimentale. *Bull. Un. Phys.*, janvier 1992, vol. 86, n° 740, p. 75-85.

[6] JOURNEAUX R. La régression linéaire et ses conditions d'application. *Bull. Un. Phys.*, mars 1993, vol. 87, n° 752, p. 353-369.

[7] CORTIAL Y. À propos de la méthode des moindres carrés. *Bull. Un. Phys.*, juin 1990, vol. 84, n° 725, p. 769-791.

[8] TRIGEASSOU J.-C. et BEAUFILS D. Analyse de données, méthodes numériques et Sciences Physiques. *Bull. Un. Phys.*, février 1991, vol. 85, n° 731, p. 297-308.

[9] BEAUFILS D. et RICHOUX H. Régression linéaire et incertitudes expérimentales. *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 1997, vol. 91, n° 796, p. 1361-1376.

[10] GAZAIX S. Évaluation des incertitudes en travaux pratiques (TP) par simulation informatique. *Bull. Un. Phys.*, février 1998, vol. 92, n° 801, p. 255-263.

[11] CORTIAL Y., « Optimisation »
`http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/optim/opti0.html`
(page web consultée le 17/01/2005).

Alain LE RILLE
Professeur en classes préparatoires MP
Lycée Camille Pissarro
Pontoise (Val d'Oise)