L'énergie d'un système isolé est-elle toujours conservée ?

par **André BUTOLI**
Laboratoire de physique théorique
LP d'Arsonval - 94100 Saint-Maur
et **Alain LE RILLE**
Lycée Camille Pissarro - 95300 Pontoise
alain.lerille@prepas.org

RÉSUMÉ

On montre dans cet article, à partir d'exemples simples, que la validité de la conservation de l'énergie d'un système isolé conservatif dépend étroitement du choix du référentiel dans lequel on l'étudie. On montre comment résoudre simplement ce problème de conservation de l'énergie.

« L'idée de "qui fait le travail" n'est pas véritablement claire ou utile en physique. Elle n'aide pas notre intuition. Supposez que j'ai deux cubes A et B séparés par un ressort partiellement comprimé. Si A est maintenu fixe et B est amené vers A en comprimant le ressort, il est clair que l'énergie du ressort provient du travail fait par B. Mais si à l'inverse c'est A qui est déplacé vers B, fixe, c'est alors A qui fait le travail. Qui fait quoi dépend du mouvement relatif de l'observateur ! ».

Lettre de Richard P. FEYNMAN à Michael H. HART, 4 décembre 1980 [1]

UNE ÉTUDE EXPÉRIMENTALE QUI TOURNE MAL

Pour vérifier expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique, les manipulations ne manquent pas : déplacement d'un mobile autoporteur sur une table inclinée [2], chute libre avec ou sans [3] vitesse initiale, dans l'air ou même dans l'eau [4], etc., pour peu que le dispositif élimine les forces non conservatives (frottements, … [5]).

Choisissons le premier cas, et appuyons-nous sur l'article de D. BIBOUD [2], en récupérant en particulier ses valeurs expérimentales. On dispose donc de plusieurs mesures effectuées dans le référentiel R de la table (R est bien sûr galiléen) avec, pour chaque date t, la vitesse $\vec{v}_{1/R}$ du mobile de masse m_1, son énergie cinétique $K_{1/R} = \frac{1}{2} m_1 v_{1/R}^2$, son énergie potentielle (de pesanteur), et enfin son énergie mécanique $E_{1/R}$. La table à coussin d'air nous assure qu'il n'y a pas de forces non conservatives (le système est non dissipatif).

L'énergie potentielle de pesanteur $E_p = m_1 g y_1$ ne dépend que de l'altitude y_1 du mobile. Dans un article récent du *Bup* [6] l'un d'entre nous a montré que dans cette expérience l'incertitude relative de l'énergie mécanique dépendait amplement du choix de l'origine de l'axe $(O\,;\vec{u}_y)$ pour évaluer l'énergie potentielle.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de choisir un **référentiel** différent de R, pour étudier l'évolution de l'énergie mécanique du système au cours du temps. Soit un référentiel R' en mouvement de translation rectiligne uniforme suivant la verticale $(O\,;\vec{u}_y)$, orientée vers le haut, par rapport à R, comme un ascenseur par exemple. $\vec{V}_{R'/R}$ est la vitesse d'entraînement de R' par rapport à R. La vitesse $\vec{v}_{1/R'}$ par rapport à R' s'exprime en fonction de la vitesse $\vec{v}_{1/R}$ par rapport à R en appliquant la règle d'addition des vitesses :

$$\vec{v}_{1/R'} = \vec{v}_{1/R} - \vec{V}_{R'/R}\,.$$

L'énergie cinétique du mobile est donc une grandeur relative. Ainsi, l'énergie mécanique elle aussi dépendra du référentiel. Il apparaît que le graphe donnant l'énergie mécanique dans R' en fonction du temps (*cf.* figure 1) n'est plus une droite parallèle à l'axe des temps (comme c'était le cas dans R) mais une droite affine de pente non nulle (positive ou négative selon le signe de $\vec{u}_y \cdot \vec{V}_{R'/R} = \pm\,0{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) montrant que l'énergie mécanique du système n'est plus conservée dans R' (galiléen) alors que le système est bien (pseudo) isolé et qu'aucune force dissipative n'intervient !

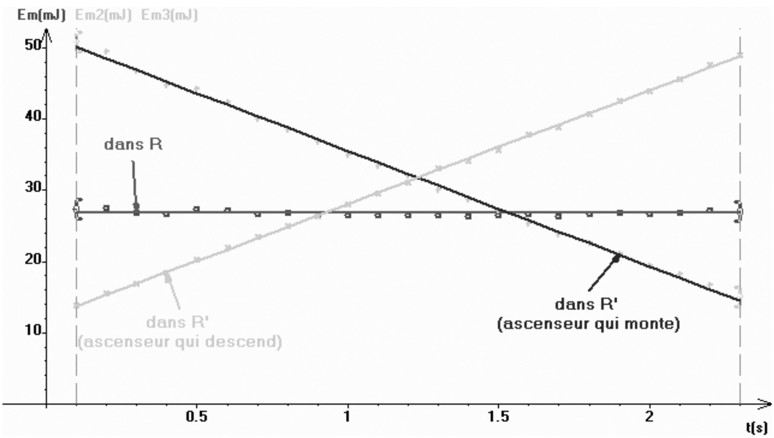

Figure 1

UNE ÉTUDE THÉORIQUE TRÈS SIMPLE

L'énergie potentielle ne dépend pas du référentiel, mais de la distance relative des deux corps. On peut se demander pourquoi la conservation de l'énergie mécanique n'est vérifiée que dans un référentiel particulier. Il nous faut maintenant faire une étude théorique simplifiée et tenter d'expliciter les raisons qui sont à l'origine de ce problème et leur signification physique. Bien que relative au référentiel, la vitesse d'un mobile (numéroté j)

$$\vec{v}_{j/R} = \vec{v}_{j/R} - \vec{V}_{R'/R}$$

a une variation qui est absolue (invariante !) :

$$d\vec{v}_{j/R'} = d\vec{v}_{j/R} = d\vec{v}_j \qquad (1)$$

Que l'énergie cinétique soit une grandeur relative est une évidence :

$$K_{j/R} = \frac{1}{2} m_j \vec{v}^{\,2}_{j/R} \neq K_{j/R'} = \frac{1}{2} m_j \vec{v}^{\,2}_{j/R'}$$

mais si on différentie les expressions des énergies cinétiques, on obtient une variation d'énergie cinétique

$$dK_{j/R} = m_j \vec{v}_{j/R} \cdot d\vec{v}_j \quad \text{et} \quad dK_{j/R'} = m_j \vec{v}_{j/R'} \cdot d\vec{v}_j$$

qui n'est manifestement pas invariante puisqu'elle dépend de la vitesse du mobile $\vec{v}_{j/R'}$.

L'addition des vitesses $\vec{v}_{j/R'} = \vec{v}_{j/R} - \vec{V}_{R'/R}$ permet alors d'écrire

$$dK_{j/R'} = m_j \cdot \left(\vec{v}_{j/R} - \vec{V}_{R'/R} \right) \cdot d\vec{v}_j$$

D'où l'expression suivante :

$$dK_{j/R'} = dK_{j/R} - m_j \vec{V}_{R'/R} \cdot d\vec{v}_j \, . \qquad (2)$$

qui exprime la dépendance d'une variation d'énergie cinétique vis-à-vis d'un changement de référentiel : la variation d'énergie cinétique est donc aussi une grandeur relative, ce qui semble moins familier.

Dans la suite, nous considérons deux corps $\left(j = 1 \,\text{ou}\, 2 \right)$ en interaction formant un système isolé. La quantité de mouvement du système total qui est isolé se conserve :

$$m_1 d\vec{v}_1 + m_2 d\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad (3)$$

Soient dK_1 et dK_2 les variations d'énergies cinétiques de leurs centres de masse respectifs, l'application de la relation (2) de changement de référentiel au système donne :

$$dK_{1/R} + dK_{2/R} = dK_{1/R'} + m_1 d\vec{v}_1 \cdot \vec{V}_{R'/R} + dK_{2/R'} + m_2 d\vec{v}_2 \cdot \vec{V}_{R'/R}$$

d'où, en regroupant les termes, en factorisant $\vec{V}_{R'/R}$, et en utilisant la relation (3) de conservation de la quantité de mouvement,

$$dK_{1/R} + dK_{2/R} = dK_{1/R'} + dK_{2/R'} \tag{4}$$

Donc, la variation d'énergie cinétique **totale** du système reste la même quel que soit le référentiel.

Cela montre que si les variations d'énergie cinétique de chaque corps sont relatives séparément, leur somme est invariante. Ce qui signifie que, lors d'une interaction dans un référentiel R, si un corps cède de l'énergie cinétique à un autre corps, on peut très bien avoir l'inverse dans un autre référentiel R'. La même interaction vue de deux points de vue différents conduit à des conclusions différentes quant à l'échange d'énergie cinétique (comme le note FEYNMAN dans sa lettre citée au début de cet article), mais le bilan pour tout le système $\{1 \cup 2\}$ **reste invariant**. Ce qui garantit la pertinence du concept. Un exemple très simple peut illustrer cela. Imaginons que l'on lâche une boulette de papier par la portière d'une voiture qui avance à une certaine vitesse.

- Par rapport à un observateur immobile sur la route et regardant la scène, la boulette a une énergie cinétique initiale à l'instant du lâcher et, freinée par l'air, elle perd cette énergie cinétique (travail de frottement négatif).
- Par rapport à la voiture, son passager verra la boulette soufflée par le courant d'air vers l'arrière, donc pour lui la boulette reçoit de l'énergie cinétique de l'air (travail de frottement positif), contrairement à ce qui apparaît chez certains auteurs [7].

Reprenons maintenant l'étude du système $\{1 \cup 2\}$. Si celui-ci est conservatif, l'énergie mécanique totale se conserve. Ce qui peut donc se réécrire de façon différentielle :

$$dK_{1/R} + dK_{2/R} + dE_p = dK_{1/R'} + dK_{2/R'} + dE_p = 0 \tag{5}$$

Tentons d'exprimer cette dernière relation uniquement avec des données relatives au mobile $\{1\}$. Pour ce faire, réécrivons la variation de l'énergie cinétique du mobile $\{2\}$. En utilisant l'équation de conservation (3), on obtient :

$$dK_{2/R} = m_2 \vec{v}_{2/R} \cdot d\vec{v}_2 = -\, m_1 \vec{v}_{2/R} \cdot d\vec{v}_1 \tag{5'}$$

En remplaçant dans (5), on trouve

$$dK_{1/R} - m_1 \vec{v}_{2/R} \cdot d\vec{v}_1 + dE_p = 0 \tag{6}$$

qui est l'expression de la conservation de l'énergie mécanique dans un référentiel R galiléen. On voit que ce n'est pas très satisfaisant : reste toujours la vitesse du mobile $\{2\}$.

Pour améliorer notre formule, intéressons-nous maintenant au référentiel barycentrique (que l'on notera R^*). Rappelons que R^* est le référentiel en translation dans R (galiléen) tel que le centre de masse G du système est fixe dans R^*. Comme le système $\{1 \cup 2\}$ est isolé, G a un mouvement rectiligne uniforme dans R galiléen. Aussi, R^* est lui-même galiléen, car en translation rectiligne uniforme par rapport à R.

Par définition du centre de masse, le principe de conservation de la quantité de mouvement dans R^* donne :

$$m_1\vec{v}_{1/R^*} + m_2\vec{v}_{2/R^*} = \vec{0} \qquad (6')$$

Dans R^*, on peut donc écrire la formule (5) en remplaçant dK_{2/R^*} par son expression (5') et en exprimant la vitesse de $\{2\}$ grâce à (6'), il vient :

$$dK_{1/R^*} - m_1\left(\frac{-m_1}{m_2}\vec{v}_{1/R^*}\right)\cdot d\vec{v}_1 + dE_p = 0$$

et comme $$dK_{1/R^*} = m_1\vec{v}_{1/R^*}\cdot d\vec{v}_1$$

on obtient finalement : $\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)dK_{1/R^*} + dE_p = 0$ où $\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)dK_{1/R^*} = dK_{2/R^*}$ (7)

Ainsi, dans le référentiel barycentrique, on a – presque – réussi à exhiber une énergie constante $\left(\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)K_{1/R^*} + E_p\right)$ qui dépend principalement des données relatives au mobile $\{1\}$.

Dans certains cas de systèmes, il arrive que l'un des éléments (qu'on supposera être $\{2\}$) ait une masse très grande (« infinie ») devant le reste du système $(m_2 \gg m_1)$. C'est le cas, par exemple, des systèmes comprenant la Terre comme l'un des corps en interaction, comme dans l'expérience de chute citée dans l'introduction. En fait, c'est toujours le cas lorsqu'un corps est en interaction avec un support ayant une **vitesse constante** (on en verra un exemple dans l'exercice traité plus loin).

Si donc $\{2\}$ est de masse « infinie », le centre de masse *G* du système $\{1 \cup 2\}$ se réduit à celui de $\{2\}$, et le référentiel barycentrique R^* sera noté de façon intuitive R_2 (c'est-à-dire le référentiel galiléen où $\{2\}$ est fixe).

La relation (7) devient alors

$$dK_{1/R_2} + dE_p = 0 \qquad (8)$$

C'est donc dans R_2, et dans ce référentiel seul, que l'on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique telle que bien connue. Cela explique pourquoi, dans une expérience de chute libre (comme dans le cas traité en introduction), il convient d'exprimer l'énergie mécanique dans le référentiel terrestre.

UN PETIT EXERCICE PIÈGE

Le lecteur peut être dubitatif : il est habitué à étudier les problèmes de mécanique dans le référentiel terrestre (*R*) et au point où nous en sommes, nous espérons l'avoir convaincu d'écrire la conservation de l'énergie mécanique dans R_2, c'est-à-dire… R ! Il existe cependant de nombreux cas où ces deux référentiels ne coïncident pas, et pour lesquels l'application de la conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel terrestre aboutit à une erreur. Nous allons maintenant proposer un exercice d'apparence simple avec lequel on peut se faire « piéger » facilement (le lecteur pourra en faire l'expérience avec ses élèves et, pourquoi pas, ses… collègues). On peut imaginer de nombreux autres exercices de ce type.

Un jouet (*cf*. figure 2) formé d'un canon à ressort (le mobile $\{2\}$) lance un projectile (le mobile $\{1\}$) de masse m_1 horizontalement tout en avançant à vitesse horizontale constante $\vec{v}_{2/R}$ par rapport au sol. Connaissant la variation d'énergie potentielle ΔE_p du ressort lors de ce jet, calculer la vitesse $v_{1/R}$ d'éjection du projectile dans le référentiel de la Terre (*R*) (on néglige tous les frottements).

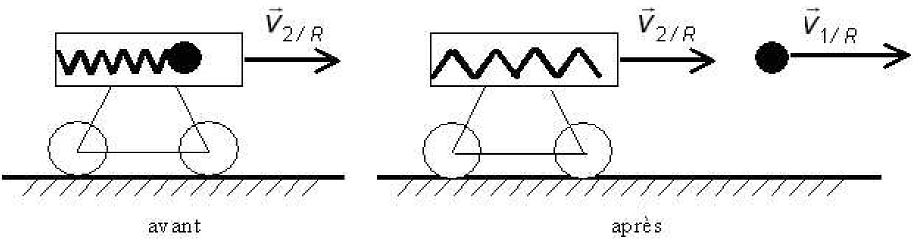

Figure 2

Spontanément, on pourrait être tenté d'écrire la conservation de l'énergie mécanique dans *R*. Si $\Delta K_{1/R}$ représente la variation d'énergie cinétique du projectile lors du jet, on a $\Delta K_{1/R} + \Delta E_p = 0$, soit $\frac{1}{2}m_1\vec{v}^{\,2}_{1/R} - \frac{1}{2}m_1\vec{v}^{\,2}_{2/R} = -\Delta E_p$, d'où l'on tire la valeur de la vitesse d'éjection $v_{1/R}$ demandée. Or cette façon de procéder est fausse, car on n'a pas tenu compte de la variation d'énergie du mobile $\{2\}$ (*cf*. équation (5)) !

On pourrait objecter que, le canon à ressort (le mobile $\{2\}$) ayant une vitesse constante $v_{2/R}$, son énergie cinétique est constante. Or ce n'est pas le cas, car le canon a une masse « infinie » $(m_2 \gg m_1)$, il y a donc une indétermination dans le calcul de $\Delta K_{2/R}$.

On peut néanmoins surmonter cette difficulté grâce à la conservation de la quantité de mouvement du système $\{1 \cup 2\}$ (3) :

$$\Delta K_{2/R} = m_2 \vec{v}_{2/R} \cdot \Delta\vec{v}_2 = -\, m_1 \vec{v}_{2/R} \cdot \Delta\vec{v}_1$$

comme vu précédemment. Ce qui nous redonne l'équation (6) intégrée :

$$\Delta K_{1/R} - m_1 \vec{v}_{2/R} \cdot \Delta\vec{v}_1 + \Delta E_p = 0$$

Comme $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}$, cela nous donne la bonne relation :

$$\left(\frac{1}{2} m_1 \vec{v}^{\,2}_{1/R} - \frac{1}{2} m_1 \vec{v}^{\,2}_{2/R}\right) - m_1 \vec{v}_{2/R} \cdot \left(\vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}\right) = -\, \Delta E_p$$

Après regroupement des termes et en utilisant une identité remarquable, on trouve :

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}\right)^2 = -\, \Delta E_p$$

soit $\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1/2}^{\,2} = -\, \Delta E_p$ où $\vec{v}_{1/2}$ est la vitesse de $\{1\}$ par rapport à $\{2\}$.

En se plaçant directement dans le référentiel idoine, on aurait retrouvé plus rapidement ce résultat. Ce référentiel (R_2), c'est celui du canon, puisque le canon a une masse « infinie » $(m_2 \gg m_1)$. Appliquons la formule (8) intégrée :

$$\Delta K_{1/R_2} + \Delta E_p = 0$$

Comme la vitesse du projectile, initialement nulle dans R_2, devient après l'éjection $\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}$, la conservation de l'énergie mécanique dans R_2 redonne bien :

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}\right)^2 = -\, \Delta E_p$$

Il n'est pas nécessaire de souligner que le choix du référentiel *ad hoc* (c'est-à-dire celui du mobile $\{2\}$ de masse infinie) non seulement évite de se tromper, mais aussi simplifie considérablement les calculs.

NOTE DE LA RÉDACTION

On peut retrouver le résultat de l'exercice de la façon suivante :

- Soit m_2 la masse du canon que l'on fera tendre vers l'infini dans les résultats et $\vec{v}_{2/R}$ la vitesse du canon, après le départ du projectile. Les lois de conservation dans R donnent :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\vec{v}_{2:R} = m_1 \vec{v}_{1/R} + m_2 \vec{v}_{2/R} \\ -\, \Delta E_p + (m_1 + m_2)\, \dfrac{v^2_{2/R}}{2} = \dfrac{m_2}{2}\, v'^{\,2}_{2/R} + \dfrac{m_1}{2}\, v^2_{1/R} \end{cases}$$

On en déduit : $-\Delta E_p = \dfrac{m_1}{2}\left(v_{1/R}^2 + v_{2/R}^2 - \vec{v}_{1/R}\cdot\vec{v}_{2/R}\right) + \dfrac{m_1^2}{2m_2}\left(\vec{v}_{2/R} - \vec{v}_{1/R}\right)^2$

Si $m_2 \gg m_1$: $-\Delta E_p = \dfrac{m_1}{2}\left(\vec{v}_{1/R} - \vec{v}_{2/R}\right)^2$

CONCLUSION

Cet article avait pour but de mettre en garde contre le réflexe spontané d'appliquer la conservation de l'énergie mécanique dans un référentiel où elle n'est pas valable, car il est aisé de croire que si un corps (ou un support quelconque) a une vitesse constante dans une interaction (donc une masse infinie) son énergie cinétique ne varie pas.

On peut vérifier que la variation d'énergie cinétique totale du système est indépendante de la nature des formes d'énergies dans lesquelles elle se transforme : notre propos est donc plus vaste et s'applique aussi aux cas où interviennent des forces non conservatives, les transferts thermiques, etc. De plus, ce que l'on a développé s'applique non seulement aux référentiels galiléens, mais aussi aux référentiels en rotation uniforme (on peut traiter par exemple le cas du pendule tournant (*cf.* [8-9])). Il suffit alors de remplacer le terme $-m_1\,\vec{v}_{2/R}\cdot\vec{v}_{1/R}$ par son analogue « rotatoire » : $-\vec{L}\cdot\vec{\Omega}$ ($\vec{L}$: moment angulaire de la masse suspendue et $\vec{\Omega}$ vitesse angulaire de rotation du pendule). Ici, c'est le principe de conservation du moment angulaire qui joue le rôle du principe de conservation de la quantité de mouvement dans le cas de la translation.

Notons enfin que la relation (6) dans le cas où le système $\{2\}$ a une masse infinie (si sa vitesse $\vec{v}_{2/R}$ est constante) fait apparaître une « énergie » :

$$E = K_{1/R} - m_1\vec{v}_{2/R}\cdot\vec{v}_{1/R} + E_p$$

qui se conserve. Il faut préciser qu'elle n'est pas l'énergie totale (qui est infinie !), mais représente, sous forme simplifiée, ce qu'on appelle, en mécanique analytique, une intégrale première de PAINLEVÉ (*cf.* [11]). C'est la signification physique de celle-ci que nous avons cherché à mettre en évidence ici. Signification physique qui n'est guère explicite dans les ouvrages spécialisés sans doute parce que la puissance du formalisme lagrangien, qui permet d'obtenir un hamiltonien de façon quasi mécanique (!) en occulte aussi les aspects « physiques » ([7], [8] et [10]).

Le lecteur désireux d'élargir sa réflexion se reportera avec profit à la référence [12].

BIBLIOGRAPHIE

[1] FEYNMANN R. P. *Qu'en pensez-vous, monsieur Feynman ? Lettres 1939-1987*. Paris : Dunod, 2006.

[2] BIBOUD D. « Plan incliné étudié avec un tableur ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1999, vol. 93, n° 815 (1), p. 1025-1034.

[3] BEAUFILS D. et IMBROGNO J.-C. « Incertitudes expérimentales - Étude de cas : Logiciel Chute ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1993, vol. 87, n° 755, p. 883-894.

[4] ZIMMER A. « Une boule à crochet tombe dans une piscine ! ». *Bull. Un. Phys.*, octobre 2001, vol. 95, n° 837, p. 1407-1428.

[5] PÉREZ J.-P. « Grandeurs qui se conservent et grandeurs conservatives ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1998, vol. 92, n° 805 (1), p. 981-987.

[6] LE RILLE A. « De la relativité de l'incertitude relative sur les grandeurs relatives ou comment vérifier expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, février 2006, vol. 100, n° 881, p. 229-233.

[7] GOLDSTEIN H. *Mécanique classique*. Paris : PUF, 1964.

[8] PÉREZ J.-P. *Mécanique*. 5e édition, Paris : Masson, 1997.

[9] PÉREZ J.-P. et PÉREZ A.-M. « Quelques remarques et commentaires sur l'enseignement du concept d'énergie ». *Bull. Un. Phys.*, novembre 1994, vol. 88, n° 768, p. 1601-1608.

[10] LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Physique théorique - Tome 1 : Mécanique*. 4e édition complétée, Moscou : Éditions Mir, 1982.

[11] BAMBERGER Y. *Mécanique de l'ingénieur - I : Systèmes de corps rigides*. Paris : Hermann, 1981.

[12] GALILI I. et KAPLAN D. « Extending the application of the relativity principle : Some pedagogical advantages ». *Am. J. Phys.*, avril 1997, n° 65(4), p. 328-335.

André BUTOLI
Enseignant
Laboratoire de physique théorique
LP d'Arsonval
Saint-Maur (Val-de-Marne)

Alain LE RILLE
Professeur en classes préparatoires MP
Lycée Camille Pissarro
Pontoise (Val d'Oise)