

# Électromagnétisme dans l'ARQS

## Notes de cours mardi 30 janvier 2018

### I- Lois générales de l'électromagnétisme

#### 1. Conservation de la charge

##### 1 Densités volumiques de charge et de courant déduites des caractéristiques des porteurs de charge *théorème*

Dans  $d^3\tau$ , il y a  $n_k \cdot d^3\tau$  particules de type  $k$ .  $\Rightarrow$

Si les particules de type  $k$  de densité  $n_k$  ont une charge  $q_k$  et une vitesse  $\vec{v}_k$ , alors

$$\rho = \sum_k n_k q_k \text{ et } \vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

##### 2 Equation locale de conservation de la charge *théorème*

pour un système (volume  $V$ ) fermé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique  $Q = \iiint_{M \in V} \rho(M) \cdot d^3\tau$  varie à cause du courant  $I$  qui traverse la surface fermée qui délimite le volume  $V$

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\tau = - \oiint \vec{j} \cdot d^2\vec{\Sigma} = - \iiint \operatorname{div} \vec{j} \cdot d^3\tau$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j}) = 0$$

##### 3 Conservation de la charge en régime permanent *exercice*

Montrer que dans le cas permanent, la conservation de la charge permet de retrouver la loi des nœuds.

En régime permanent, pour un système (volume  $V$ ) fermé, qui s'appuie sur un tube de courant

$$\frac{dQ}{dt} = 0 = - \oiint \vec{j} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \sum_j I_j$$

#### 2. Lois générales de l'électromagnétisme

##### Les charges et courants, sources du champ électromagnétique *animation*

La figure 1 représente l'unification de l'électricité et du magnétisme dans un même formalisme par Maxwell en 1862. Comment charges et courants génèrent les champs électrique et magnétique ?.

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

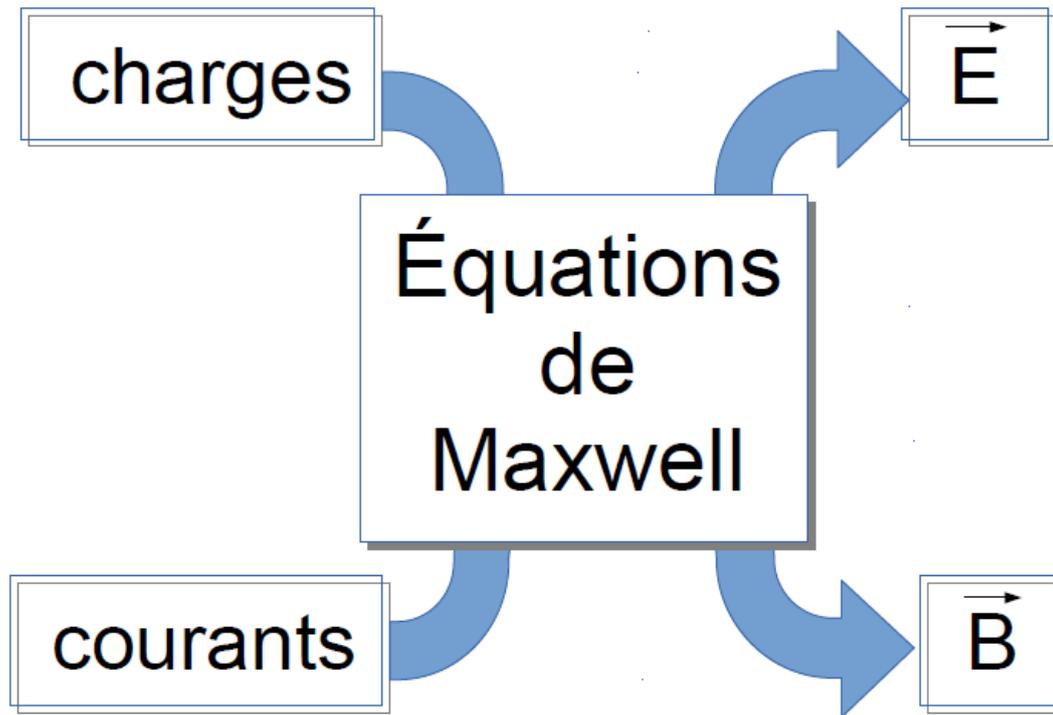


FIGURE 1 – Les charges et courants, sources du champ électromagnétique



### Équations de Maxwell *définition*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“Maxwell flux” : } \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{“Maxwell Gauss” : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{“Maxwell Faraday” : } \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{“Maxwell Ampère” : } \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$



### Constantes fondamentales de l'électromagnétisme *s'y retrouver*

avec :

- Permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



### 4 Conservation de la charge et équations de Maxwell *exercice*

▷ Vérifier que l'équation de conservation locale de la charge est donnée par les équations de Maxwell.

“Maxwell Gauss”  $\Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$

soit  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Or “Maxwell Ampère”  $\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\vec{B}) - \vec{j}$ .

Donc  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{B})) - \operatorname{div} \vec{j}$ .

Comme la divergence d'un rotationnel est nulle, on trouve bien :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

### 5 Conséquences de l'équation de Maxwell-Faraday *exercice*

- ▷ Démontrer la loi de Faraday grâce à l'équation de Maxwell-Faraday.
- ▷ Montrer que le champ électrique ne dérive pas en général d'un potentiel scalaire.

▷  $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$  avec la formule de Stokes :

$$\oint \vec{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{\ell} = \iint \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d^2\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \iint \vec{B} \cdot d^2\vec{S} \right) = -\frac{d\phi}{dt}$$

où  $\phi = \iint \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$ .

▷ Le champ électrique ne dérive pas en général d'un potentiel scalaire car

$$\vec{\text{rot}}(-\vec{\text{grad}}V) = \vec{0} \neq -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}}(\vec{E})$$

### L'action du champ électromagnétique sur les charges et courants *animation*

- La figure 2 représente les champs électrique et magnétique qui influent sur les charges et courants..
- Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

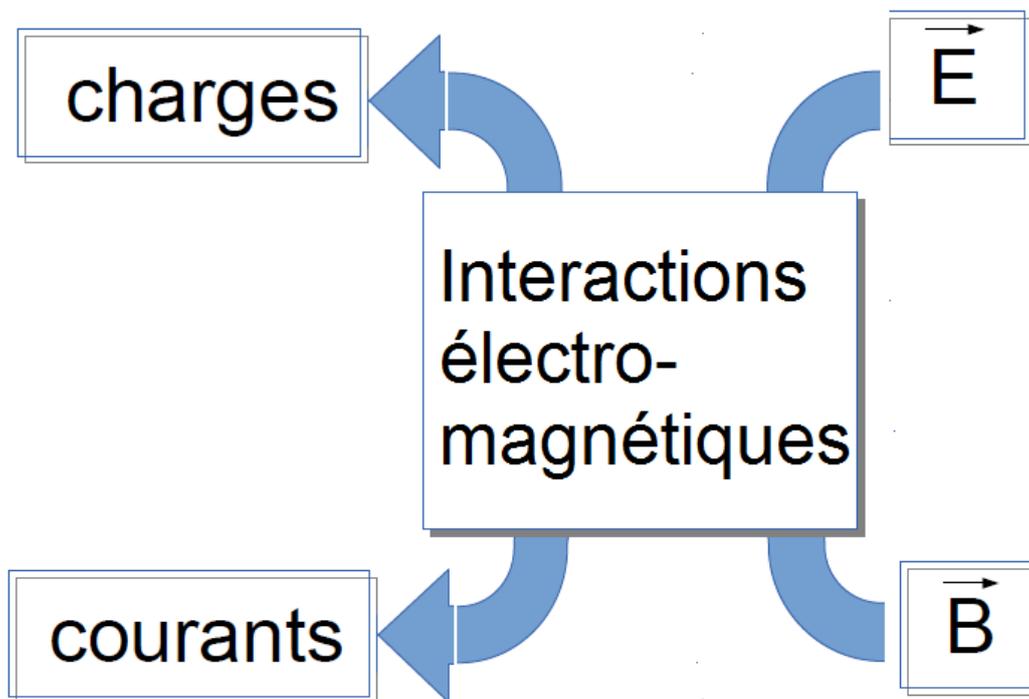


FIGURE 2 – L'action du champ électromagnétique sur les charges et courants

### 6 Bilan énergétique électromagnétique *théorème*

$\Rightarrow$

Du fait de l'existence d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ ,

- un volume  $V$  a une énergie électromagnétique  $E_{em} = \iiint e_{em} d^3\tau$
- avec l'énergie volumique  $e_{em}(M) = \frac{\epsilon_0 E(M)^2}{2} + \frac{B(M)^2}{2\mu_0}$  (en  $J \cdot m^{-3}$ ).  
Le bilan énergétique s'écrit
- pour le volume  $V$  :  $-\frac{dE_{em}}{dt} = P_r + P_d$
- et, localement,  $-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = \text{div}\vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$

avec

- la puissance rayonnée  $P_r = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{\Sigma}$ , flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ),
- et la puissance dissipée  $P_d = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\tau$ , due à l'effet Joule.

## 7 Bilan énergétique et équations de Maxwell *exercice*

▷ Vérifier que le bilan énergétique local pour le champ électromagnétique est donné par les équations de Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{j} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\text{rot} \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \\ \text{div} \vec{\Pi} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \left( \vec{E} \right) - \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \left( \vec{B} \right) \end{cases}$$

donc :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \left( \vec{E} \right) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'après Maxwell Faraday. Or

$$-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

### 3. Cas des régimes lentement variables

#### Approximation des Régimes Quasi Stationnaires *définition*

Tout régime sinusoïdal de longueur d'onde  $\lambda$  vérifiera l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) si et seulement

$$D \ll \lambda$$

où  $D$  est la taille caractéristique du dispositif.

#### ARQS et comportement ondulatoire *s'y retrouver*

Il s'agit de négliger les phénomènes ondulatoires : dans l'ARQS, les ondes électromagnétiques, à l'instant  $t$ , se trouvent dans le même état d'onde quel que soit le point  $M$  (défini par le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ) :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \approx \psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = \psi(t)$$

Négliger la propagation par rapport à la variation temporelle revient à  $\vec{k} \cdot \vec{r} \approx 0 \Leftrightarrow \frac{r}{\lambda} \approx 0 \Leftrightarrow r \ll \lambda$  pour tout  $r$  du dispositif. Or  $r \leq D$ .

#### L'ARQP est un régime de basse fréquence *s'y retrouver*

L'Approximation des

Régimes

Quasi

Stationnaires

(ou **ARQP** : approximation des régimes quasi - permanents).

consiste à se placer dans un régime périodique de pulsation  $\omega$  très faible. Tout se passe presque comme en régime permanent, quand  $\omega = 0$ , sauf que le régime est variable.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$$

Le régime sinusoïdal de longueur d'onde  $\lambda$  a, dans le vide, une pulsation  $\omega$  (et une fréquence  $\nu$ ) telles que :

$$\nu \ll \frac{c}{D}$$

L'ARQS est donc l'ensemble des régimes de suffisamment basse fréquence.

Dans la vie courante, l'utilisation d'un montage électrique sur une paillasse de taille  $D \sim 1m$  donne :  $\nu \ll 3 \times 10^8$  Hz. Ainsi, l'utilisation d'un générateur basses fréquences ("généBF", qui délivre des signaux électriques de fréquences inférieures à 5 MHz) nous place dans l'ARQS.

## II- Conducteurs dans l'ARQS

### 1. Conducteur en régime permanent



**Actions subies par les électrons libres d'un conducteur ohmique** *s'y retrouver*

Les électrons libres dans un métal fixe subissent :

- l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau fixe (les ions) sous la forme d'une force phénoménologique de la forme  $\frac{-m\vec{v}}{\tau}$  où  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation des électrons ;
- l'action du champ électromagnétique sous la forme de la force de Lorentz :  $-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$ , la partie magnétique étant bien souvent négligeable pour une onde car alors  $\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$ , avec  $v \ll c$ .



**8 Démonstration de la loi d'Ohm locale** *exercice*

▷ En étudiant le comportement des électrons, montrer qu'un conducteur plongé dans un champ électrique  $\vec{E}_0$  constant suit :  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}_0$ .

En régime permanent, pas d'accélération, donc

$$\frac{-m\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-\tau e}{m} \vec{E}_0$$

Or comme les ions sont fixes,

$$\vec{j} = -e n_e \vec{v} = \frac{n_e \tau e^2}{m} \vec{E}_0$$



**Loi d'Ohm locale** *définition*

Un conducteur en magnétostatique plongé dans un champ électrique  $\vec{E}_0$  suit la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du métal (en  $S \cdot m^{-1}$ ).



**9 Loi d'Ohm globale** *exercice*

▷ Déterminer la résistance d'un conducteur cylindrique de longueur  $\ell$ , de section  $S$ , de conductivité  $\gamma$ .

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \gamma E_0 \cdot S \text{ et } U = \int \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{d\ell} = \ell \cdot E_0. \text{ Donc : } U = R \cdot I \text{ avec } R = \frac{\ell}{\gamma \cdot S}.$$



**10 De la puissance dissipée à l'effet Joule** *exercice*

- ▷ Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.
- ▷ Comparer la puissance totale dans un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $\ell$  à celle dissipée par effet Joule dans ce même conducteur ohmique.

▷ La puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique est

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

▷ La puissance totale dans un conducteur filiforme de section  $S$  et de longueur  $\ell$  est donc

$$P_{tot} = S \ell \frac{j^2}{\gamma} = S \ell \frac{I^2}{\gamma S^2} = \frac{\ell}{\gamma S} I^2$$

On retrouve bien la puissance dissipée par effet Joule dans ce même conducteur ohmique :  $R I^2$  avec  $R = \frac{\ell}{\gamma S}$ .



### Interprétation électrique de la puissance dissipée *s'y retrouver*

On peut associer :

- la puissance transférée du champ électromagnétique à la matière par des forces de Lorentz en électromagnétisme,
- et la puissance dissipée par effet Joule en électricité.



### Effet Hall *animation*

La figure 3 représente l'effet de l'application d'un champ magnétique perpendiculairement à la plus grande face d'une plaquette dans laquelle circule un courant..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

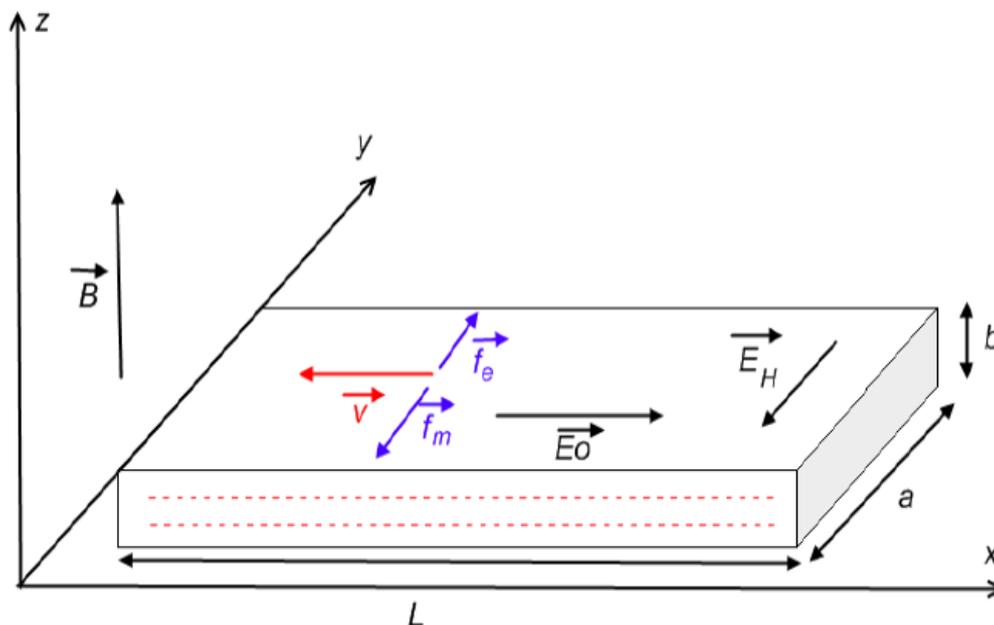


FIGURE 3 – Effet Hall



### Loi de l'effet Hall *s'y retrouver*

Entre les bords d'une plaquette de Hall parcourue par un courant  $I$  plongée dans un champ magnétique  $B$  existe une tension de Hall

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot b} = R_H \frac{I \cdot B}{b} \quad \text{avec la constante de Hall : } R_H = \frac{1}{n \cdot e}$$

La constante de Hall des conducteurs est très faible, par contre celle des semi-conducteur est plus grande. Aussi, on utilise des sondes de Hall formée d'une plaquette de semi-conducteur qui permet, par la mesure

de la tension de Hall, de déduire le champ magnétique.

## 2. Lois suivies par les conducteurs dans l'ARQS

### 11 Conducteur dans l'ARQS *théorème*

La loi de conservation locale de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  devient dans les conducteurs

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho$$

d'après l'équation de Maxwell Gauss. Aussi, tout excès (ou défaut) de charge initial  $\rho_0$  va relaxer avec un temps caractéristique  $\theta = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \sim 10^{-18} \text{s} \ll T$ , la période du régime dans l'ARQS.

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} \Rightarrow \rho \simeq 0$$

On voit donc que la charge des conducteurs dans l'ARQS est quasiment nulle

La loi de conservation locale de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  devient dans les conducteurs dans l'ARQS  $\text{div}(\vec{j}) \approx 0$ , ce qui impose la conservation du flux de  $\vec{j}$  sur un tube de  $\vec{j}$  (un fil électrique).

Les courants de déplacement sont

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \Rightarrow \|\vec{j}_D\| \sim \|\vec{j}\| \frac{\theta}{T} \ll \|\vec{j}\|$$

⇒

Dans les conducteurs dans l'ARQS,

- $\rho \approx 0$
- la loi des nœuds est vérifiée;
- $I = cste$  dans une branche électrique,
- les courants de déplacement sont négligeables devant les courants électriques :

$$\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\| \Rightarrow \text{rot}(\vec{B}) \approx \mu_0 \vec{j}$$

### Champs magnétiques dans l'ARQS *s'y retrouver*

On pourra étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire au cas de l'ARQS : toutes les expressions de  $\vec{B}$  obtenues en magnétostatique restent valables dans l'ARQS en remplaçant l'intensité  $i$  par  $i(t)$ .

Le fait que  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \cdot \vec{j}$  fait que l'on appelle ce régime "ARQS magnétique".

## 3. Induction dans un circuit électrique

### Equivalent du conducteur filiforme en électrocinétique *schéma*

La figure 4 représente la modélisation d'un fil électrique. On pourra remplacer dans tout circuit un conducteur filiforme par son équivalent en électrocinétique, c'est à dire un conducteur ohmique en série avec un générateur parfait de tension.

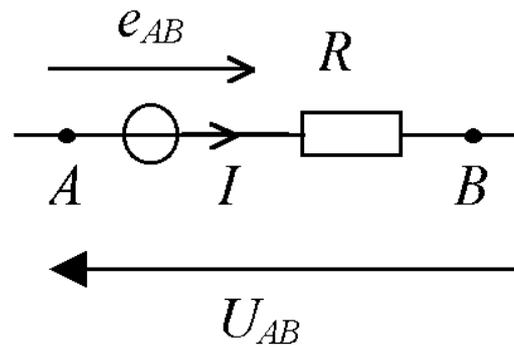


FIGURE 4 – Equivalent du conducteur filiforme en électrocinétique

**Loi de Faraday à retenir**

soit un circuit  $C$  orienté. La force électromotrice ("fém") d'induction qui correspond à ce circuit filiforme, orientée dans le sens de  $C$  est :

$$e_{em} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{où} \quad \phi = \iint \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$$

est le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  qui s'appuie sur le contour fermé orienté  $C$  et qui est orientée par lui.

**Loi de Lenz à retenir**

L'effet des courants induits (c'est à dire le champ magnétique qu'ils créent) s'oppose à la cause qui leur a donné naissance (c'est à dire aux variations du champ magnétique inducteur).

La loi de Lenz est une loi de modération (il y a réaction négative).

### III- Applications de l'induction

**Principe de l'alternateur : vidéo**

pour induire une différence de potentiel (et un courant), il suffit de faire varier le flux du champ magnétique à travers une bobine. Pour cela, deux possibilités :

- soit on fait tourner l'aimant permanent (qui est le rotor), la bobine restant fixe (c'est le stator), on est alors dans le cas de l'induction de Neumann ;
- soit on garde fixe l'aimant permanent (qui est cette fois-ci le stator), et on fait tourner dans son voisinage la bobine (qui est alors le rotor), et on se trouve dans un cas d'induction de Lorentz.

Dans les deux cas, l'énergie cinétique d'un axe (le rotor) est convertie en travail électrique : l'alternateur est un convertisseur électromécanique.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**Circuits couplés s'y retrouver**

- | On considère deux circuits filiformes orientés ( $C_1$  et  $C_2$ ), parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ .

**Inductance mutuelle** *définition*

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

L'inductance mutuelle  $M$  qui s'exprime en henrys (H)  
elle est positive ou négative suivant les conventions d'orientation des deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ .

**Inductance propre** *définition*

$$\phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$$

L'inductance  $L$ , s'exprime en henry (H),  
elle est toujours positive,  
et elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des circuits (pas des conventions d'orientation).

**Coefficient de couplage** : *s'y retrouver*

on peut poser la grandeur sans dimension :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

( $k \in [0; 1]$ )

Cas du couplage nul : il n'y a aucun couplage entre deux circuits si  $k = 0$ , c'est à dire si leur inductance mutuelle est nulle ( $M = 0$ ). C'est le cas par exemple une bobine est suffisamment éloignée de l'autre pour ne pas ressentir le champ magnétique créé par celle-ci.

Cas du couplage optimal : le couplage optimal, au contraire est obtenu pour un coefficient de couplage maximal ( $k = 1$ ), ce qui demande que tout le champ magnétique créé par une bobine intervienne dans le flux de l'autre. En pratique, pour réaliser cela, on utilise un noyau de fer doux autour duquel on réalise les deux bobinages. Les propriétés ferromagnétiques du fer font que la quasi-totalité du champ magnétique est alors dans le noyau.

**Auto-induction** *s'y retrouver*

une bobine ("self" ou "auto-induction", ou encore "induction") parcourue par un courant  $i$  peut être assimilée à un circuit filiforme orienté  $C$ .

Si d'autres bobines interviennent, on supposera leur mutuelle nulle, afin de n'avoir à considérer que l'inductance propre.

**12 Caractéristique électrique d'une bobine** *exercice*

▷ Montrer que la tension aux bornes d'une bobine est :

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

en convention récepteur.

▷ La tension aux bornes d'un fil électrique de résistance  $R$ , parcouru par un courant électrique  $i$  est  $u = R \cdot i - e$ , où  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  est la force électromotrice ("fém") d'induction. Aussi, on trouve bien  $u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$  car  $\phi = L i$ .

### 13 Étude énergétique d'une bobine *exercice*

On rappelle que le champ magnétique qui règne dans une bobine constituée de  $n$  spires par unité de longueur parcourues par un courant  $I$  est  $B = \mu_0 n I$ . On notera  $N$  le nombre de spires,  $\ell$  la longueur et  $S$  la section de la bobine.

- ▷ Établir les expressions de l'inductance propre grâce au flux du champ magnétique.
- ▷ Vérifier le précédent calcul grâce à l'énergie magnétique dans la bobine.

▷ Le flux est

$$\phi = N S B = N \mu_0 \frac{S N}{\ell} I = L I$$

donc l'inductance est  $L = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell}$ .

▷ L'énergie magnétique est

$$E_m = \frac{1}{2} S \ell \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} S \ell \frac{(\mu_0 n I)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} S \ell \mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2} S N \mu_0 \frac{N}{\ell} I^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

donc l'inductance est  $L = \mu_0 N^2 \frac{S}{\ell}$ .



### Continuité du courant dans une bobine : *s'y retrouver*

La continuité temporelle de l'énergie assure la continuité du courant  $i$  dans la bobine.



### "Inertie" du courant à cause de la présence d'une bobine : *vidéo*

L'énergie emmagasinée dans une bobine peut être mise en évidence par le flash envoyé par une diode électroluminescente après que le générateur qui alimentait cette bobine soit mis hors fonction.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



### remarque

Il ne faut donc jamais mettre un interrupteur dans la même maille qu'une bobine au risque de créer des étincelles.



### Caractéristiques techniques d'une bobine *s'y retrouver*

pour avoir une inductance  $L$  respectable, on a tout intérêt à réaliser de nombreux bobinages (c'est à dire augmenter  $N$ ).

D'autre part, l'introduction d'un noyau de fer doux aura pour conséquence de multiplier la valeur de la perméabilité du vide  $\mu_0$  par la perméabilité magnétique relative de ce matériau, très élevée.



### Exemples de perméabilités magnétiques relatives *tableau*

Le tableau 1 présente quelques valeur de perméabilités relatives.

Matériau	Cobalt	Fer	Mu-métal	Nickel
$\mu_r$	250	10000	10000	600

TABLE 1 – Perméabilité magnétiques relatives (maximales) de quelques matériaux ferromagnétiques à 20°C

## Caractéristiques technique d'un transformateur *photo*



Un transformateur est réalisé par le bobinage de deux circuits filiformes orientés autour d'un cadre de fer doux qui canalise -presque- tout le champ magnétique. Ce noyau de fer est bien souvent feuilleté afin d'éviter les courants de Foucault en son sein (et donc les "pertes fer").

### Transformateur idéal *définition*

Si les résistances du primaire (indiqué 1) et du secondaire (indiqué 2) sont nulles :  $R_1 = R_2 = 0$  et si tout le champ magnétique est canalisé par le noyau de fer doux :

$$\phi_{\rightarrow 1} = N_1 \phi \text{ et } \phi_{\rightarrow 2} = N_2 \phi$$

où  $\phi$  est le flux du champ magnétique à travers une unique spire n'importe où autour du cadre de fer doux,

alors les tensions ( $u_1$  et  $u_2$ ) et intensités ( $i_1$  et  $i_2$ ) suivent

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \text{ et } \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

## Schéma de distribution du courant. *schéma*

La figure 5 représente un bon et un mauvais schéma de distribution du courant. Supposons en effet que EDF distribue l'électricité simplement, depuis la centrale électrique jusqu'à l'utilisateur (simulé par une résistance  $R_u$ ) avec des fils électriques (pris en compte par une résistance  $R_f$ ).

La puissance dissipée par effet Joule dans les fils est  $P_f = R_f \cdot i_u^2$ , où  $i_u$  est l'intensité distribuée à l'utilisateur. Cette puissance dissipée dans les fil serait de l'ordre de grandeur de celle récupérée par l'utilisateur.

De surcroît, la chute ohmique  $u_f$  serait telle que la tension récupérée par l'utilisateur  $u_u$  serait différente de celle donnée par la centrale  $u_c$ .

En fait, EDF élève la tension grâce à plusieurs transformateurs éleveurs (le schéma de la figure ?? pour plus de clarté n'en présente qu'un) avant d'acheminer sur ses lignes ( $R_f$ ) la puissance électrique, puis distribue au consommateur après une diminution de la tension grâce à des transformateurs abaisseurs.

Ainsi, la puissance dissipée par effet Joule dans les fils est maintenant négligeable devant celle récupérée par l'utilisateur. De plus, la chute ohmique est négligeable :  $u'_f \approx 0$  ( $i'_f \approx 0$ ). Ainsi, la tension récupérée par l'utilisateur  $u'_u$  est quasiment celle donnée par la centrale  $u_c$  (soit 220V efficaces).

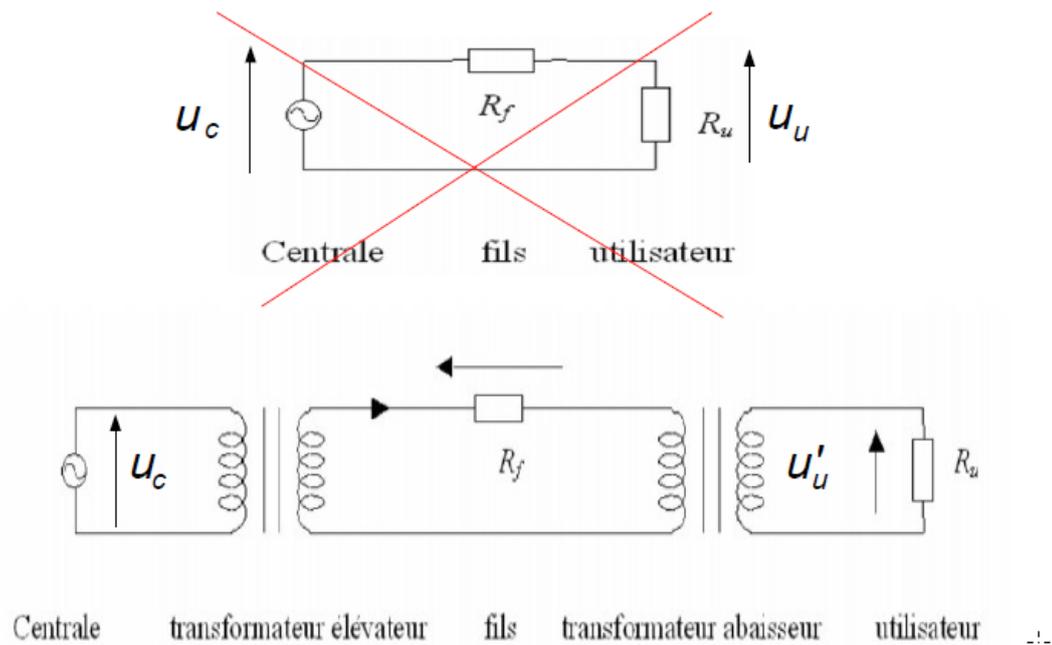


FIGURE 5 – Schéma de distribution du courant.

### 1) Modélisation d'un haut-parleur *exercice*

On modélise un haut-parleur électrodynamique en utilisant certaines hypothèses simplificatrices :

- On considère que l'ensemble membrane et bobine mobile se comporte comme un solide rigide de masse  $m$  qui se déplace d'un seul bloc le long de l'axe ( $z'z$ ) et on note  $z$  l'élongation de l'équipage mobile par rapport à sa position d'équilibre.
- Le spider et la suspension périphérique seront considérés comme des ressorts linéaires de constante de raideur totale  $k$ .
- La force de frottement fluide  $\vec{F}_f$  exercée par l'air sur la membrane sera du type  $\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$  avec  $h$  un coefficient de frottement supposé constant.

Le circuit de l'enroulement est équivalent à une inductance propre  $L$  en série avec une résistance  $R$  et une force électromotrice (fem)  $e_{em}$  telle que :

$$e_{em} = \ell \frac{dz}{dt} B$$

- 1) Ecrire les équations régissant le comportement du haut-parleur :
  - 1.a) l'équation électrique,
  - 1.b) l'équation mécanique.
- 2) On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ .
  - 2.a) Réécrire les deux dernières relations trouvées.
  - 2.b) Montrer que le haut-parleur est équivalent à une association en série d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$  et d'un dipôle d'impédance complexe  $Z_m$  tel que :

$$Z_m = \frac{R_m}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- 2.c) Donner le schéma électrique équivalent au haut-parleur.

**Correction :**

1)

1.a) Equation électrique : Le circuit de l'enroulement suit :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - e_{em}$$

Donc l'équation électrique est :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} - \ell \frac{dz}{dt} B$$

**1.b)** Equation mécanique :

L'équipage mobile est soumis :

à son poids (orthogonale à  $Oz$ ),

à la réaction du support (qui compense le poids, donc orthogonale à  $Oz$ ),

à l'action du spider et de la suspension périphérique (ressorts de constante de raideur totale  $k$ ) :  $\vec{F}_r = -kz \vec{e}_z$ ,

à la force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$ ,

à la force de Laplace  $\vec{F} = i(t) \ell B \vec{e}_z$ .

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'équipage mobile projeté suivant l'axe  $Oz$  s'écrit donc :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + h \frac{dz}{dt} + kz = -i(t) \ell B$$

**2)** En régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ ,

**2.a)** la précédente relation devient :

$$(-m\omega^2 + j\omega h + k) z = -\ell B i$$

et la première

$$\underline{u} = (R + jL\omega) \underline{i} - j\omega \ell B z$$

**2.b)** En éliminant l'élongation complexe  $z = -\frac{\ell B i}{k - m\omega^2 + j\omega h}$ , on trouve

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = (R + jL\omega) + \frac{j\omega \ell^2 B^2}{k - m\omega^2 + j\omega h}$$

On trouve la relation

$$\underline{Z}_m = \frac{j\omega \ell^2 B^2}{k - m\omega^2 + j\omega h} = \frac{\ell^2 B^2}{\frac{k}{j\omega} - \frac{m\omega}{j} + h} = \frac{\frac{\ell^2 B^2}{h}}{1 + j\frac{m\omega}{h} - j\frac{k}{h\omega}} = \frac{\frac{\ell^2 B^2}{h}}{1 + j\frac{\sqrt{km}}{h} \left( \omega \sqrt{\frac{m}{k}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\omega} \right)}$$

On voit que le haut-parleur est équivalent à une association en série d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$  et d'un dipôle d'impédance complexe  $\underline{Z}_m$  :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m = R + jL\omega + \frac{R_m}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

pour peu que :

$$R_m = \frac{\ell^2 B^2}{h}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

**2.c)** Reste à déterminer l'équivalent électrique du dipôle d'impédance complexe  $\underline{Z}_m$ .

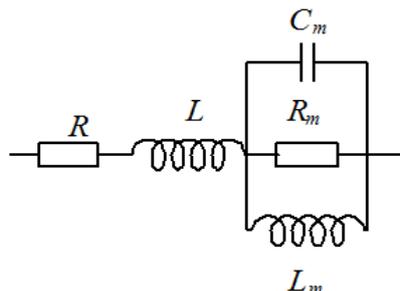
Il est plus simple de raisonner en admittance

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{\frac{k}{j\omega} - \frac{m\omega}{j} + h}{\ell^2 B^2} = \frac{k}{\ell^2 B^2 j\omega} + j\omega \frac{m}{\ell^2 B^2} + \frac{h}{\ell^2 B^2} = \frac{1}{jL_m \omega} + jC_m \omega + \frac{1}{R_m}$$

si on pose :

$$R_m = \frac{\ell^2 B^2}{h}, \quad C_m = \frac{m}{\ell^2 B^2} \quad \text{et} \quad L_m = \frac{\ell^2 B^2}{k}$$

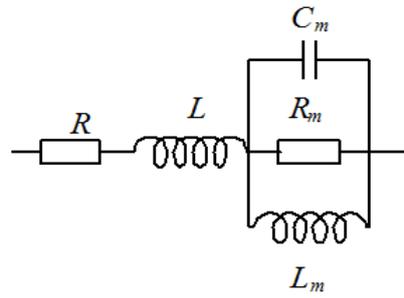
Le schéma équivalent est donné ci-dessous :



Éléments de correction :

$$R_m = \frac{\ell^2 B^2}{h}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{h}.$$

Le schéma équivalent est donné ci-dessous :



# Les techniques mathématiques à connaître

## Découpler des équations différentielles

### Position du problème :

Il s'agit de déterminer la solution des équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$

où  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$  sont des coefficients constants. On fait apparaître cela sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Méthode matricielle :

On peut diagonaliser la matrice et en chercher les valeurs propres et les vecteurs propres, c'est-à-dire se ramener à

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dont on connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{a'_{11} t} \\ y'(t) = C_2 e^{a'_{22} t} \end{cases}$$

### ■ Exemple :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a pour vecteurs propres :

$$\begin{cases} x' = x + j y \\ y' = y + j x \end{cases}$$

en effet :

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + j \dot{y} = a y - j a x = j a (x + j y) = j a x' \\ \dot{y}' = \dot{y} + j \dot{x} = -a x + j a y = j a (y + j x) = j a y' \end{cases}$$

On connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{j a t} \\ y'(t) = C_2 e^{j a t} \end{cases}$$

Il faut ensuite revenir à la première base :

$$\begin{cases} x = \frac{x' - j y'}{2} = \frac{C_1 - j C_2}{2} e^{j a t} \\ y = \frac{x' + j y'}{2j} = \frac{C_1 + j C_2}{2j} e^{j a t} \end{cases}$$

### Méthode de la re-dérivation :

On peut dériver à nouveau le système :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{11} \dot{x} + a_{12} \dot{y} = a_{11} (a_{11} x + a_{12} y) + a_{12} (a_{21} x + a_{22} y) \\ \ddot{y} = a_{21} \dot{x} + a_{22} \dot{y} = a_{21} (a_{11} x + a_{12} y) + a_{22} (a_{21} x + a_{22} y) \end{cases}$$

avec un peu de chance, s'il y a des coefficients nuls dans la matrice, il peut y avoir des simplifications.

### ■ Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{12} a_{21} x \\ \ddot{y} = a_{21} a_{12} y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\text{si } a_{12} a_{21} > 0 : \begin{cases} x(t) = C_1 e^{\sqrt{a_{12} a_{21}} t} \\ y(t) = C_2 e^{\sqrt{a_{12} a_{21}} t} \end{cases} \quad \text{si } a_{12} a_{21} < 0 : \begin{cases} x(t) = C_1 e^{j \sqrt{-a_{12} a_{21}} t} \\ y(t) = C_2 e^{j \sqrt{-a_{12} a_{21}} t} \end{cases}$$

# Technique à maîtriser

jeudi 1er février 2018

## I- Les capacités exigibles

### 1. Généralités sur l'électromagnétisme



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Exprimer  $\rho$  et  $\vec{j}$  en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique.

Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation (admise) en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie.

Exploiter le caractère conservatif du vecteur  $\vec{j}$  en régime stationnaire. Relier ces propriétés aux lois usuelles de l'électrocinétique.

Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Faire le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday utilisée en PCSI.

Utiliser les grandeurs énergétiques pour faire des bilans d'énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l'intensité utilisée en optique.

Discuter la légitimité du régime quasi-stationnaire. Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge et utiliser les formes simplifiées. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.

### 2. Induction électromagnétique



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Évaluer le flux d un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.

Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.

Utiliser la loi de Faraday en précisant les conditions d'algébrisation.

Évaluer et connaître l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.

Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.

Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale », le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.

### 3. Forces électromagnétiques



#### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Déduire du modèle (force  $\frac{-m\vec{v}}{\tau}$ ) un ordre de grandeur de  $\tau$  et en déduire un critère de validité du modèle en régime variable. Déduire du modèle un ordre de grandeur de  $v$  et en déduire un critère pour savoir s'il convient de prendre en compte un éventuel champ magnétique.

Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie rectangulaire.

Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.

Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.  
Mettre en équation le mouvement dans un champ électrostatique homogène ou un champ magnétostatique homogène. Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.

## II- Méthodes

### 1. Généralités sur l'électromagnétisme

#### A) Simplification des équations dans l'ARQS *méthode*

- Conservation de la charge :  $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$  dans l'ARQS,
- "Maxwell Flux" :  $\text{div} \vec{B} = 0$ ,
- "Maxwell Gauss" :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \approx 0$  dans l'ARQS,
- "Maxwell Faraday" :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ,
- "Maxwell Ampère" :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \cdot \vec{j}$  dans l'ARQS.

### 2. Induction électromagnétique

#### B) Induction dans un fil électrique *méthode*

La force électromotrice ("fém") d'induction qui correspond à ce circuit filiforme, orientée dans le sens de  $C$  est :

$$e_{em} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{où} \quad \phi = \iint \vec{B} \cdot d^2 \vec{S}$$

est le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  qui s'appuie sur le contour fermé orienté  $C$  et qui est orientée par lui.

Attention de ne pas oublier de multiplier par le nombre de spires du contour.

### 3. Forces électromagnétiques

#### C) Interaction dans un conducteur ohmique *méthode*

On prend comme système un électron. Il subit :

- l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau fixe (les ions) sous la forme d'une force phénoménologique de la forme  $\frac{-m\vec{v}}{\tau}$  où  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation des électrons ;
- l'action du champ électromagnétique sous la forme de la force de Lorentz :  $-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$ .
- le poids est négligeable.

La densité volumique de courant peut s'écrire  $\vec{j} = n_e (-e) \vec{v}_e$ .

#### D) Mouvements de particules chargées *méthode*

Pour les mouvement dans un champ  $\vec{E}$ , tout se passe comme dans le cas de la chute libre.

Pour les mouvement dans un champ  $\vec{B}$ , il faut utiliser le théorème de l'énergie cinétique et le repère de Frénet.

Pour les mouvement dans un champ  $\vec{E}$  et un champ  $\vec{B}$ , il faut se placer dans le référentiel où le champ

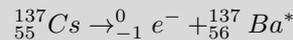
$\vec{E}$  est nul.

### III- Exercices

#### 1. Généralités sur l'électromagnétisme

##### 1.1) Noyau radioactif $\beta^-$

On considère une source (très petite, en  $O$ , centre d'un repère sphérique), de césium 137 radioactif  $\beta^-$  :



Son activité (nombre de désintégration par seconde) est  $A = 0,185\text{MBq}$ .

1) Quelle est l'intensité  $I$  qui traverse une sphère de centre  $O$ ? Application numérique.

2) Exprimer dans le repère sphérique la densité volumique de courant  $\vec{j}$ . Que vaut numériquement  $|\vec{j}|$  à  $r = 10\text{cm}$  de la source?

1)  $I = A \cdot q_e = -3,0 \cdot 10^{-14} \text{A}$ .

2)  $I = \oiint \vec{j} \cdot d^2\Sigma \Rightarrow \vec{j} = \frac{q_e \cdot A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \vec{e}_r$ .  $r = 10\text{cm} \Rightarrow |\vec{j}| = 2,4 \cdot 10^{-13} \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

##### 1.2) Feuille d'aluminium chargée

Soit une feuille d'aluminium de format  $A4$  ( $21\text{cm}$  sur  $29,7\text{cm}$ ) à laquelle on a arraché 1000 électrons.

1) Quelle est la charge surfacique  $\sigma$  portée par la feuille d'aluminium? Application numérique.

1)  $\sigma = +2,6 \cdot 10^{-15} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ .

##### 1.3) Fil électrique

Soit un fil électrique en cuivre, cylindrique, de rayon  $R_0 = 3,0\text{mm}$  dans lequel circule un courant électrique homogène d'intensité  $I = 10\text{A}$ , vers les  $z$  négatifs dans le repère cylindrique associé au fil.

1) Exprimer dans ce repère la densité volumique de courant  $\vec{j}$ . Que vaut numériquement  $|\vec{j}|$ ?

1)  $\vec{j} = \frac{-I}{\pi \cdot R_0^2} \vec{e}_z$ , donc  $|\vec{j}| = 3,5 \cdot 10^6 \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

##### 1.4) Conduction électrique dans un ruban d'aluminium

Soit un ruban de papier d'aluminium de largeur  $L_0 = 1,0\text{cm}$  (suivant la direction  $y$  d'un repère cartésien) dans lequel circule un courant électrique homogène d'intensité  $I = 10\text{mA}$  vers les  $x$  positifs.

1) Exprimer dans ce repère la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ . Que vaut numériquement  $|\vec{j}_s|$ ?

1)  $\vec{j}_s = \frac{I}{L_0} \vec{e}_x$ , donc  $|\vec{j}_s| = 0,10 \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

##### 1.5) Vitesse des électrons dans le cuivre

Le cuivre a pour masse molaire  $M = 63,54\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , et pour masse volumique  $\mu = 8,9\text{kg/L}$ . On donne le nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$  et la charge fondamentale :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ .

1) Calculer la densité volumique  $n$  des atomes de cuivre.

2) En admettant que chaque atome de cuivre libère un électron assurant la conduction, calculer la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  de ces électrons libres correspondant à un courant  $I = 0,50\text{A}$  circulant dans un fil de section droite de rayon  $a = 1,0\text{cm}$ .

- 1)  $n = \frac{\mu \cdot N_A}{M} = 8,4 \cdot 10^{28} m^{-3}$ .
- 2)  $\langle v \rangle = \frac{I}{\pi \cdot a^2 \cdot n \cdot e} = 1,2 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-1}$ .

### 1.6) Courant évanescant

Supposons que dans un demi-espace  $z > 0$ , la densité volumique de courants soit donnée par  $\vec{j} = j_0 \cdot e^{-\frac{z}{h}} \cdot \vec{e}_x$ , où  $h$  est une constante.

1) Intensité élémentaire :

1.a) Quelle est l'intensité élémentaire  $dI(z_1, z_2)$  qui traverse la surface élémentaire orientée dans le sens des  $x$  croissants, pour  $y \in [0; dy]$  et  $z \in [z_1; z_2]$  ?

1.b) Calculer  $dI(0, z)$

1.c) En déduire  $dI(0, \infty)$ .

1.d) Pour quelle valeur  $z_0$  de  $z$  a-t-on  $dI(0, z_0) = 0,90 \cdot dI(0, \infty)$  ? Commenter ce résultat.

2) Densité surfacique de courant :

2.a) Dans quelle limite est on confronté à une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  ?

2.b) Exprimer alors  $\vec{j}_s$ .

Limite de la densité surfacique de courants :  $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \vec{j}_s = j_0 \cdot h \cdot \vec{e}_x$ . NB : alors  $j_0 \rightarrow \infty$ .

### 1.7) Distribution volumique de charge dans l'atome d'hydrogène

Dans la théorie quantique, l'électron de l'atome d'hydrogène n'est pas localisé : il s'agit d'un nuage électronique. Ainsi, si l'on exclu le proton (en  $O$ , centre de l'atome), la distribution volumique de charge dans l'atome d'hydrogène est à symétrie sphérique et ne dépend que de la distance  $r$  à  $O$  : peut

$$\rho(r) = C \cdot e^{-\frac{2 \cdot r}{a_0}}$$

où  $a_0 = 52,9 pm$  est le rayon de Bohr.

1) Quelle est la probabilité  $p_1(r, \theta, \varphi)$  de trouver l'électron en  $M(r, \theta, \varphi)$  ?

2) Quelle est la probabilité  $p_2(r)$  de trouver l'électron à une distance  $r$  de  $O$  ?

3) A quelle distance  $r_{max}$  a-t-on le plus de chance de trouver l'électron ?

4) Calculer la constante  $C$ . Application numérique

$$1) p_1(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho(r)}{-e} = \frac{C \cdot e^{-\frac{2 \cdot r}{a_0}}}{-e}$$

$$2) p_2(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2 \cdot \pi} \frac{\rho(r) \cdot dr \cdot r \cdot d\theta \cdot r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi}{-e} = \frac{4 \cdot \pi \cdot C \cdot r^2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot r}{a_0}}}{-e}$$

$$3) \frac{dp}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = r_{max} = a_0$$

$$4) \int_{r=0}^{\infty} p(r) \cdot dr = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{e}{\pi \cdot a_0^3} = -3,4 \cdot 10^{12} C \cdot m^{-3}$$

### 1.8) Détermination du bilan d'énergie locale à partir des équation de Maxwell

1) Vérifier que le bilan énergétique local pour le champ électromagnétique est donné par les équations de Maxwell.

1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\vec{rot} \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \\ div \vec{\Pi} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \vec{rot} \left( \vec{E} \right) - \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \vec{rot} \left( \vec{B} \right) \end{array} \right.$$

donc :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} + div \vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{rot} \left( \vec{E} \right) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'après Maxwell Faraday. Or

$$-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**1.9) Des "charges" magnétiques**

- 1) Par analogie avec l'équation de Maxwell Gauss,
  - 1.a) définir une densité de "charge" magnétique  $\rho_m$  ;
  - 1.b) montrer que  $\rho_m = 0$ .

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \rho_m = 0.$$

**1.10) Un champ électrique orthoradial**

- 1) Est-ce qu'un champ orthoradial ( $C_\theta \vec{e}_\theta$  en cylindrique) peut être un champ électrique  $\vec{E}$  :
  - 1.a) en régime permanent ?
  - 1.b) en régime non permanent ?

Le champ électrique peut être orthoradial *a priori*.

**1.11) Courants électriques et courants de déplacement**

On se place dans un milieu ohmique de conductivité  $\gamma$  ( $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ ), en régime sinusoïdal forcé de fréquence  $\nu$ .

- 1) Montrer que  $|\vec{j}| > |\vec{j}_d|$  pour peu que  $\nu < \nu_{max}$ . Exprimer  $\nu_{max}$  en fonction de  $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} SI$  et  $\gamma$ .
- 2) Application numérique :
  - 2.a) dans le cas du cuivre ( $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 S \cdot m^{-1}$ );
  - 2.b) dans le cas de l'eau ( $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-9} S \cdot m^{-1}$ ).

$$\begin{aligned} 1) \text{ Courants électriques : } |\vec{j}| &= \gamma |\vec{E}| \\ \text{Courants de déplacement : } |\vec{j}_d| &= 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{E}| \\ \text{Donc } |\vec{j}| > |\vec{j}_d| &\Leftrightarrow \nu < \nu_{max} \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\nu_{max} = \frac{\gamma}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}$$

- 2) Application numérique :
  - 2.a) dans le cas du cuivre  $\nu_{max} = 1,0 \cdot 10^{18} Hz$  ;
  - 2.b) dans le cas de de l'eau  $\nu_{max} = 18 Hz$ .

**2. Induction électromagnétique****2.12) Cadre fixe dans un champ magnétique homogène et variable**

Soit un champ magnétique homogène et variable  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_z$ .

On s'intéresse à un cadre conducteur rectangulaire  $ABCD$  dans le plan  $(xOy)$ . Les longueurs de ses côtés sont  $a$  suivant  $AD$  et  $BC$  et  $b$  suivant  $AB$  et  $CD$ .

- 1) Calculer la f.e.m. induite dans le cadre.

1) On calcule la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant la loi de Faraday :  $e = -\frac{d}{dt}\phi$ , avec  $\phi = B_0 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Soit :

$$e = \omega \cdot B_0 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

**2.13) Bobine plongée dans un champ magnétique variable inhomogène**

On se place dans un repère cylindrique d'axe  $Oz$ .

Une bobine constituée de  $N$  spires circulaires, de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$ , est plongée dans un champ magnétique variable inhomogène

$$\vec{B} = B_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot r}{2 \cdot R}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \vec{e}_z$$

- 1) Calculer le flux du champ magnétique  $\Phi(t)$  à travers la bobine.
- 2) En déduire la f.e.m  $e(t)$  induite.

- 1)  $\Phi(t) = \frac{8 \cdot (\frac{\pi}{2} - 1)}{\pi} R^2 \cdot N \cdot B_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ .
- 2)  $e(t) = \frac{8 \cdot (\frac{\pi}{2} - 1)}{\pi} R^2 \cdot N \cdot \omega \cdot B_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

### 2.14) Cadre tournant dans un champ magnétique homogène et permanent

Soit un champ magnétique homogène et permanent  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ .

On s'intéresse à un cadre conducteur rectangulaire  $ABCD$ . Les longueurs de ses côtés sont  $a$  suivant  $AD$  et  $BC$  et  $b$  suivant  $AB$  et  $CD$ . Ce cadre tourne autour de l'axe  $AD = (Ox)$ . On repère sa rotation par l'angle  $\theta = (\vec{u}_z, AB)$ .

- 1) Calculer la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant :
  - 1.a) la loi de Faraday ;
  - 1.b) la circulation du champ électromoteur.

- 1) On calcule la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant :
  - 1.a) la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ , avec  $\phi = B_0 \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$ . Soit :

$$e = -\frac{d\theta}{dt} B_0 \cdot a \cdot b \cdot \cos \theta$$

1.b) la circulation du champ électromoteur :  $e = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$  avec  $\vec{E}_{em} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Soit  $e = \int_{BC} \left( b \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta \wedge \vec{B} \right) \cdot dx \vec{u}_x$ , les intégrales sur les autres côtés étant nulles.  $e = \int_{BC} b \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot B_0 \cdot (-\cos \theta) \cdot dx$ .  
On retrouve donc bien :

$$e = -\frac{d\theta}{dt} B_0 \cdot a \cdot b \cdot \cos \theta$$

### 2.15) Déplacement d'une barre conductrice sur deux rails conducteurs parallèles

On se place dans un repère cartésien orthogonal direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $\vec{u}_z$  vers le haut.

Deux tiges conductrices  $AB$  et  $A'B'$  sont placées parallèlement ( $AB // A'B' // (Ox)$ ) dans un plan horizontal ; elles sont distantes de  $AA' = 15cm$ .

On déplace une barre conductrice  $CC'$  qui reste parallèle à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$ , avec  $v_0 = 50cm \cdot s^{-1}$ .

Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical, uniforme et constant  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$ , avec  $B_a = 0,10T$ .

- 1) Quelle est la f.e.m  $e$  qui apparaît entre  $A$  et  $A'$  ?

Entre  $A$  et  $A'$  se trouve un conducteur ohmique, de résistance  $R = 1,0k\Omega$  (la résistance des tiges étant négligeable).

- 2) Quelle est la puissance  $P$  dissipée par ce résistor ?

- 1)  $|e| = v_0 \cdot B_a \cdot AA' = 7,5mV$ .
- 2)  $P = \frac{e^2}{R} = \frac{(v_0 \cdot B_a \cdot AA')^2}{R} = 56nW$ .

### 2.16) Déplacement d'une barre conductrice sur deux rails conducteurs concourants

On se place dans un repère cartésien orthogonal direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $\vec{u}_z$  vers le haut.

Deux tiges conductrices  $OA$  et  $OA'$  sont placées dans un plan horizontal ; elles ont pour médiatrice l'axe  $(Ox)$  et font un angle  $\alpha = (\vec{OA}, \vec{u}_x) = (\vec{u}_x, \vec{OA'})$  avec lui.

On déplace une barre conductrice parallèlement à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$ , avec  $v_0 > 0$ . Cette barre est en contact avec la tige  $OA$  (respectivement  $OA'$ ) en  $B$  (respectivement en  $B'$ ). A  $t = 0$ ,  $B = B' = O$ .

1) Exprimer, à l'instant  $t$ , en fonction de  $\alpha$  et  $v_0$  :

- 1.a) la circonférence  $C(t)$  du circuit ;  
 1.b) l'aire  $S(t)$  du circuit.

Les conducteurs composant le circuit ont une résistance linéique  $R_l$ . Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical, uniforme et constant  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$ , avec  $B_a > 0$ .

2) Exprimer, en fonction de  $B_a$ ,  $v_0$ ,  $R_l$  et de  $\alpha$  :

- 2.a) la valeur absolue de la f.e.m  $|e(t)|$  qui apparaît dans le circuit ;  
 2.b) la valeur absolue de l'intensité  $|i(t)|$  qui circule dans le circuit.

1) Circuit :

- 1.a) circonférence  $C(t) = 2 \cdot v_0 \cdot t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$  ;  
 1.b) aire  $S(t) = (v_0 \cdot t)^2 \cdot \tan \alpha$ .

2) Induction :

- 2.a) f.e.m  $|e(t)| = 2 \cdot v_0^2 \cdot B_a \cdot \tan(\alpha) \cdot t$  ;  
 2.b) intensité  $|i(t)| = \frac{v_0 \cdot B_a}{R_l} \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .

### 2.17) Un aimant qui s'approche d'une bobine

On s'intéresse à une bobine formée de  $N$  spires, de longueur  $\ell$ , d'axe  $Oz$  qu'on assimilera à un solénoïde quasi infini. On oriente la bobine de telle sorte que  $\vec{d^2S} = +d^2S \cdot \vec{u}_z$ . Un aimant (de moment dipolaire  $\vec{m} = +m \cdot \vec{u}_z$ ) crée un champ magnétique principalement suivant  $\vec{u}_z$  ( $B_z > 0$ ). On approche cet aimant de la bobine.

1) Montrer que le courant  $i$  qui circule dans la bobine est négatif.

2) Montrer que le flux du champ magnétique induit tend (en partie) à contrarier ce qui lui a donné naissance (à savoir l'augmentation du flux du champ magnétique de l'aimant).

1)

- Le flux du champ magnétique  $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{d^2S}$  à travers celle-ci va augmenter.
- $\frac{d\phi}{dt} > 0$  induit une fém  $e < 0$ , donc un courant  $i = \frac{e}{R}$  négatif ;

2)

- ce courant induit  $i$  crée à son tour un champ magnétique induit  $\vec{B}_i \approx \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\ell} \vec{u}_z$  ;
- le champ magnétique induit  $\vec{B}_i \approx \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i}{\ell} \vec{u}_z$  est opposé à  $\vec{u}_z$  (puisque  $i < 0$ ) ;
- donc que son flux  $\iint_S \vec{B}_i \cdot \vec{d^2S}$  est négatif.

Aussi, le flux du champ magnétique induit tend (en partie) à contrarier ce qui lui a donné naissance (à savoir l'augmentation du flux du champ magnétique de l'aimant).

### 2.18) Auto-induction dans un solénoïde

On considère un solénoïde cylindrique, d'axe  $Oz$ , de longueur  $l$  (mais supposé quasi-infini), de rayon  $R$ , comportant  $N$  tours de fil.

On suppose que circule un courant  $i(t)$  variable dans la bobine.

1) Quel est le champ magnétique créé par le courant  $i$  à travers la bobine ?

2) Utilisation du flux :

- 2.a) Quel est le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers la bobine ?  
 2.b) En déduire la self  $L$  de la bobine.

3) Utilisation de l'énergie :

- 3.a) Quel est l'énergie magnétique  $E_m$  dans la bobine ?  
 3.b) En déduire la self  $L$  de la bobine.

1) A l'extérieur, le champ est nul, et à l'intérieur,  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} i(t) \cdot \vec{u}_z$ .

2) Utilisation du flux :

- 2.a)  $\Phi(t) = N \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} i(t)$ .  
 2.b)  $\Phi(t) = L \cdot i(t) \Rightarrow L = \pi \cdot R^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l}$ .

3) Utilisation de l'énergie :

- 3.a)  $E_m = \frac{1}{2}\pi.R^2.\mu_0.\frac{N^2}{l}i(t)^2$ .  
 3.b)  $E_m = \frac{1}{2}L.i^2 \Rightarrow L = \pi.R^2.\mu_0.\frac{N^2}{l}$

### 2.19) Inductance propre d'un tore à section circulaire

On se place dans un repère cylindrique d'axe  $(Oz)$ .

On considère un tore d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$ , composé de  $N$  spires de section circulaire, de rayon  $a \ll R$ .

- 1) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le tore si y circule un courant  $I$ .
- 2) En déduire l'inductance propre  $L$  de ce tore
  - 2.a) grâce au calcul du flux  $\Phi$ ;
  - 2.b) grâce au calcul de l'énergie magnétique  $E_m$ .

- 1)  $\vec{B} = \mu_0.\frac{N.I}{2.\pi.R}\vec{u}_\theta$  dans le tore.
- 2) Inductance propre  $L$  :
  - 2.a) grâce au calcul du flux  $\Phi = N.\pi.a^2.\mu_0.\frac{N.I}{2.\pi.R} = L.I \Rightarrow L = \frac{\mu_0.N^2.a^2}{2.R}$ ;
  - 2.b) grâce au calcul de l'énergie magnétique  $E_m = \frac{1}{2}\mu_0.\frac{N^2.I^2}{4.\pi^2.R^2}\pi.a^2.2.\pi.R = \frac{1}{2}L.I^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0.N^2.a^2}{2.R}$ .

### 2.20) Inductance propre d'une ligne bifilaire

On se place dans un repère cartésien  $(Oxyz)$ .

Un fil électrique habituel est constitué de deux fils  $f$  et  $f'$  dans lesquels circulent des courants opposés : c'est une "ligne bifilaire".

Supposons que  $f$  et  $f'$  sont deux cylindres de rayon  $a$ , d'axes parallèles à  $(Oz)$ , situés dans le plan  $(xOz)$  et distants de  $D > a$  :

- dans  $f$ , d'abscisse  $x = \frac{D}{2}$  circule  $+I$  dans la direction de  $\vec{u}_z$ ;
  - dans  $f'$ , d'abscisse  $x = -\frac{D}{2}$  circule  $-I$  dans la direction de  $\vec{u}_z$ .
- 1) Quel est le champ magnétique  $\vec{B}(x \in [-\frac{D}{2} + a; \frac{D}{2} - a], y = 0, z)$  en un point du plan  $(xOz)$  compris entre les deux fils ?
  - 2) Calculer le flux  $\Phi$  de ce champ à travers la surface rectangulaire du plan  $(xOz)$  définie par deux tronçons de fils de longueur  $l_0$ .
  - 3) En déduire l'inductance propre linéique  $L_l$  de la ligne bifilaire.

- 1)  $\vec{B}(x, y = 0, z) = \frac{\mu_0.I}{2.\pi} \left( \frac{1}{\frac{D}{2}-x} + \frac{1}{\frac{D}{2}+x} \right) .\vec{u}_y$ .
- 2)  $\Phi = l_0 \frac{\mu_0.I}{\pi} \ln \left( \frac{D-a}{a} \right)$ .
- 3)  $L_l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{D-a}{a} \right)$ .

### 2.21) Caractéristiques électrocinétiques d'un transformateur

- 1) Montrer que la tension aux bornes du primaire est

$$u_1 = R_1.i_1 + L_1.\frac{di_1}{dt} + M.\frac{di_2}{dt}$$

où  $M$  est l'inductance mutuelle entre  $C_1$  et  $C_2$ .

- 2) De même, montrer que la tension aux bornes du secondaire est

$$u_2 = R_2.i_2 + L_2.\frac{di_2}{dt} + M.\frac{di_1}{dt}$$

- 1) Le premier circuit,  $C_1$ , est un bobinage de  $N_1$  spires, de résistance  $R_1$ , d'inductance propre  $L_1$ .  $C_1$  se comporte comme un fil, c'est à dire une résistance  $R_1$  en série avec une fém d'induction

$$e_1 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 1}}{dt} = -\frac{d\phi_{1\rightarrow 1}}{dt} - \frac{d\phi_{2\rightarrow 1}}{dt}$$

Or le flux à travers le primaire est

$$\phi_{\rightarrow 1} = \phi_{1\rightarrow 1} + \phi_{2\rightarrow 1} = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2$$

Donc la tension aux bornes du primaire est

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

où  $M$  est l'inductance mutuelle entre  $C_1$  et  $C_2$ .

2)  $C_2$  se comporte comme un fil, c'est à dire une résistance  $R_2$  en série avec une fém d'induction

$$e_2 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 2}}{dt} = -\frac{d\phi_{1\rightarrow 2}}{dt} - \frac{d\phi_{2\rightarrow 2}}{dt}$$

Or le flux à travers le secondaire est

$$\phi_{\rightarrow 2} = \phi_{1\rightarrow 2} + \phi_{2\rightarrow 2} = M \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2$$

Le deuxième circuit,  $C_2$ , est un bobinage de  $N_2$  spires, de résistance  $R_2$ , d'inductance propre  $L_2$ . La tension à ses bornes est

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

## 2.22) Caractéristiques d'un transformateur idéal

On s'intéresse à un transformateur idéal.

- 1) En supposant que le secondaire est à vide, montrer que  $\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$ .
- 2) De même, montrer que  $\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$ .
- 3) En déduire que  $k = 1$ .
- 4) Montrer que  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .
- 5) Montrer aussi que  $\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$ .

1) Aussi,  $\frac{\phi_{\rightarrow 1}}{\phi_{\rightarrow 2}} = \frac{N_1}{N_2}$ . En supposant que le secondaire est à vide ( $i_2 = 0$ ),  $\phi_{\rightarrow 2} = M \cdot i_1$  et  $\phi_{\rightarrow 1} = L_1 \cdot i_1$ . On trouverait dans ce cas  $\frac{\phi_{\rightarrow 1}}{\phi_{\rightarrow 2}} = \frac{L_1}{M}$ . Or cette relation ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du transformateur, elle est toujours valable :  $\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$ .

2) Si on mène un raisonnement identique en intervertissant primaire et secondaire, on trouverait :  $\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$ .

3) Aussi, on a montré que

$$\frac{M}{L_1} \frac{M}{L_2} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow k = 1$$

4)

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

soit  $\frac{di_2}{dt} = \frac{u_1}{M} - \frac{L_1}{M} \frac{di_1}{dt}$ , qu'on reporte dans la seconde équation :

$$u_2 = \frac{L_2}{M} u_1 - \frac{L_1 \cdot L_2}{M} \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{M} u_1 + M \cdot \frac{di_1}{dt} \left( 1 - \frac{L_1 \cdot L_2}{M^2} \right) = \frac{L_2}{M} u_1$$

car  $k = 1$ . Or, on a montré que  $\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$ .

5) La puissance électrique au primaire vaut  $P_1 = u_1 \cdot i_1$ , celle au secondaire  $P_2 = u_2 \cdot i_2$ . La conservation de la puissance (il n'y a ni pertes fer dans le cadre de fer doux, ni pertes cuivre par effet Joule dans les fils car  $R_1 = R_2 = 0$ ), impose

$$u_1 \cdot i_1 = u_2 \cdot i_2 \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

## 2.23) Transformateur abaisseur de tension

On s'intéresse à un transformateur supposé parfait qui comporte  $N_1$  spires au primaire, et  $N_2$  spires au secondaire.

Au primaire, on impose une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U_1 = 25,0kV$ , et on récupère une tension sinusoïdale d'amplitude  $U_2 = 3,32kV$ .

- 1) En déduire le rapport du nombre de spires  $\frac{N_1}{N_2}$  du transformateur.
- On met à la sortie de ce transformateur un transformateur identique.
- 2) Quelle est la tension efficace  $U_3$  à la sortie de cette association ?

- 1)  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1 \cdot \sqrt{2}}{U_2} = 10,7.$
- 2)  $U_3 = \frac{U_2}{\frac{N_1}{N_2} \sqrt{2}} = \frac{U_1}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} = 220V.$

### 3. Forces électromagnétiques

#### 3.24) Justification microscopique de la loi d'Ohm

On s'intéresse à un électron de vitesse  $\vec{v}$  plongé dans un champ électrique  $\vec{E}_0$  et subissant de la part des ions du réseau métallique une force équivalente à une force de frottement fluide  $\vec{f}_{i \rightarrow e} = -\lambda \cdot \vec{v}$ .

- 1) Déterminer la vitesse  $\vec{v}$ .

La densité des électrons est  $n_e$ .

- 2) Montrer que la densité volumique de courant suit la loi d'Ohm locale. On exprimera la conductivité  $\gamma$ .

- 1)  $m_e \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e \cdot \vec{E}_0 - \lambda \cdot \vec{v}$ , donc  $\vec{v} = \frac{-e}{\lambda} \vec{E}_0$ .
- 2)  $\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -e \cdot n \cdot \vec{v}$  car seuls les électrons se déplacent. Ainsi,  $\vec{j} = \frac{n \cdot e^2}{\lambda} \vec{E}_0$ . Donc :  $\gamma = \frac{n \cdot e^2}{\lambda}$ .

#### 3.25) Justification microscopique de l'effet Hall

Soit une plaquette conductrice (de conductivité  $\gamma$ , de densité d'électrons  $n$ ), parallépipédique, de côté  $a$  suivant  $x$ ,  $b$  suivant  $z$  et de longueur  $L$  selon  $y$ . On y fait circuler un courant  $I$ , grâce au champ électrique  $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_x$ .

- 1) Déterminer la vitesse moyenne des électrons en fonction de  $I$  et des caractéristiques de la plaquette.

On applique un champ magnétique  $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_z$ .

- 2) Montrer qu'en régime stationnaire, existe un champ de Hall  $\vec{E}_H$  qu'on déterminera en fonction de  $I$  et  $B$  et des caractéristiques de la plaquette.

- 3) En déduire alors la tension de Hall  $U_H$  d'un bord à l'autre de la plaquette.

- 1) Or  $\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -e \cdot n \cdot \vec{v}$  car seuls les électrons se déplacent. D'autre part  $I = a \cdot b \cdot \vec{j} \cdot \vec{u}_x = -a \cdot b \cdot e \cdot n \cdot \vec{v} \cdot \vec{u}_x$ , aussi

$$\vec{v} = -\frac{I}{n \cdot e \cdot a \cdot b} \vec{u}_x$$

- 2) Le principe fondamental de la dynamique en stationnaire donne :

$$m_e \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = -e \cdot \vec{E}_0 - \lambda \cdot \vec{v} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - e \cdot \vec{E}_H = -e \cdot E_0 \cdot \vec{u}_x - \lambda \cdot v_x \cdot \vec{u}_x - e \cdot v_x \cdot \vec{u}_x \wedge B \cdot \vec{u}_z - e \cdot \vec{E}_H$$

Projeté suivant  $\vec{u}_y$  :

$$\vec{E}_H = v_x \cdot B \cdot \vec{u}_y = -\frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot a \cdot b} \vec{u}_y$$

- 3)  $U_H = \int \vec{E}_H \cdot d\vec{\ell} = E_H \cdot a$  soit

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot b}$$

**3.26) Effet Hall dans une plaquette semiconductrice d'arséniure d'indium**

Une sonde de Hall, à arséniure d'indium ( $InAs$ ), d'épaisseur  $b = 1,0mm$  suivant ( $Oz$ ) et  $a$  suivant ( $Oy$ ) est parcourue par un courant  $I = 15mA$  suivant ( $Ox$ ). On suppose que la conduction est assurée par des électrons libres de charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{19}C$ , de densité  $n_e$ .

- 1) Exprimer la vitesse  $v$  des porteurs de charge en fonction de  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $n_e$  et  $e$ .

Plongée dans un champ magnétique  $B = 66mT$  suivant ( $Oz$ ), la plaquette présente une tension de Hall  $U_H = 1,0mV$  suivant ( $Oy$ ).

- 2) Exprimer la vitesse  $v$  des porteurs de charge en fonction de  $U_H$ ,  $a$ , et  $B$ .

3) En déduire le nombre de porteurs de charge  $n_e$  par unité de volume dans le matériau. Application numérique.

- 1)  $j = n_e \cdot e \cdot v = \frac{I}{a \cdot b}$  donc  $v = \frac{I}{a \cdot b \cdot n_e \cdot e}$ .  
 2)  $F = e \cdot v \cdot B = e \cdot E_H$  avec  $E_H = \frac{U_H}{a}$  donc  $v = \frac{U_H}{a \cdot B}$ .  
 3)  $n_e = \frac{B \cdot I}{U_H \cdot b \cdot e} = 6,2 \cdot 10^{21} m^{-3}$ .

**3.27) Effet Hall dans une plaquette conductrice de cuivre**

Une plaquette de cuivre d'épaisseur  $b = 0,5mm$  suivant ( $Oz$ ) et  $a = 1,5cm$  suivant ( $Oy$ ) est parcouru, selon ( $Ox$ ), par un courant  $I = 60A$ .

On suppose que la conduction est assurée par des électrons libres de charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{19}C$ , de densité  $n_e$  et on donne la conductivité :  $\gamma = 58 \cdot 10^6 S \cdot m^{-1}$  et la constante de Hall du cuivre :  $A_H = \frac{1}{n_e \cdot e} = -5,3 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot C^{-1}$ .

- 1) Exprimer le champ électrique  $E_x$  assurant la conduction.

La plaquette de cuivre est maintenant soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$  avec  $B = 2,5T$ .

- 2) Calculer le champ de Hall  $E_y$ .

3) Quel est l'angle  $\theta$  (qu'on exprimera en degré, minute et secondes) que fait le champ électrique total  $\vec{E}_{tot}$  avec la direction ( $Ox$ ) ?

- 1)  $E_x = \frac{I}{a \cdot b \cdot \gamma} = 0,14V \cdot m^{-1}$ .  
 2)  $E_y = A_H \frac{I \cdot B}{a \cdot b} = 1,1mV \cdot m^{-1}$ .  
 3)  $\tan(\theta) = \frac{E_y}{E_x} = A_H \cdot B \cdot \gamma \Rightarrow \theta = 26'$ .

**3.28) Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme et homogène**

On considère une particule chargée (de charge  $q$ , de masse  $m$ ), ponctuelle, initialement en  $O$  (origine du repère ( $O, x, y, z$ )) avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_{0x} \cdot \vec{u}_x + v_{0y} \cdot \vec{u}_y$ .

- 1) Déterminer sa trajectoire si elle est soumise à un champ électrique homogène et permanent  $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{u}_y$  ;

- 1) La projection du principe fondamental de la dynamique sur les trois axes donne :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dv_y}{dt} = q \cdot E_0 \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = \frac{q \cdot E_0}{m} t + v_{0y} \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t \\ y(t) = \frac{q \cdot E_0}{2 \cdot m} t^2 + v_{0y} \cdot t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole (on peut supprimer le paramètre  $t$ ) :

$$y = \frac{q \cdot E_0}{2 \cdot m \cdot v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x$$

**3.29) Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme et homogène**

On considère une particule chargée (de charge  $q$ , de masse  $m$ ), ponctuelle, initialement en  $O$  (origine du repère ( $O, x, y, z$ )) avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_{0x} \cdot \vec{u}_x + v_{0y} \cdot \vec{u}_y$ .

- 1) Déterminer sa trajectoire si elle est soumise à un champ magnétique homogène et permanent  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_x$  ;

1) Théorème de l'énergie cinétique  $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow E_c = cste$ , par application du théorème de l'énergie cinétique. Soit  $|\vec{v}| = v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$

Mouvement parallèle : la projection du principe fondamental de la dynamique sur  $(Ox)$  donne :  $m \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x(t) = v_{0x} \Rightarrow x(t) = v_{0x} \cdot t$  / Le mouvement suivant l'axe du champ magnétique est donc uniforme.

Mouvement perpendiculaire : la vitesse totale est décomposable  $v_0 = v_{0//} + v_{0\perp}$  en vitesses parallèle :  $v_{0//} = |v_{0x}|$  et perpendiculaire :  $v_{0\perp} = |v_{0y}| = cste$ .

Dans le repère de Frénet, l'accélération normale est  $a_N = \frac{v_{0\perp}^2}{R}$ , où  $R$  est le rayon de courbure de la trajectoire.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans ce repère, on trouve :  $m \cdot a_N = |\vec{f}| \Rightarrow m \frac{v_{0\perp}^2}{R} = |q \cdot v_{0\perp} \cdot \vec{B}|$  soit un rayon de courbure constant :  $R = \frac{m \cdot |v_{0y}|}{|q| \cdot |\vec{B}|}$  / Il s'agit donc d'un cercle, de rayon  $R$ , parcouru à la vitesse  $|v_{0\perp}| = |v_{0y}|$ , en un temps  $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{|q| \cdot |\vec{B}|}$ . Le mouvement total est donc un mouvement hélicoïdal, d'axe parallèle au champ magnétique.

### 3.30) Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique et un champ magnéto-statique uniformes et homogènes et orthogonaux

On considère une particule chargée (de charge  $q$ , de masse  $m$ ), ponctuelle, initialement en  $O$  (origine du repère  $(O, x, y, z)$ ) avec la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_{0x} \cdot \vec{u}_x + v_{0y} \cdot \vec{u}_y$ .

1) Déterminer sa trajectoire si elle est soumise à : un champ électromagnétique homogène et permanent  $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{u}_y$  et  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_x$ .

1) Champ électrique et champ magnétique : il faut changer de référentiel  $R$ , où les champs sont

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_{/R} \\ \vec{E} = \vec{E}_{/R} \end{cases}$$

et se ramener à un référentiel  $R'$  où le champ électrique est nul :

$$\vec{E}_{/R'} = \vec{0}$$

grâce aux formules de changement de référentiel pour le champ électromagnétique :

$$\begin{cases} \vec{B}_{/R} = \vec{B}_{/R'} \\ \vec{E}_{/R} = \vec{E}_{/R'} + \vec{v}_{R/R'} \wedge \vec{B}_{/R'} \end{cases}$$

où  $\vec{v}(M)_{R/R'}$  est la vitesse d'entraînement de  $R$  dans  $R'$ . Pour cela, il suffit d'avoir :

$$\vec{v}_{R/R'} = \frac{E_0}{B_0} \vec{u}_z$$

Dans  $R'$  le mouvement est hélicoïdal, d'axe parallèle au champ magnétique, comme démontré précédemment. Dans  $R$ , le mouvement hélicoïdal, d'axe parallèle au champ magnétique, conjugué à une vitesse de dérive (la vitesse d'entraînement de  $R$  dans  $R'$ ).

### 3.31) Cyclotron de Lawrence

Le premier cyclotron fut construit en 1932 par Lawrence à Berkeley (Californie). L'appareil avait un rayon  $R = 14cm$  et communiquait à des protons (de charge  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$  et de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}kg$ ) une énergie cinétique  $E_c = 1,2MeV$ . La différence de potentiel était  $\Delta V = 4000V$  au moment du passage du faisceau entre les dees.

1) Quelles étaient :

- 1.a) la vitesse maximum des protons ?
- 1.b) la tension accélératrice qu'il aurait fallu utiliser pour leur communiquer cette vitesse ?
- 1.c) la fréquence du champ accélérateur ?
- 1.d) le nombre de tours décrits par les protons ?
- 1.e) le champ magnétique ?

1) On détermine :

- 1.a) la vitesse maximum :  $v_{max} = \sqrt{\frac{2.E_c}{m}} = 1,52.107m.s^{-1}$   
 1.b) la tension accélératrice qu'il aurait fallu utiliser :  $U = \frac{E_c}{m} = 1,2MV$   
 1.c) la fréquence du champ accélérateur :  $f = \frac{v_{max}}{2.\pi.R} = 17,3MHz$   
 1.d) le nombre de tours décrits par les protons :  $n = \frac{E_c}{2.e.\Delta V} = 150tours$   
 1.e) le champ magnétique :  $B = \frac{2.\pi.m.f}{e} = 1,13T$ .

### 3.32) Expérience de J.J.Thomson (1897)

1) Un faisceau d'électrons homocinétiques de vitesse  $\vec{v} = v_0.\vec{u}_z$  est détecté sur un écran (plan  $xOy$ ) en  $O$ . Il transite dans une zone  $Z$  qui a une taille  $a$  le long de l'axe  $Oz$ , petite devant la distance  $D$  entre l'écran et  $Z$ .

1.a) Déterminer le temps  $\Delta t$  pendant lequel le faisceau transite dans  $Z$ .

2) On dévie ce faisceau d'électrons à l'aide d'un champ électrique  $\vec{E} = -E_0.\vec{u}_y$  régnant dans  $Z$ , uniforme et indépendant du temps, et on mesure la déviation  $y$  du spot sur l'écran.

2.a) Déterminer la projection de la vitesse  $\Delta v_y$  suivant  $\vec{u}_y$  des électrons au sortir de  $Z$ , en fonction de  $y$ ,  $D$  et  $v_0$ .

2.b) De même, déterminer  $\Delta v_y$  en fonction de  $\frac{e}{m}$ ,  $E_0$  et  $\Delta t$ .

3) Enfin, on établit en plus dans  $Z$  un champ magnétique  $\vec{B} = B_0.\vec{u}_x$ , uniforme et indépendant du temps. On règle la valeur de  $B_0$  de manière à ce que le spot soit ramené en  $O$ .

3.a) Exprimer alors l'expression de  $B_0$  en fonction de  $E_0$  et  $v_0$ .

3.b) En déduire l'expression de la charge massique  $\frac{e}{m}$  de l'électron en fonction des grandeurs intervenant dans l'expérience :  $y$ ,  $a$ ,  $D$ ,  $B_0$  et  $E_0$ .

1) Transit dans  $Z$

1.a)  $\Delta t = \frac{a}{v_0}$ .

2) Champ électrique  $\vec{E} = -E_0.\vec{u}_y$  :

2.a)  $\Delta v_y = \frac{y.v_0}{D}$ .

2.b)  $\Delta v_y = \frac{e}{m}E_0.\Delta t$ .

3) Champ magnétique  $\vec{B} = B_0.\vec{u}_x$  et champ électrique  $\vec{E} = -E_0.\vec{u}_y$  :

3.a)  $B_0 = \frac{E_0}{v_0}$ .

3.b) En remplaçant, on trouve :

$$\frac{e}{m} = \frac{y.E_0}{D.a.B_0^2}$$

### 3.33) Spectrographe de Bainbridge

Dans le spectrographe de Bainbridge, les ions de masse  $m$  et de charge  $q$  sortant d'un ioniseur sont préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue  $U = 10kV$  qui leur impose une vitesse  $\vec{v} = v_0.\vec{u}_z$ .

1) Déterminer la vitesse  $v_0$  du cercle décrit par un ion.

Ils pénètrent ensuite en  $O$  dans une zone ( $z > 0$ ) où règne un champ magnétique  $\vec{B} = B_0.\vec{u}_y$  uniforme et indépendant du temps ( $B_0 = 0,10T$ )

2) Déterminer le rayon  $R$  du cercle décrit par un ion.

3) Deux isotopes viennent impressionner une plaque photographique dans le plan  $xOy$ .

3.a) Déterminer la distance  $x$  séparant les traces laissées par sur la plaque.

3.b) Application numérique pour les isotopes  $^{39}K^+$  et  $^{41}K^+$ .

1)  $v_0 = \sqrt{\frac{2.q.U}{m}}$ .

2)  $R = \frac{m.v_0}{q.B_0}$ .

3) Deux isotopes :

3.a)  $R_1 = \frac{m_1}{q.B_0} \sqrt{\frac{2.q.U}{m_1}} = \sqrt{\frac{2.m_1.U}{q.B_0^2}}$  et  $R_2 = \frac{m_2}{q.B_0} \sqrt{\frac{2.q.U}{m_2}} = \sqrt{\frac{2.m_2.U}{q.B_0^2}}$ . Or  $x = 2.R_2 - 2.R_1$ , donc :

$$x = 2\sqrt{\frac{2.U}{q.B_0^2}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

3.b) Application numérique :  $x = 4,6cm$ .

**3.34) Mesure expérimentale de  $\frac{e}{m}$** 

Des électrons (de masse  $m$  et de charge  $-e$ ) préalablement accélérés par une différence de potentiel  $u = 2,5kV$ , décrivent dans une ampoule où règne un vide poussé une trajectoire circulaire de rayon  $R = 3,3cm$ . Le champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz, est quasi uniforme et sa valeur numérique égale à  $B = 5,1mT$ .

- 1) Exprimer la vitesse  $v_0$  des électrons en fonction de  $m$ ,  $e$  et  $u$ .
- 2) Relier le rayon  $R$  de la trajectoire des électrons à  $v_0$ ,  $m$ ,  $e$  et  $B$ .
- 3) En déduire le rapport  $\frac{e}{m}$  en fonction de  $u$ ,  $R$  et  $B$ .
- 4) Comparer à la valeur théorique :  $e = 1,6.10^{-19}C$  et  $m = 9,1.10^{-31}kg$ .

- 1)  $v_0 = \sqrt{\frac{2.e.u}{m}}$ .
- 2)  $R = \frac{m.v_0}{e.B}$ .
- 3) Expérimentalement :  $\frac{e}{m} = \frac{2.u}{R^2.B^2} = 1,77.10^{11}C.kg^{-1}$ .
- 4) Théoriquement :  $\frac{e}{m} = 1,76.10^{11}C.kg^{-1}$ .

**3.35) Focalisation électrique d'un faisceau homocinétique d'électrons**

Un faisceau homocinétique d'électrons (de masse  $m$  et de charge  $-e$ ) de vitesse  $v_0$  pénètre en  $O$  par une fente supposée très fine dans la région  $y > 0$  où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E.\vec{e}_y$ . Ce faisceau, dans le plan  $(xOy)$  fait un angle  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  avec  $\vec{e}_x$ .

- 1) Déterminer l'équation paramétrique du mouvement :
  - 1.a)  $x(t)$ ;
  - 1.b)  $y(t)$ .
- 2) Déterminer l'abscisse  $x_s$  de la position de sortie  $S$  des électrons de la région  $y > 0$ .  
Le faisceau incident présente maintenant une faible dispersion angulaire  $\Delta\alpha$  ( $\alpha \in [\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}; \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}]$ ).
- 3) Déterminer  $\alpha_0$  pour que tous les électrons soient récupérés en  $S$ .

- 1) Equation paramétrique du mouvement :
  - 1.a)  $x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$ ;
  - 1.b)  $y(t) = v_0.\sin(\alpha).t - \frac{e.E.t^2}{2.m}$ .
- 2)  $x_s = \frac{2.m.v_0^2}{e.E} \sin(\alpha).\cos(\alpha) = \frac{m.v_0^2}{e.E} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .
- 3)  $\frac{dx_s}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ .

**3.36) Focalisation magnétique d'un faisceau homocinétique d'électrons**

Un faisceau homocinétique d'électrons (de masse  $m$  et de charge  $-e$ ) de vitesse  $v_0$  pénètre en  $O$  par une fente supposée très fine dans la région  $y > 0$  où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B.\vec{e}_z$ . Ce faisceau, dans le plan  $(xOy)$  fait un angle  $\alpha \in ]0; \pi[$  avec  $\vec{e}_x$ .

- 1) Déterminer les caractéristiques de la trajectoire circulaire du mouvement :
  - 1.a) son rayon  $R$ ;
  - 1.b) la position de son centre  $C$ .
- 2) Déterminer l'abscisse  $x_s$  de la position de sortie  $S$  des électrons de la région  $y > 0$ .  
Le faisceau incident présente maintenant une faible dispersion angulaire  $\Delta\alpha$  ( $\alpha \in [\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}; \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}]$ ).
- 3) Déterminer  $\alpha_0$  pour que tous les électrons soient récupérés en  $S$ .

- 1) Caractéristiques de la trajectoire circulaire du mouvement :
  - 1.a)  $R = \frac{m.v_0}{e.B}$ ;
  - 1.b)  $x_C = R.\sin(\alpha) = \frac{m.v_0}{e.B} \sin(\alpha)$  et  $y_C = -R.\cos(\alpha) = -\frac{m.v_0}{e.B} \cos(\alpha)$ .
- 2)  $x_s = 2.R.\sin(\alpha) = \frac{2.m.v_0}{e.B} \sin(\alpha)$ .
- 3)  $\frac{dx_s}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**4. Techniques mathématiques - Découplage d'équations différentielles**

**4.37) Découplage d'un système d'équations différentielles par diagonalisation**

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en diagonalisant la matrice.

1) Le système a pour vecteurs propres :

$$\begin{cases} x' = x + j y \\ y' = y + j x \end{cases}$$

en effet :

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + j \dot{y} = a y - j a x = j a (x + j y) = j a x' \\ \dot{y}' = \dot{y} + j \dot{x} = -a x + j a y = j a (y + j x) = j a y' \end{cases}$$

On connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{j a t} \\ y'(t) = C_2 e^{j a t} \end{cases}$$

Il faut ensuite revenir à la première base :

$$\begin{cases} x = \frac{x' - j y'}{2} = \frac{C_1 - j C_2}{2} e^{j a t} \\ y = \frac{x' + j y'}{2j} = \frac{C_1 + j C_2}{2j} e^{j a t} \end{cases}$$

**4.38) Découplage d'un système d'équations différentielles par re-dérivation**

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dot{x} = a y \\ \dot{y} = a x \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ \ddot{y} = a^2 y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{a t} \\ y(t) = C_2 e^{a t} \end{cases}$$

**4.39) Découplage d'un système d'équations différentielles par re-dérivation**

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dot{x} = a y \\ \dot{y} = -a x \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a^2 x \\ \ddot{y} = -a^2 y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{j a t} \\ y(t) = C_2 e^{j a t} \end{cases}$$

**4.40) Découplage d'un système d'équations aux dérivées partielles par re-dérivation**

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

dont les solutions sont :

$$\psi(x, t) = A_+ \exp \left[ j \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] + A_- \exp \left[ j \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right]$$

Même chose pour  $\phi(x, t)$ .

**4.41) Découplage d'un système d'équations aux dérivées partielles par re-dérivation**

1) Trouver la solution en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{D} \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sqrt{D} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = D \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

qui est une équation de diffusion dont les solutions en régime permanent sont :

$$\psi(x) = a x + b$$

Et donc  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$  a pour solution

$$\phi(x) = c$$



## Correction

Soit un fil infini confondu avec  $Oz$  parcouru par un courant  $I(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , courant qu'on cherche à déterminer.

Soit un point  $M$  à l'intérieur de la bobine. Le plan méridien contenant  $M$  et l'axe  $Oz$  est plan de symétrie. Le champ magnétique lui est donc orthogonal : c'est un champ orthoradial. L'invariance par rotation a pour conséquence que le module du champ ne dépend pas de l'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques :  $\vec{B} = B_\theta(r) \cdot \vec{e}_\theta$ .

Soit  $C$  le cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  passant par  $M$  ; la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $C$  est :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

Le courant enlacé est celui qui traverse le disque de rayon  $r$ , c'est-à-dire le courant  $I(t)$  traversant le fil rectiligne. Le théorème d'Ampère conduit alors à :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot (I(t))$$

Soit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot (I(t))}{2 \cdot \pi \cdot r} \vec{e}_\theta$$

Quand la pince entoure le fil, on a constitué un tore de section par exemple carrée de côté  $a$ , d'axe  $Oz$  et de rayon moyen par exemple  $\frac{3}{2}a$ , sur lequel on a bobiné  $N$  spires régulièrement espacées. Ce circuit voit sa tension  $U$  mesurée par un voltmètre en alternatif.

Le flux à travers la bobine est  $N$  fois le flux à travers une spire que l'on calcule par intégration puisque  $\vec{B}$  n'est pas uniforme :

$$\phi = N \cdot \int_{z=0}^{z=a} \int_{r=a}^{r=2 \cdot a} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = N \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2 \cdot \pi} a \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot a}{a}\right)$$

Soit :

$$\phi = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot \ln 2 \cdot I(t)}{2 \cdot \pi}$$

Il en résulte une force électromotrice  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  dans la bobine ; les lois de l'électrocinétique permettent d'écrire :

$$U = e = -\frac{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot \ln 2}{2 \cdot \pi} \left( \frac{dI(t)}{dt} \right)$$

En passant aux complexes,

$$\tilde{e} = j \frac{\mu_0 \cdot N \cdot a \cdot \ln 2}{2 \cdot \pi} \omega \tilde{I}$$

Soit :

$$N = \frac{U}{I} \frac{1}{\mu_0 \cdot f \cdot a \cdot \ln 2} \approx \frac{6}{600} \frac{1}{50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0,025} \approx 8000$$

# Devoir non surveillé

vendredi 2 février 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## Pouvoirs de l'induction

Jean-Michel COURTY et Roland LEHOUCQ

*Idées de physique © Pour la Science.*

**Faraday voulait «transformer le magnétisme en électricité». Son programme a eu de merveilleux succès, tant dans les freins ralentisseurs de camions que dans les plaques à induction.**

De tous les moyens de cuisson, le plus singulier est la plaque à induction, où la chaleur est créée directement dans le métal de la casserole. Ce prodige est le résultat de l'induction électromagnétique, une des plus efficaces façons de transmettre de l'énergie sans contact.

Plaçons un morceau de cuivre près d'un aimant. Que se passe-t-il? Rien! En revanche, si nous déplaçons le cuivre par rapport au champ magnétique, un courant électrique apparaît dans le cuivre qui s'échauffe. Cet effet, découvert par Foucault et Faraday, est source de multiples applications comme les plaques à induction et les ralentisseurs électromagnétiques. Nous vous invitons à une promenade dans les applications de l'induction.

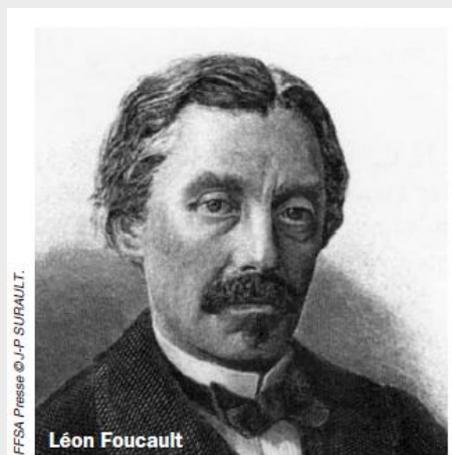
Dans un conducteur comme le cuivre une partie des électrons sont libres de se mouvoir, et leur mouvement, sous l'effet d'une force, engendre le courant électrique. Nous savons qu'un aimant crée un champ magnétique qui exerce une force sur les charges en mouvement, force perpendiculaire au mouvement des charges, qui tend à incurver leurs trajectoires. Quand nous déplaçons le morceau de cuivre, les électrons subissent cette force et sont animés d'un mouvement que l'on désigne par «courant de Foucault». L'intensité du courant est proportionnelle à la vitesse de déplacement du matériau et à l'amplitude du champ magnétique. Les courants de Foucault ont des parcours compliqués au sein de la matière où aucun fil ne les guide. On sait toutefois qu'ils forment des lacets et des boucles, d'où leur autre nom de «courants tourbillonnaires»

### L'ÉNERGIE MÉCANIQUE TRANSFORMÉE

Ces courants de Foucault se manifestent chaque fois qu'un matériau conducteur est en mouvement au sein d'un champ magnétique : ils sont induits par le déplacement. Nombre de dispositifs industriels utilisent cette induction pour transformer l'énergie mécanique en énergie électrique, puis éventuellement en chaleur.

Tous exploitent le principe que Léon Foucault mit en œuvre dans une expérience de 1855 lorsqu'il fit tourner un disque de cuivre dans l'entrefer d'un aimant. Puisqu'il bouge, un tel disque est parcouru de courants de Foucault. Ces courants induits échauffent la matière qu'ils traversent, car les électrons qui les composent choquent sans cesse les autres charges électriques présentes dans le matériau et leur transfèrent une partie de leur énergie, qui est ainsi transformée en chaleur. Cette énergie provient de la seule source d'énergie présente : l'opérateur actionnant le disque. C'est pourquoi Foucault peinait à actionner la manivelle! Si le mouvement de rotation n'est pas entretenu, toute l'énergie mécanique initiale du disque se transforme en chaleur, et le disque arrête de tourner.

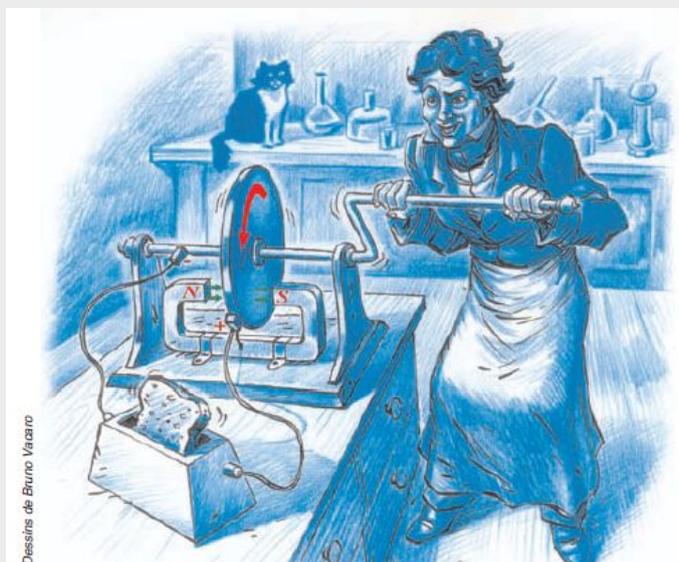
Il en va de même dans les ralentisseurs pour camions, un type de frein magnétique qui équipe aujourd'hui la majorité des poids lourds. Leur avantage est d'être sans contact, donc sans usure! Dans ces dispositifs, des disques solidaires de l'arbre de transmission tournent entre des électroaimants alimentés par une batterie. Quand on désire freiner le véhicule on alimente en courant les électroaimants. Plus la vitesse du véhicule est grande, plus la rotation des disques entre les électroaimants est grande et plus le freinage est efficace. Les ralentisseurs sont donc d'autant plus efficaces que le véhicule roule vite, ce qui, en descente, est idéal. En revanche, leur efficacité s'amointrit aux faibles vitesses jusqu'à s'annuler à l'arrêt : c'est pourquoi, pour les faibles allures, on leur adjoint des freins mécaniques.



FFSA Presse © J.P. SURAULT.

Dans les trains à grande vitesse, l'évacuation de la chaleur produite par les ralentisseurs est problématique : la puissance de freinage nécessaire pour ralentir un train est si grande que les disques que l'on pourrait loger dans les bogies ne résisteraient pas aux échauffements associés. Une solution astucieuse est de réaliser le freinage en induisant des courants de Foucault directement dans les rails, qui ont le temps de refroidir entre deux trains.

Une question vient naturellement à l'esprit : comment récupérer les courants induits avant qu'ils ne se dégradent en chaleur ? Dans le montage expérimental de Foucault, il suffit d'inclure le disque dans un circuit électrique grâce à deux contacts, l'un placé près de l'axe et l'autre à la périphérie du disque. Le courant induit ainsi capté peut alors alimenter un appareil électrique. Une idée simple mais prodigieuse, car on transforme ainsi de l'énergie mécanique en énergie électrique ! Michael Faraday fut le premier, en 1831, à la mettre en œuvre grâce à un montage proche de celui de Foucault. Aujourd'hui, les dynamos ont des architectures bien plus compliquées que celle que créa Faraday. Les dynamos aussi peuvent faire office de freins et l'énergie électrique produite peut alors être récupérée plutôt que dissipée. Ainsi, sur les véhicules électriques, elles rechargent la batterie de bord, et, sur certaines lignes de métro, les courants induits sont réinjectés dans le réseau électrique. Les dynamos de vélos font aussi l'effet de freins. Toutefois, ne nous y trompons pas : s'il est plus dur de pédaler avec une dynamo enclenchée, c'est avant tout à cause des frottements mécaniques !



Dessain de Bruno Vacarro

**Michael Faraday inventa la dynamo vers 1831. Pour engendrer du courant, Faraday fit tourner un disque de cuivre dans le champ magnétique qui s'étend entre les pôles d'un aimant permanent.**

## LES CHAMPS MAGNÉTIQUES TOURNANTS

La dynamo de Faraday est constituée d'un conducteur en rotation dans un champ magnétique constant. Échangeons les rôles et faisons tourner l'aimant autour du matériau conducteur immobile : le conducteur est alors parcouru des mêmes courants induits. Il s'agit là de la seconde forme d'induction électromagnétique, celle qui se manifeste chaque fois qu'un champ magnétique variable dans le temps baigne un matériau conducteur immobile. Cette autre forme d'induction magnétique semble plus difficile à interpréter que la première ! En effet, si le conducteur est immobile, ses charges électriques doivent l'être aussi. Comment alors, une force magnétique proportionnelle à la vitesse pourrait-elle les mouvoir ? En fait, les charges électriques contenues dans le conducteur ne sont pas mises en mouvement directement par le champ magnétique, mais par le champ électrique créé par les variations du champ magnétique. L'unité des deux formes d'induction a été montrée en 1865 par l'Écossais James Clerk Maxwell qui engloba dans une théorie électromagnétique unique les phénomènes électriques et magnétiques.

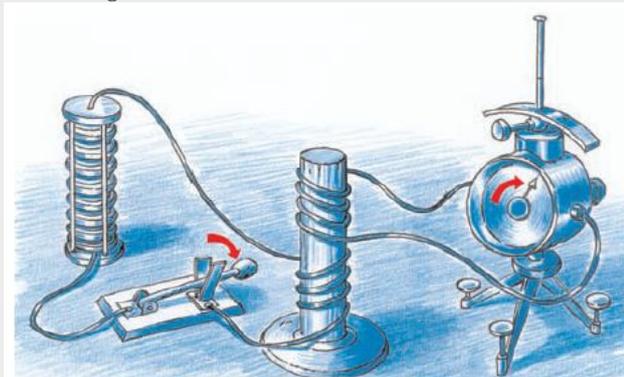
Comment crée-t-on ce champ magnétique variable ? On peut soit déplacer un aimant de champ magnétique constant soit alimenter un électroaimant avec un courant variable. Beaucoup plus efficace, cette seconde voie est utilisée dans les transformateurs, des appareils conçus pour modifier les tensions électriques. Dès 1831, c'est encore Faraday qui expérimentait leur principe, plaçant deux bobines de fil conducteur l'une à côté de l'autre. La première - la bobine primaire - est disposée pour que son axe coïncide avec celui de la seconde - la bobine secondaire. Lorsqu'un courant alternatif alimente le circuit de la bobine primaire, elle engendre un champ magnétique variable dans le temps au sein de la bobine secondaire, où il crée un champ électrique, donc un courant induit : la seconde bobine se comporte alors comme un générateur électrique. Le rapport des tensions aux bornes des deux bobines est égal au rapport de leurs nombres d'enroulements. Ainsi, en ajustant correctement le nombre d'enroulements, il est possible de « transformer » la tension électrique. On passe ainsi des centaines de milliers de volts du courant qui circule dans les pylônes de transport aux 220 volts de l'usage domestique.

Comme la première forme d'induction magnétique, l'induction magnétique par champs variables est aussi accompagnée de dégagement de chaleur. Chacun a déjà constaté qu'un transformateur chauffe même s'il n'alimente aucun appareil. Cela est dû aux courants de Foucault qui tourbillonnent dans toutes les pièces métalliques qui le composent. Toutefois, un inconvénient peut être mué en un avantage : l'induction magnétique par champs variables est l'un des moyens les plus efficaces pour produire de la chaleur.

Pour cela, il suffit de remplacer la bobine secondaire d'un transformateur par une masse conductrice. Les courants induits dans celle-ci réchauffent alors. Ce principe est exploité à l'aide de bobines géantes, dans les

fours à induction, des fours industriels utilisés dans l'industrie métallurgique. On peut y porter au rouge des lingots de fer et même les faire fondre car leur température monte jusqu'à 1 700°C! Le grand avantage des fours à induction est qu'ils effectuent à volonté un chauffage en surface ou un chauffage «en masse», c'est-à-dire uniforme et contrôlé, de tout le matériau. Cette caractéristique est bienvenue en cuisine pour obtenir des surfaces de cuisson qui chauffent uniformément. Les tables de cuisson à induction sont constituées d'enroulements de cuivre recouverts d'une plaque sur laquelle on dépose une casserole au fond métallique, de préférence épais. La chaleur est créée par courants induits dans le fond même de la casserole. Comme les effets de l'induction sont d'autant plus importants que les variations du champ magnétique sont rapides, on emploie des champs magnétiques oscillant à une fréquence de 20 kilohertz, 400 fois plus élevée que les 50 hertz du secteur. Le rendement de ce type de dispositif est excellent : plus de 80 pour cent à comparer à celui des plaques classiques à résistance inférieur à 70 pourcent en général. En outre, aucune énergie n'est consommée et aucune chaleur n'est produite si la table à induction reste sous tension en l'absence de casserole.

Comme notre corps est insensible au champ magnétique, le cuisinier peut même poser sa main sur la plaque sans danger...



Deux bobines entourant un noyau de fer se transmettent les champs magnétiques variables. Lorsqu'on actionne l'interrupteur du circuit alimenté par la pile de la première bobine, le courant électrique, et donc le champ magnétique, varie dans les bobines et un courant, mesuré par un ampèremètre est induit dans la seconde bobine.



Faraday tenta-t-il d'exploiter les courants de Foucault pour chauffer son thé en agitant un aimant permanent au-dessous d'un pot en fer? La méthode n'est pas très efficace, mais le principe est là. Aujourd'hui, les chauffages à induction engendrent un champ magnétique rapidement variable au moyen d'enroulements de cuivre.

## Enoncé

1) Pour chacun des dispositifs présentés dans le document :

- 1.a) l'expérience historique de Foucault ;
- 1.b) le ralentisseur à induction des poids lourds ;
- 1.c) le freinage par induction dans les rails des trains ;
- 1.d) la dynamo de Faraday ;
- 1.e) la dynamo de vélo ;
- 1.f) le transformateur de Faraday ;
- 1.g) le four ou la table à induction.

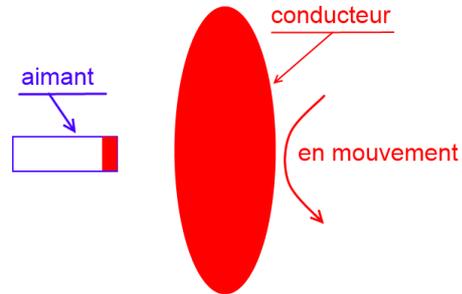
- faire un schéma,
- dire s'il s'agit de courants électriques induits dans un fil ou bien dans la masse ("courants de Foucault"),
- et enfin discerner la cause de l'induction : déplacement du conducteur dans un champ magnétique constant ou bien variation d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur fixe. (On prendra bien soin de définir le référentiel dans lequel on se place!)

## Correction

1) Liste des dispositifs présentés dans le document :

1.a) l'expérience historique de Foucault :

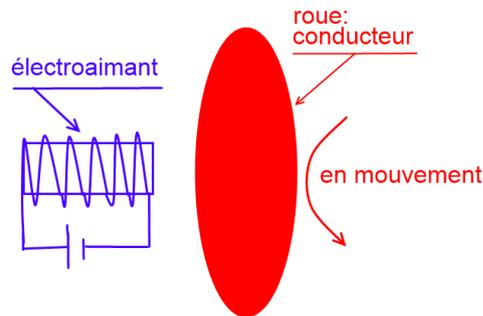
- schéma :



- courants de Foucault,
- dans le référentiel de la table, déplacement du conducteur dans un champ magnétique constant.

1.b) le ralentisseur à induction des poids lourds :

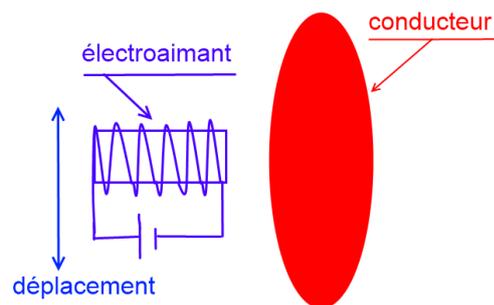
- schéma :



- courants de Foucault,
- dans le référentiel du camion, déplacement du conducteur (la roue) dans un champ magnétique constant.

1.c) le freinage par induction dans les rails des trains :

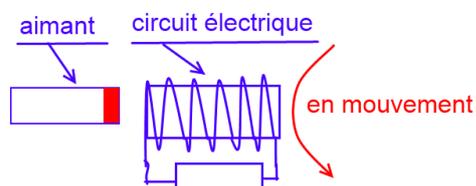
- schéma :



- courants de Foucault,
- dans le référentiel du sol, variation d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur fixe (le rail) mais dans le référentiel du train, déplacement du conducteur (le rail) dans un champ magnétique constant.

1.d) la dynamo de Faraday :

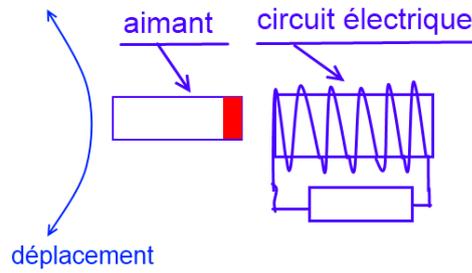
- schéma :



- courants électriques induits dans un circuit électrique,
- dans le référentiel du sol, déplacement du conducteur (le circuit) dans un champ magnétique constant.

1.e) la dynamo de vélo :

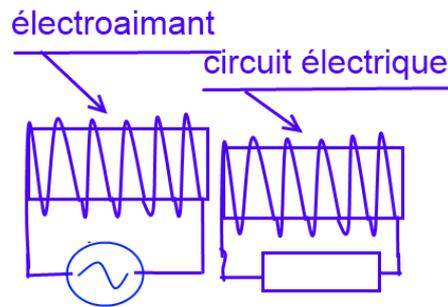
- schéma :



- courants électriques induits dans un circuit électrique,
- dans le référentiel du vélo, variation d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur fixe (le circuit électrique).

1.f) le transformateur de Faraday :

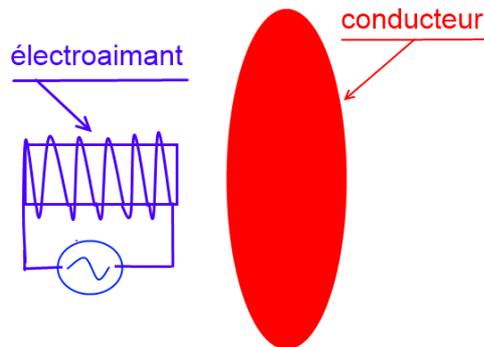
- schéma :



- courants électriques induits dans un circuit électrique,
- dans le référentiel du sol, variation d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur fixe.

1.g) le four ou la table à induction.

- schéma :



- "courants de Foucault",
- dans le référentiel du sol, variation d'un champ magnétique au voisinage d'un conducteur fixe.