

# Electrostatique

## Les points du cours à connaître

---

### I- Propriétés du champ électrostatique

#### 1. Sources du champ électrostatique

##### Densité volumique de charge

La charge totale  $Q$  portée par un volume  $V$  est

$$Q = \iiint_{M \in V} \rho(M) \, d^3\tau$$

où  $\rho$  en  $C \cdot m^{-3}$  est la densité volumique de charge.

Si on dispose d'une assemblée de particules numérotées  $i$ , de charge  $q_i$  et de densité volumique  $n_i$ ,

$$\rho = \sum_i n_i q_i$$

La densité volumique de charge ne dépend pas du référentiel.

#### 2. Flux du champ électrostatique

##### Équation de Maxwell Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

avec la permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \, F \cdot m^{-1}$ .

##### Théorème de Gauss

Si  $Q_{int} = \iiint_{M \in V} \rho(M) \, d^3\tau$  est la charge électrique intérieure au volume  $V$  délimité par la surface fermée  $\Sigma$ ,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

##### Zones de fort champ électrostatique dans une région vide de charge

Les zones de fort champ électrostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ électrostatique sont les plus resserrées.

#### 3. Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

##### Équation de Maxwell Faraday

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

##### Potentiel et champ électrostatiques

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V)$$

où  $V$  est le potentiel scalaire (que l'on appelle potentiel électrostatique).

##### Ligne de champ électrostatique et surfaces isopotentielle

$\vec{E}$  est orthogonal aux surfaces isopotentielle et va vers les potentiels décroissants.

##### Equation de Poisson suivie par le potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

## II- Exemples de champs électrostatiques

### Loi de Coulomb : champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

Les champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle  $q$  en  $O$  sont

$$V(M) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot OM} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

### Champ disruptif dans l'air

L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, il s'ionise. C'est le cas quand la foudre traverse l'atmosphère. La valeur du champ disruptif de l'air est :  $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## III- Dipôle électrostatique

### 1. Définitions

#### Dipôle électrostatique :

Un dipôle est une distribution de charges  $D$ ,

- de charge totale nulle,
- dont le barycentre des charges positives ( $+q$  en  $P$ )
- est distinct du barycentre des charges négatives ( $-q$  en  $N$ ).

Le moment dipolaire électrostatique (en  $\text{C} \cdot \text{m}$ ) est

$$\vec{p} = +q \vec{NP} = \iiint_{M \in D} \rho(M) \vec{OM} \, d^3\tau$$

où  $O$  est un point quelconque.

### 2. Dipôle électrostatique actif

#### Approximation dipolaire :

on considère un dipôle électrostatique de moment  $\vec{p} = +q \vec{NP}$ , présent autour de  $O$ , origine d'un repère sphérique (d'axe  $(Oz)$ , suivant  $\vec{p}$ ).

L'approximation dipolaire revient à observer le champ créé par ce dipôle, en un point  $M$ , loin du dipôle, c'est à dire :

$$OM = r \gg NP$$

#### Potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

Un dipôle électrostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{p}$  orienté suivant l'axe polaire, crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

#### Champ électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

Un dipôle électrostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{p}$  orienté suivant l'axe polaire, crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ électrostatique de composantes

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

### 3. Dipôle électrostatique passif

#### **Energie potentielle électrostatique d'un dipôle électrostatique :**

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  avec un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  est

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

#### **Moment des forces électrostatiques ressenties par un dipôle électrostatique :**

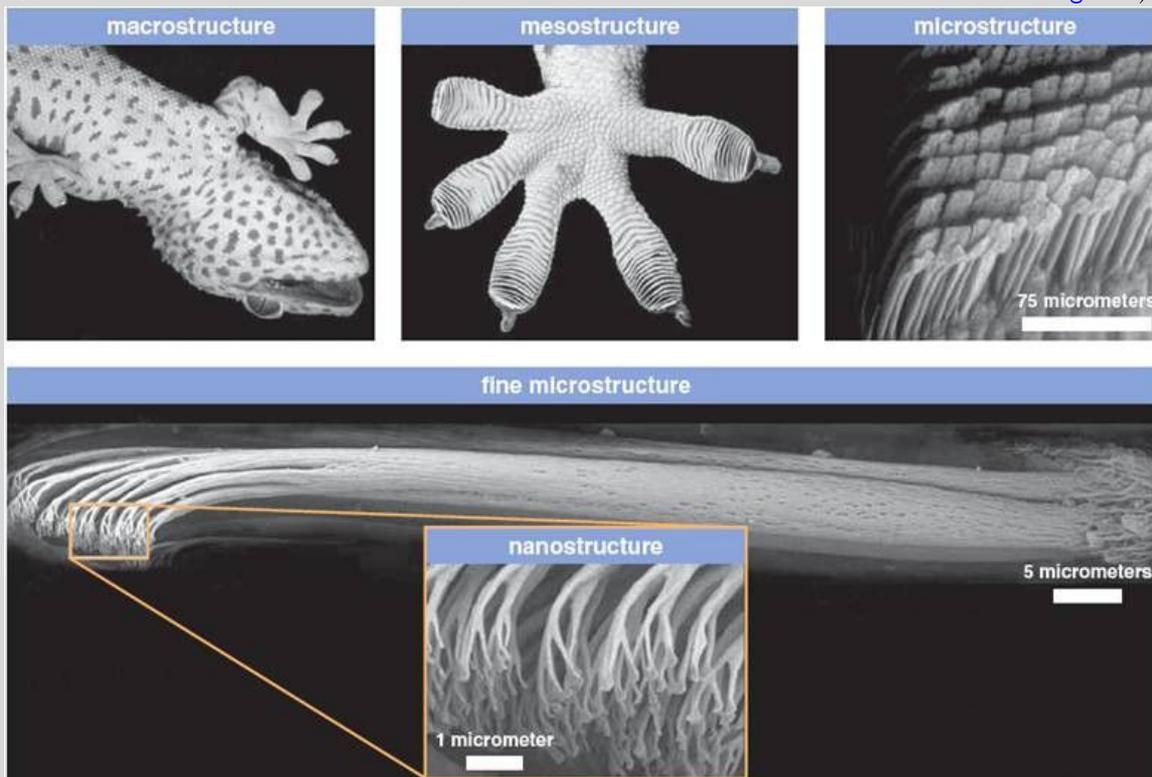
Le moment de l'action exercée par un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  sur un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  est

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

# Exercice traité en fin de cours

## exo 16.1) Modélisation des forces entre un gecko et un mur

"Le gecko est un petit lézard qui fascine depuis très longtemps la communauté scientifique. En effet, le gecko est capable de grimper sur des murs et des plafonds de natures très différents. Ce défi du gecko aux lois de la pesanteur est une question dont la réponse n'a été trouvée qu'il y a quelques années par les scientifiques. Le gecko adhère aux murs par des forces de Van der Waals. Les spatules permettent aux pattes du gecko d'aller «coller» à une surface par des forces de Van der Waals car elles approchent la surface à une échelle nanométrique, condition nécessaire pour les forces de Van der Waals significatives qu'à courtes distances." (<http://culturesciences.chimie.ens.fr/content/les-forces-de-van-der-waals-et-le-gecko>).



1) On s'intéresse à une entité chimique (atome, ion, molécule) constitutive de la paroi des pattes du gecko, centrée en  $O$ , origine du repère, de moment dipolaire  $\vec{p}_g$ .

1.a) Estimer un ordre de grandeur de  $\|\vec{p}_g\|$ .

1.b) Rappeler l'expression, en coordonnées sphériques de centre  $O$  et d'axe polaire  $\vec{p}_g$  du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$  par  $\vec{p}_g$ , dans l'approximation dipolaire.

2) On s'intéresse à une entité chimique (atome, ion, molécule) constitutive du mur à proximité des pattes du gecko, centrée en  $M$ , apolaire en absence du gecko.

2.a) Est-on bien dans l'approximation dipolaire ?

2.b) Estimer l'ordre de grandeur de la polarisabilité de  $M$ .

2.c) Exprimer le moment dipolaire induit  $\vec{p}_m$  en  $M(r, \theta, \varphi)$ .

3) On s'intéresse aux interactions de Van der Waals entre le dipôle permanent  $\vec{p}_g$  et le dipôle induit  $\vec{p}_m$  (interaction de Debye).

3.a) Expliquer qualitativement l'effet de ces forces. Montrer qu'elles sont attractives.

3.b) Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction  $E_p$  mise en jeu.

3.c) En déduire l'expression de la force  $\vec{f}$ .

3.d) Estimer l'ordre de grandeur  $f$  de sa norme. Estimer le nombre de ces forces pour permettre au gecko de ne pas tomber. Conclure.

# Techniques à maîtriser

## I- Propriétés du champ électrostatique



### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Associer la circulation de  $\vec{E}$  au travail de la force  $q\vec{E}$ .

Utiliser le théorème de Stokes. Associer les propriétés locales  $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$  dans tout l'espace et  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ .

Associer la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  au fait que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme de  $\vec{E}$  à l'évasement des tubes de champ loin des sources.

Déduire les lignes équipotentielles d'une carte de champ électrostatique, et réciproquement.

Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.



### Quelles sont les propriétés des lignes de champ électrostatique? *méthode*

Les lignes de champ électrostatique sont ouvertes.

Elles sont orthogonales aux surfaces isopotentielles et vont des charges positives vers les charges négatives (et vers les potentiels décroissants).



### Quelles sont les propriétés de symétrie du champ électrostatique? *méthode*

Les plans de symétrie pour  $\rho$  sont des plans de symétrie pour  $\vec{E}$ .

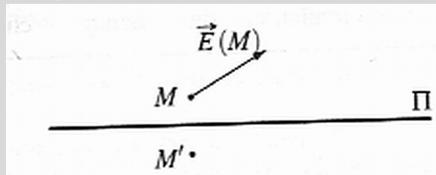
Les plans d'antisymétrie pour  $\rho$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{E}$ .

Le champ  $\vec{E}$  est orthogonal aux plans d'antisymétrie et appartient aux plans de symétrie de  $\rho$ .

#### 16.1.1) Propriétés des lignes de champ électrostatique

Les lignes de champ électrostatique sont-elles ouvertes ou fermées?

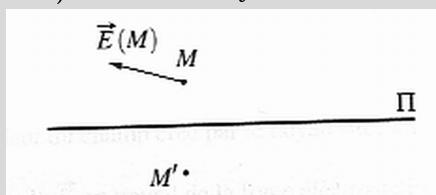
#### 16.1.2) Plan de symétrie d'une distribution de charge



Le plan  $\Pi$  est un plan de symétrie d'une distribution de charge. Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi$ .

1) Compléter le schéma en dessinant le champ électrostatique au point  $M'$ .

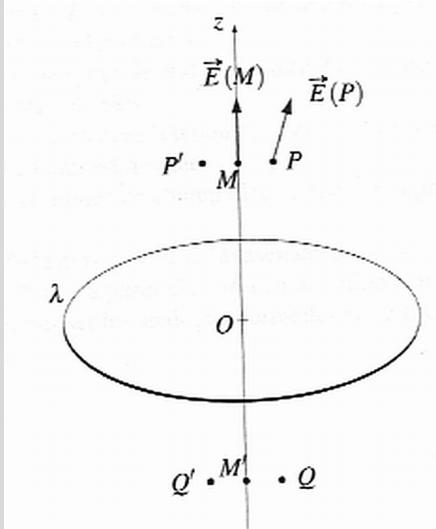
#### 16.1.3) Plan d'antisymétrie d'une distribution de charge



Le plan  $\Pi$  est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge. Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi$ .

1) Compléter le schéma en dessinant le champ électrostatique au point  $M'$ .

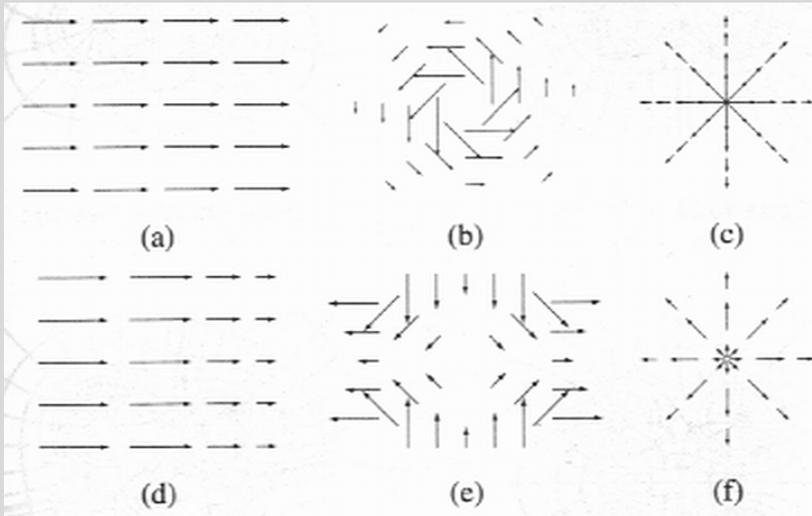
16.1.4) Symétries d'un cerceau chargé linéiquement



On considère un cerceau d'axe  $Oz$  chargé linéiquement  $\lambda$ . On donne le champ électrostatique en  $M$  et en  $P$ .

- 1) Représenter le champ électrostatique
  - en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan du cercle,
  - en  $P'$  symétrique de  $P$  par rapport à l'axe,
  - en  $Q$  symétrique de  $P$  par rapport au plan du cercle,
  - et en  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à l'axe.

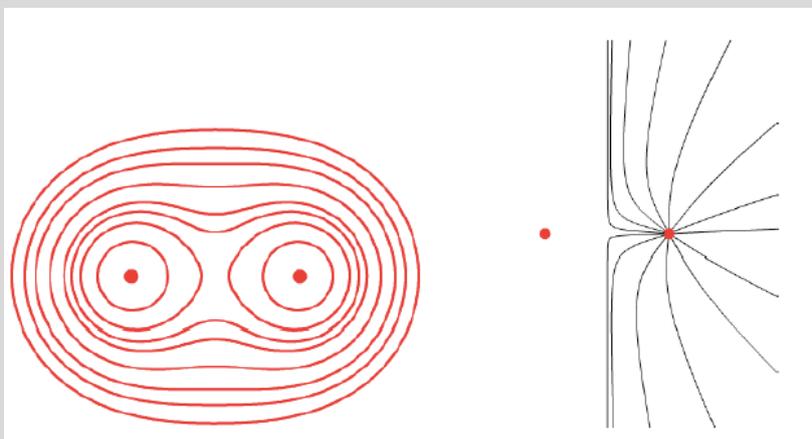
16.1.5) Sont-ce des lignes de champ électrostatique ?



On considère les lignes de champ des différentes configurations à gauche. On supposera la figure invariante par translation perpendiculaire au plan du dessin.

- 1) Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique, et si oui, si des charges sont présentes dans la région représentée.

16.1.6) Lignes de champ électrostatique et lignes isopotentielles de deux charges ponctuelles

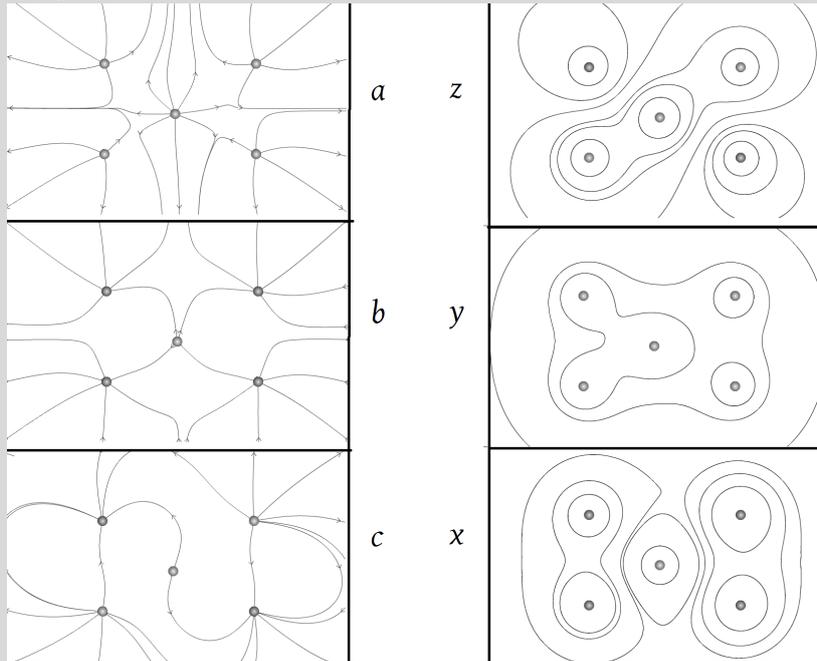


On considère une distribution de deux charges ponctuelles (repérées par des points rouges).

Sur les figures ci-contre sont représentées les lignes de champ et les équipotentielles correspondant à cette distribution.

- 1) Repérer, en le justifiant la carte des lignes de champ et celle des équipotentielles.
- 2) Les sources de champ ont-elles des signes opposés ou égaux ?

## 16.1.7) Lignes de champ électrostatique et lignes isopotentielles de cinq charges ponctuelles



On considère une distribution de cinq charges ponctuelles (repérées par des points).

Sur les figures a,b et c ci-contre sont représentées des lignes de champ et sur les figure z,y et x des équipotentielle.

1) Associer, en le justifiant, chaque représentation de lignes de champ à une représentation d'équipotentielles.

2) Repérer sur chaque distribution les signes opposés ou égaux des charges.

## II- Calculs de champs électrostatiques

ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.

Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface et par un condensateur plan. Déterminer la capacité du condensateur plan.

Citer l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Associer l'énergie d'un condensateur apparue en électrocinétique à une densité volumique d'énergie.

Exprimer l'énergie de constitution du noyau à un préfacteur numérique près par analyse dimensionnelle.

Obtenir le préfacteur numérique en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini. Relier les ordres de grandeur mis en jeu : rayons et énergies. Justifier la nécessité de l'interaction forte.

Mettre en évidence les analogies formelles entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour en déduire l'analogie des propriétés des champs.

Comment calculer un champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges ? *méthode*

Il faut superposer le champ de Coulomb de chacune des charges

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$



### Comment calculer un champ électrostatique créé par une distribution continue de charges ? *méthode*

Il faut utiliser les symétries (s'il y en a assez) puis le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée qui vérifie les symétries.

#### 16.2.1) Symétries d'une sphère chargée surfaciquement

Soit une sphère de centre  $O$ , portant une répartition surfacique de charges  $\sigma$ .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charges :
  - 1.a) invariances;
  - 1.b) plans de symétrie;
  - 1.c) plans d'antisymétrie.

#### 16.2.2) Détermination d'un champ électrostatique en symétrie cylindrique

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe ( $Oz$ ), de charge (le cylindre de rayon  $R$  est uniformément chargé).

- 1) En déduire les symétries (en statique) de  $V$  et  $\vec{E}$ .

#### 16.2.3) Quatre charges ponctuelles

Soit quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré d'axes  $Ox$  et  $Oy$ , de centre  $O$  dont la longueur de la diagonale est  $2a$ .

- 1) Calculer le potentiel en  $O$  ainsi que le champ  $\vec{E}$  dans les cas où les charges sont les suivantes :
  - 1.a)  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$  et  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ .
  - 1.b)  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$ ,  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$  et  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$ .
  - 1.c)  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$ ,  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$  et  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$ .
  - 1.d)  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ ,  $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$  et  $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$ .

#### 16.2.4) Utilisation des potentiels retardés en électrostatique

On donne le potentiel scalaire  $V(M)$  créé en  $M$  par  $D$ , une distribution de charges  $\rho$  d'extension finie,

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3\tau$$

(la formule des potentiels retardés)

- 1) Que devient cette formule dans le cas électrostatique?
- 2) En déduire l'expression du champ électrostatique.

#### 16.2.5) Champ électrostatique créé par un cerceau linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge, de densité  $\lambda$ , uniforme sur le cercle de centre  $O$ , d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$ .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :
  - 1.a) invariances;
  - 1.b) plans de symétrie;
  - 1.c) plans d'antisymétrie.
- 2) En déduire les symétries de  $\vec{E}$  :
  - 2.a) sur l'axe ( $Oz$ );

- 2.b)** sur l'axe ( $Oz$ ), en  $z = 0$ .
- 3)** Calculer le champ électrostatique créé en un point  $M$  de l'axe  $Oz$ , de coordonnée  $z$ .

### 16.2.6) Champ électrostatique créé par un fil infini linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge infinie de densité  $\lambda$  sur l'axe  $Oz$ .

- 1) Etudier les symétries :
  - 1.a) invariances de cette répartition de charge ;
  - 1.b) plans de symétrie et d'antisymétrie de cette répartition de charge ;
  - 1.c) en déduire les symétries de  $\vec{E}$ .
- 2) Calculer le champ électrostatique créé en un point  $M$  à la distance  $r$  de l'axe  $Oz$ .
- 3) Potentiel électrostatique :
  - 3.a) En déduire le potentiel électrostatique créé en un point  $M$  à la distance  $r$  de l'axe  $Oz$ .
  - 3.b) Peut-on prendre  $V = 0$  à l'infini ?

### 16.2.7) Champ électrostatique créé par une demi-sphère surfaciquement chargée

On considère une distribution surfacique de charge uniforme  $\sigma$  sur une demi-sphère (dans l'espace  $z > 0$ ) de centre  $O$ , de rayon  $R$ .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :
  - 1.a) invariances ;
  - 1.b) plans de symétrie ;
  - 1.c) plans d'antisymétrie.
- 2) Champ électrostatique :
  - 2.a) En déduire les symétries de  $\vec{E}$  en  $O$ .
  - 2.b) Calculer le champ électrostatique créé en  $O$ .

### 16.2.8) Potentiel scalaire créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle  $q$  en  $O$  crée un potentiel scalaire  $V(M) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$  exprimé dans le repère sphérique de centre  $O$ .

- 1) Ce potentiel vérifie-t-il bien l'équation de Poisson ?
- 2) En déduire le champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$ .

### 16.2.9) Deux condensateurs en série

Un générateur parfait impose une différence de potentiel  $U = 12V$  aux bornes de deux condensateurs en série, de capacités respectives  $C_1 = 10\mu F$  et  $C_2 = 80\mu F$ .

- 1) Calculer les tensions respectives aux bornes des deux condensateurs :
  - 1.a)  $u_1$  ;
  - 1.b) et  $u_2$ .
- 2) Calculer les énergies stockées respectivement dans les deux condensateurs :
  - 2.a)  $E_1$  ;
  - 2.b) et  $E_2$ .

## III- Dipôles électrostatiques



### ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Décrire les conditions de l'approximation dipolaire.

Établir l'expression du potentiel  $V$ . Comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ.

Utiliser les expressions fournies pour le dipôle de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment.

Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ d'origine extérieure  $\vec{E}$ .

Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. Expliquer qualitativement pourquoi l'énergie d'interaction entre deux molécules polaires n'est pas en  $1/r^3$ .

Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.



### Utiliser les dipôles électrostatiques *méthode*

Le moment dipolaire électrique est  $\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{NP}$  où  $N$  est le barycentre des charges négatives et  $P$  celui des charges positives.

Un tel dipôle ressent le moment  $\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$  et a l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$ .

La résultante tend à déplacer le dipôle électrostatique vers les régions de champ électrostatique intense et le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

#### 16.3.1) Invariance de la définition du moment dipolaire

1) Montrer que la définition du moment dipolaire  $\iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot d^3\tau$  ne dépend pas du choix du point  $O$ .

#### 16.3.2) Equation des surfaces équipotentielles créées par un dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire

On rappelle que le potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire est

$$V(M) = \frac{p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

1) Montrer que l'équation des surfaces équipotentielles est :  $r^2 = k \cdot \cos \theta$ .

#### 16.3.3) Equation des lignes de champ créées par un dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle sont

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{p}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \Leftrightarrow \begin{cases} E_r = \frac{2 \cdot p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\theta = \frac{p \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que l'équation des lignes de champ est :  $r = k' \cdot \sin^2 \theta$ .

#### 16.3.4) Dipôle de la molécule d'eau

Dans la molécule d'eau  $H_2O$ , la distance  $O - H$  est  $a = 97 pm$  et l'angle que font entre elles les deux liaisons  $O - H$  vaut  $\theta = 104,30^\circ$ . D'autre part, l'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, on suppose que chaque  $H$  porte une charge  $+\frac{e}{3}$ , où  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$  est la charge électronique fondamentale.

1) Exprimer le moment dipolaire  $p_0$  de la molécule d'eau

1.a) dans les unités du système international ;

1.b) en debye.

**16.3.5) Orientation d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur**

- 1) Montrer en traçant  $E_p(\theta)$ , où  $\theta = \left(\vec{E}_{ext}, \vec{p}\right)$  que le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.
- 2) Montrer que la position d'équilibre stable correspond à  $\vec{p}$  dans le même sens que  $\vec{E}_{ext}$ .

**16.3.6) Interaction dipôle-dipôle**

On étudie deux dipôles électrostatiques de moments dipolaires respectifs  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ . Le premier est fixe en  $O$ , centre d'un repère sphérique d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$ , parallèle à son moment dipolaire :  $\vec{p}_1 = p_1 \cdot \vec{u}_z$ .

Le second dipôle est placé en  $r = cste$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi = 0$ . On repère son moment dipolaire par l'angle  $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{p}_2)$ , qui peut varier.

- 1) Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\alpha)$  d'interaction du second dipôle avec le champ électrostatique créé par le premier dipôle.
- 2) Que doit vérifier  $\tan(\theta - \alpha)$  à l'équilibre stable ?
- 3) Application : que vaut  $\alpha$  si
  - 3.a)  $\theta = 0$  ;
  - 3.b)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ;
  - 3.c)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ;
  - 3.d)  $\theta = \pi$ .

**16.3.7) Dipôle de l'atome d'hydrogène**

On modélise l'atome d'hydrogène comme un doublet formé d'un proton (chargé  $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ ) et d'un électron (chargé  $-e$ , placé à la distance  $a = 0,10 nm$  du noyau). On donne  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$ .

- 1) Calculer  $W_{propre}$ , l'énergie électrostatique propre de ce doublet :
  - 1.a) dans les unités du système international ;
  - 1.b) en  $eV$ .
  - 1.c) Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

On place l'atome dans un champ électrique extérieur de valeur le champ de claquage de l'air :  $E_{ext} = 3 \cdot 10^6 V.cm^{-1}$ . On suppose que la distance entre le noyau et l'électron est quasi invariante.

- 2) Calculer  $W_{ext}$ , l'énergie électrostatique d'interaction de ce doublet avec le champ extérieur :
  - 2.a) dans les unités du système international ;
  - 2.b) en  $eV$ .
- 3) Comparer  $W_{ext}$  et  $W_{propre}$ .

**16.3.8) Potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire**

- 1) Démontrer que le potentiel électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire est :

$$V(M) = \frac{p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

- 1.a) pour un doublet ;
- 1.b) pour un dipôle quelconque.

**16.3.9) Champ électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire**

- 1) Démontrer que le champ électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire est :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{p}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3}$$

On placera le dipôle en  $O$ , origine d'un repère sphérique (d'axe  $(Oz)$ , suivant  $\vec{p}$ ).

2) En déduire que

$$\begin{cases} E_r = \frac{2 \cdot p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\theta = \frac{p \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

# Les techniques mathématiques à connaître

## Intégrer une divergence *méthode*

### Position du problème :

Il s'agit de déterminer le champ  $\vec{A}$  connaissant sa divergence  $\text{div}(\vec{A})$ . Autrement dit, il faut intégrer des équations différentielles portant sur les trois composantes  $A_1, A_2, A_3$  de  $\vec{A}$ , elles-même fonction *a priori* de trois variables  $s_1, s_2, s_3$ .

### Symétries :

Pour simplifier le problème, il faut avant tout utiliser les symétries :

- invariances : si  $\text{div}(\vec{A})$  ne dépend pas d'une des trois variables  $s_1, s_2, s_3$ , alors  $\vec{A}$  n'en dépendra pas non plus.
- les plans de symétrie pour  $\text{div}(\vec{A})$  sont des plans de symétrie pour  $\vec{A}$ . Le champ  $\vec{A}$  appartient aux plans de symétrie de  $\text{div}(\vec{A})$ .
- les plans d'antisymétrie pour  $\text{div}(\vec{A})$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{A}$ . Aussi, le champ  $\vec{A}$  est orthogonal aux plans d'antisymétrie de  $\text{div}(\vec{A})$ .

### ■ Exemple :

Si  $\text{div}(\vec{A})$  fonction de  $r$  uniquement en coordonnées sphériques, alors :

- $\vec{A}$  ne dépend que de  $r$  ;
- les plans de symétrie pour  $\text{div}(\vec{A})$  sont les plans contenant  $O$  : ce sont les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ . Donc  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r$  ;
- les plans d'antisymétrie pour  $\text{div}(\vec{A})$  n'existent pas.

Conclusion :  $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ .

### Utilisation de la formule d'Ostrogradsky :

On peut utiliser la formule d'Ostrogradsky :  $\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d}^2\Sigma = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau$ .

Pour ce faire, il faut définir une surface fermée  $\Sigma$  (orienté obligatoirement vers l'extérieur) qui vérifie les symétries. Le volume  $V$  est délimité par  $\Sigma$ .

### ■ Exemple :

Si  $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques, alors :

- $\Sigma$  est une sphère de rayon  $r$ , centrée sur  $O$  ;
- $V$  est la boule de rayon  $r$ , centrée sur  $O$ .

### Utilisation de l'expression de la divergence dans le repère adapté :

on peut écrire  $\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left( \frac{\partial(\mu_2 \mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \mu_1 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \mu_2 A_3)}{\partial s_3} \right)$  en utilisant

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

### ■ Exemple :

Si  $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques, alors :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 A_r)}{dr}$$

**16.4.1) Calcul d'un champ de divergence donnée (1)**

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a \vec{u}_r$$

où  $a$  est une constante.

**16.4.2) Calcul d'un champ de divergence donnée (2)**

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a r \vec{u}_r$$

où  $a$  est une constante.

**16.4.3) Calcul d'un champ de divergence donnée (3)**

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  tel que, dans le repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a \vec{u}_r$$

où  $a$  est une constante.

**16.4.4) Calcul d'un champ de divergence donnée (4)**

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  tel que, dans le repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a r^2 \vec{u}_r$$

où  $a$  est une constante.

**16.4.5) Calcul d'un champ de divergence donnée(5)**

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}$  tel que, dans le repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a r \vec{u}_r$$

où  $a$  est une constante.

# Programmation en python

## exo 16.2) Potentiel électrique créé par un doublet

On s'intéresse à un doublet électrostatique formé de deux charges  $q = \pm e = \pm 1,6 \times 10^{-19}$  C, éloignées de  $a = 10^{-10}$  m dans le plan  $yOz$ .

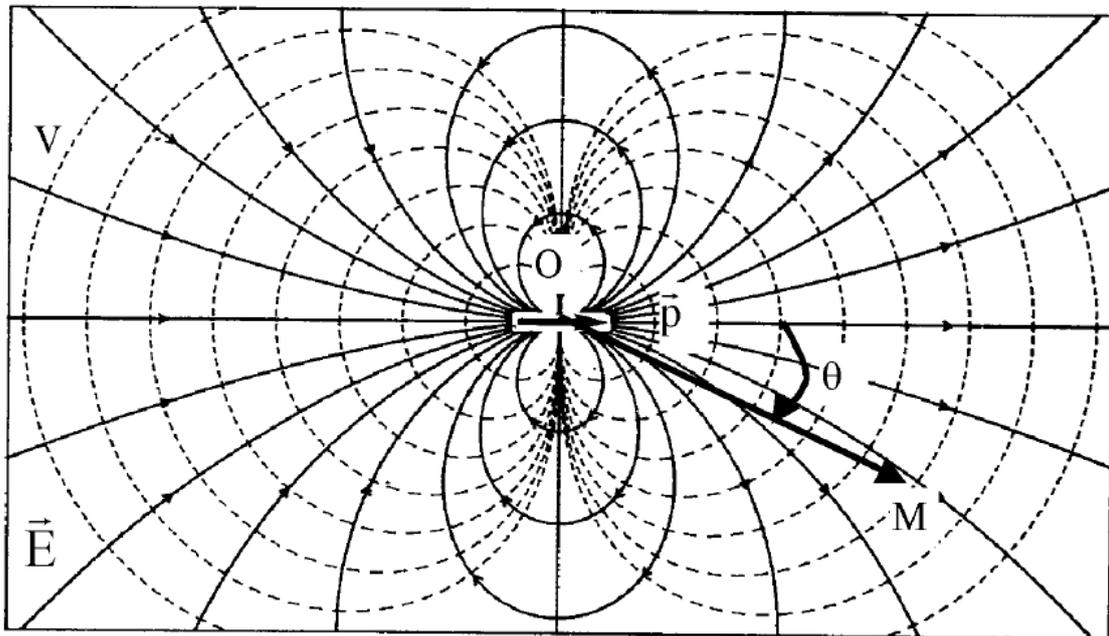
1) Calculer :

1.a)  $V_1$  le potentiel créé par la première charge ;

1.b)  $V_2$  le potentiel créé par la seconde charge ;

1.c)  $V$  le potentiel créé par le doublet.

2) Ecrire un programme qui permet de tracer pour le doublet quelques courbes isopotentielles dans le plan  $yOz$ .



# Résolution de problème

## Attraction électrostatique

Un bâton électriquement chargé peut dévier un filet d'eau

Un bâton électrisé par frottement attire les molécules d'eau.



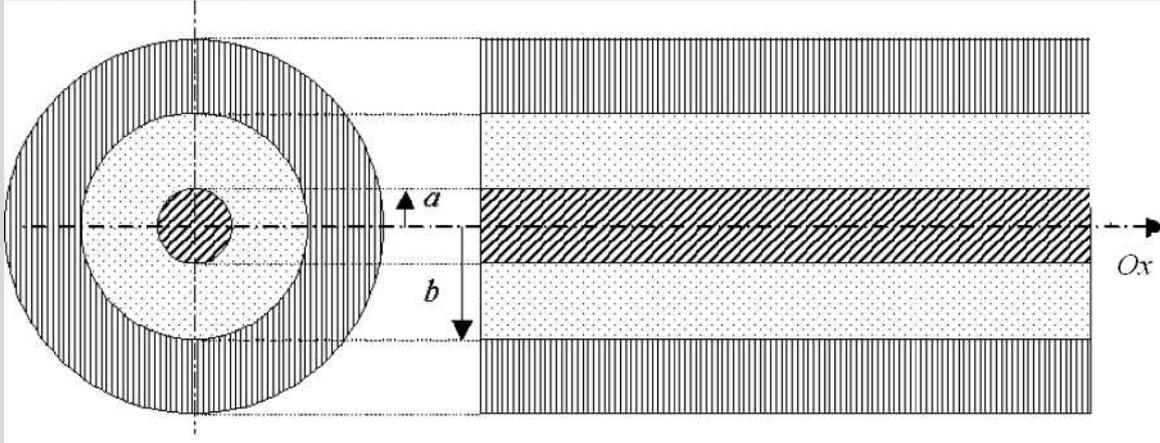
### exo 16.3) Énoncé

- 1) Evaluer la charge électrique portée par le bâton.

# Exercices d'oral pour s'entraîner

## exo 16.4) Etude d'un câble coaxial en électrostatique

Un câble coaxial (cf. figure suivante) est constitué de trois cylindres infinis de même axe ( $Oz$ ) :  
 la "âme", de rayon  $a$ , conducteur électrique porté au potentiel électrique  $V_0$  ;  
 la "gaine", isolant de rayon extérieur  $b$  (on admettra que la présence de l'isolant a la permittivité  $\epsilon_0$ , du vide :  $\epsilon_r = 1$ ) ;  
 la "masse", de rayon extérieur  $c$ , conducteur électrique porté au potentiel électrique nul par convention.  
 On se place dans le régime électrostatique.



1) Qu'est-ce que le régime électrostatique? Rappeler, dans le cadre de l'électrostatique, les équations de Maxwell, ainsi que l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  en fonction du potentiel  $V$ . Que vaut le champ électrique  $\vec{E}$  dans un conducteur en électrostatique? En déduire que l'on peut parler du potentiel d'un conducteur en électrostatique. Où se situent les charges dans un conducteur en électrostatique?

2) Montrer que le champ et le potentiel électrostatiques entre les deux conducteurs sont  $\vec{E} = \frac{V_0}{r \ln(\frac{b}{a})} \vec{u}_r$  et  $V = \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})} V_0$ .

3) Montrer que la capacité linéique de ce câble est  $\chi = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}$ . Que vaut numériquement  $\chi$  si  $a = 1,0$  mm et  $b = 1,0$  cm?

4) Pour quelles conditions géométriques peut-on considérer que l'on a un condensateur quasi-plan? Par un développement limité adapté aux conditions précédentes, montrer que l'on retrouve bien la capacité du condensateur plan d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ .

5) Pourquoi le champ électrique dans l'isolant ne doit-il pas dépasser un champ maximal  $E_{max}$ ? Que vaut numériquement la valeur maximale  $V_{max}$  du potentiel  $V_0$  si  $E_{max} = 3,0 \times 10^6$  V · m<sup>-1</sup>,  $a = 1,0$  mm et  $b = 1,0$  cm?

## exo 16.5) Analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

1) Faire une analogie formelle entre le champ électrique créé par une charge ponctuelle et l'attraction créée par une masse ponctuelle.

2) Grâce à cette analogie, énoncer la loi locale que vérifie le champ d'attraction gravitationnel  $\vec{A}$ .

3) Énoncer un "théorème de Gauss pour le champ d'attraction gravitationnel  $\vec{A}$ ".

4) On considère un astre (la Terre par exemple), qu'on assimile à une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Sa masse volumique est à symétrie sphérique :  $\mu$  ne dépend que de  $r$ .

4.a) Grâce aux symétries de  $\mu$ , déduire la forme qualitative du champ gravitationnel  $\vec{A}$  créé par l'astre.

4.b) Appliquer le théorème de Gauss pour connaître quantitativement  $\vec{A}$ .

4.c) Montrer que, hors de l'astre, "tout se passe comme si l'astre était ponctuel".

**exo 16.6) Etude électrostatique d'un noyau atomique**

On assimile le noyau d'un atome à une sphère uniformément chargée, de centre  $O$ , de rayon  $R$ , de charge  $Q$ .

**1) Généralités :**

**1.a)** Établir l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}$  produit par le noyau en un point quelconque  $M$ .

**1.b)** En déduire le potentiel  $V$  en un point quelconque, en choisissant  $V = 0$  à l'infini.

**2) Application :**

On considère un noyau de baryum :  $Z = 56$  et  $R = 6,3$  fm. On donne la charge électronique  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C et la permittivité du vide  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>. Que vaut le champ

**2.a)** au voisinage du noyau :  $r = 2R$ ?

**2.b)** à la périphérie de l'atome :  $r = 1,0 \times 10^{-10}$  m?

**3)**

**3.a)** Déterminer l'énergie de constitution du noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.

**3.b)** Justifier la nécessité de l'interaction forte.

# Approche documentaire (DNS)

## L'atome de Rutherford

E. Rutherford, traduit par V. Emsellem

*E. Rutherford, Phil. Mag., S.6, 21 (1911), p. 669, cité par P. Radvanyi dans "Histoire de l'atome - de l'intuition à la réalité", Belin - Paris 2007.*

**L'étude de la diffusion des particules  $\alpha$  sur des feuilles d'or permet à Rutherford de déterminer la structure de l'atome en 1911.**

Il est bien connu que les particules  $\alpha$  subissent des déflexions de leur trajectoire rectiligne par les rencontres avec les atomes de matière. Il ne semble y avoir aucun doute sur le fait que des particules si rapides traversent les atomes sur leur chemin, et que les déflexions observées sont dues à la traversée du champ électrique intense qui règne dans le système atomique.[...]

Puisque les particules  $\alpha$  traversent l'atome, il devrait être possible, à partir d'une étude détaillée de la nature de la déflexion, de se faire une idée de la constitution de l'atome qui produirait les effets observés. En fait, la diffusion de particules chargées rapides par les atomes de matière est l'une des méthodes les plus prometteuses pour attaquer ce problème.[...]

Considérons un atome contenant une charge  $\pm Ne$  en son centre, entourée d'une sphère électrisée contenant une charge  $\mp Ne$  supposée répartie uniformément dans une sphère de rayon  $R$ .  $e$  est l'unité fondamentale de charge, que nous prendrons dans cet article égale à  $4,65 \times 10^{-10}$  unité e.s. Nous supposons que pour des distances inférieures à  $10^{-12}$  cm, la charge centrale ainsi que la charge portée par la particule  $\alpha$  peuvent être considérées comme concentrées en un point. Nous montrerons que les déductions principales de la théorie sont indépendantes du fait que la charge centrale soit supposée positive ou négative. Par commodité le signe sera supposé positif. La question de la stabilité de l'atome n'a pas besoin d'être considérée à ce stade, car elle va dépendre de façon évidente de la structure de l'atome à petite échelle, et du mouvement de ses constituants chargés.

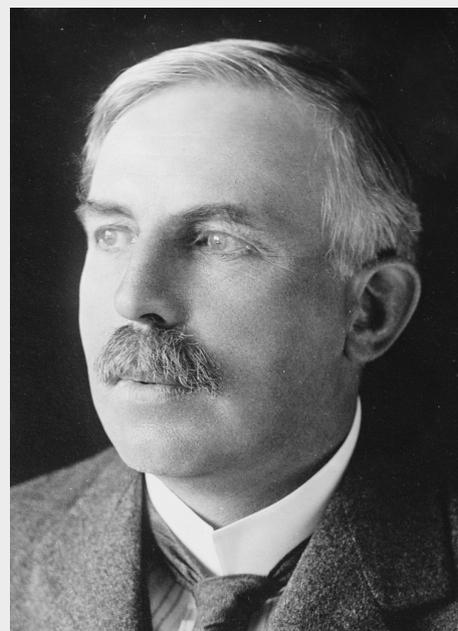
Afin de se faire une idée des forces nécessaires pour défléchir une particule  $\alpha$  d'un grand angle, considérons un atome contenant une charge positive  $Ne$  en son centre, entourée d'une distribution d'électricité négative  $Ne$  distribuée uniformément dans une sphère de rayon  $R$ . La force électrique  $X$  et le potentiel  $V$  à une distance  $r$  du centre d'un atome, pour un point intérieur à l'atome, sont donnés par

$$\begin{cases} X = Ne \left( \frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \\ V = Ne \left( \frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) \end{cases}$$

Supposons qu'une particule  $\alpha$  de masse  $m$ , de vitesse  $u$  et de charge  $q$  soit envoyée directement vers le centre de l'atome. Elle se retrouvera au repos à une distance  $b$  du centre donnée par

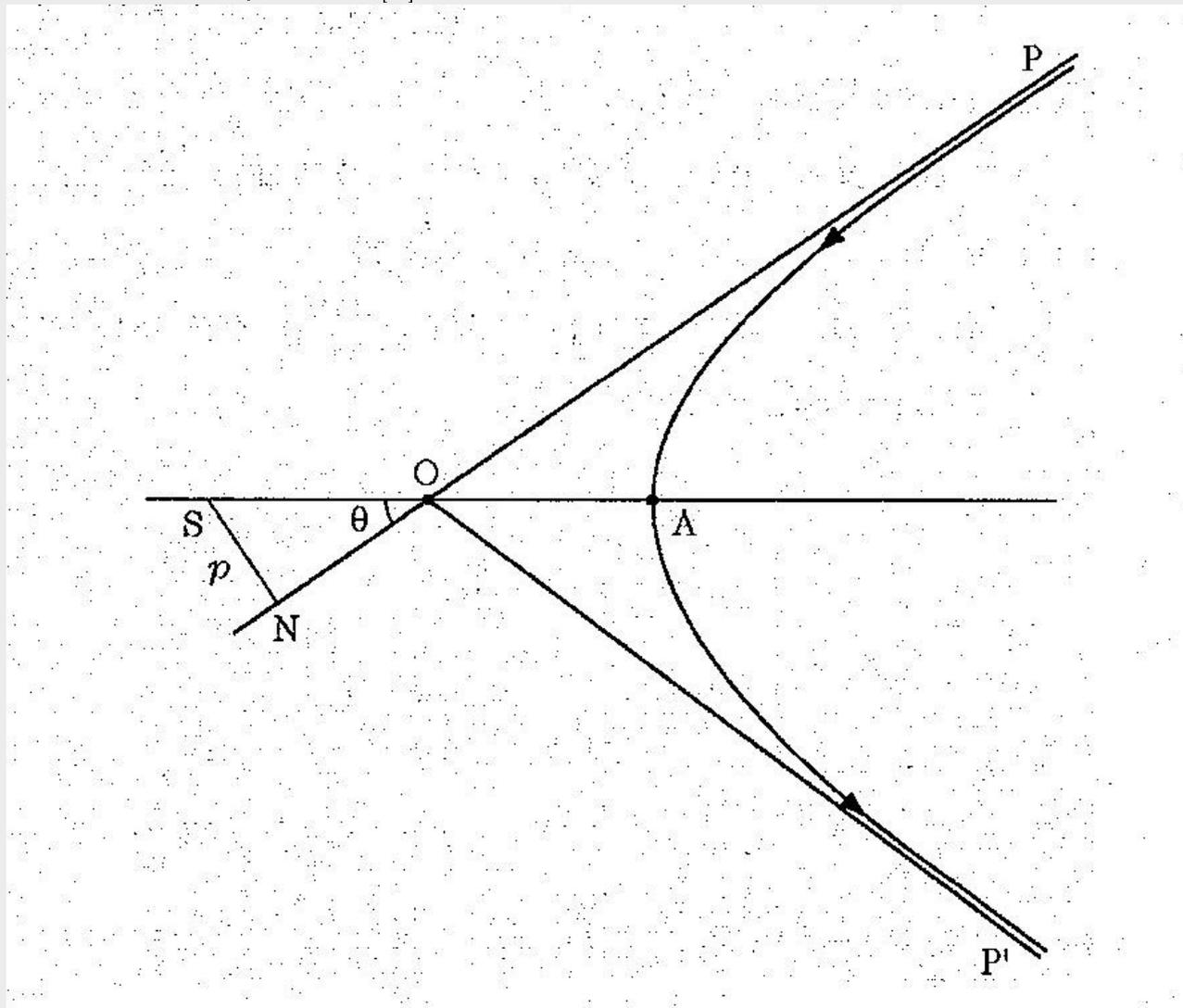
$$\frac{1}{2}mu^2 = Neq \left( \frac{1}{b} - \frac{3}{2R} + \frac{b^2}{2R^3} \right)$$

Supposant que la charge centrale vaut  $100e$ , on peut calculer que la valeur de  $b$  pour une particule  $\alpha$  de vitesse  $2,09 \times 10^9$  cm  $\cdot$  s $^{-1}$  est d'environ  $3,4 \times 10^{-12}$  cm. Dans ce calcul,  $b$  est supposé très petit devant  $R$ . Puisque  $R$  est supposé être de l'ordre du rayon de l'atome, c'est-à-dire  $10^{-8}$  cm, il est évident que la particule  $\alpha$ , avant d'être déviée vers l'arrière, pénètre si près de la charge centrale que le champ dû à la distribution uniforme d'électricité négative peut être négligé. En général, un calcul simple montre que pour toutes les déflexions supérieures à un



degré, nous pouvons supposer sans erreur notable que la déflexion est due au champ de la charge centrale seule. De possibles déviations uniques dues à l'électricité négative, si elle est distribuée sous la forme de corpuscules, ne sont pas prises en compte à ce stade de la théorie. Nous montrerons plus tard que cet effet est en général faible devant celui dû au champ central.

Considérons le passage d'une particule électrisée près du centre d'un atome. En admettant que la vitesse de la particule n'est pas modifiée sensiblement par son passage à travers l'atome, la trajectoire de la particule sous l'effet d'une force répulsive variant en raison inverse du carré de la distance sera une hyperbole dont le centre S de l'atome sera le foyer externe. [...]



### exo 16.7) Enoncé

#### 1) Répartition des charges

On considère, comme dans le modèle de Rutherford que l'atome est constitué d'un noyau au centre d'un repère sphérique, contenant  $N$  charges élémentaires  $q_e$ . Ce noyau est entouré d'une charge négative équivalente  $-Nq_e$  uniformément répartie dans une sphère de rayon  $R = 0,5 \times 10^{-10}$  m.

- 1.a) Déterminer la densité volumique de charge  $\rho$ .
- 1.b) Quelles sont les invariances de cette distribution ?
- 1.c) Admet-elle des plans de symétrie ou d'anti-symétrie ?

#### 2) Champ électrostatique

- 2.a) Dédurre des symétries de la distribution de charge la forme du champ électrostatique  $\vec{E}$ .
- 2.b) Que vaut ce champ si  $r > R$ ? Et si  $r < R$ ?
- 2.c) Que faudrait-il poser pour retrouver la formule de  $X$  donnée dans l'article de Rutherford ?

#### 3) Potentiel électrostatique

**3.a)** Rappeler la relation qui lie le potentiel  $V$  au champ  $\vec{E}$ . Pourquoi peut-on fixer  $V = 0$  à l'infini (ce que l'on fera par la suite) ?

**3.b)** Déterminer le potentiel si  $r > R$  et si  $r < R$ .

**3.c)** Est-ce cohérent avec la formule donnée dans l'article de Rutherford ?

**4)** Etude mécanique

On s'intéresse à une particule  $\alpha$  de charge  $q = 2q_e$  et de masse  $m = 6,64 \times 10^{-27}$  kg qui partant de l'infini avec une vitesse de norme  $u$  se dirige vers un atome d'or de numéro atomique  $N \approx 100$  électrons. On suppose, comme Rutherford que la particule "pénètre si près de la charge centrale que le champ dû à la distribution uniforme d'électricité négative peut être négligé".

**4.a)** Justifier le fait que la trajectoire est plane et que c'est une hyperbole, comme sur la figure de l'article.

**4.b)** En utilisant un raisonnement énergétique, montrer que, si la particule  $\alpha$  fait demi-tour à une distance  $b$  du noyau, alors

$$\frac{1}{2}mu^2 = Neq \left( \frac{1}{b} - \frac{3}{2R} + \frac{b^2}{2R^3} \right)$$

**4.c)** Vérifier que " la valeur de  $b$  pour une particule  $\alpha$  de vitesse  $2,09 \times 10^9$  cm  $\cdot$  s $^{-1}$  est d'environ  $3,4 \times 10^{-12}$  cm".

**5)** Conclusion

On a considéré que le noyau était ponctuel.

**5.a)** Au vu du texte donner une taille maximale du rayon du noyau.

**5.b)** En quoi la nature de la matière est-elle lacunaire ?

# Problème (DNS)

## Etude d'un dipôle électrostatique

### 1) Définition du dipôle électrostatique

Soit une distribution de charge  $\rho$  d'extension finie, de volume  $V$ , globalement neutre :  $\iiint_{\Omega \in V} \rho(\Omega) \cdot d^3\tau = 0$ . On sépare les charges positives ( $\rho_+$ ) et les charges négatives ( $\rho_-$ ), telles que  $\rho(\Omega) = \rho_+(\Omega) + \rho_-(\Omega)$ . On pose la charge  $q = \iiint_{\Omega \in V} \rho_+(\Omega) \cdot d^3\tau$

**1.a)** Exprimer  $\iiint_{\Omega \in V} \rho_-(\Omega) \cdot d^3\tau$  en fonction de  $q$ .

Le point  $P$  est le barycentre de la distribution positive  $\rho_+$ , et le point  $N$  est le barycentre de la distribution négative  $\rho_-$ .

**1.b)** Exprimer les vecteurs  $\vec{OP}$  et  $\vec{ON}$ .

Le moment dipolaire électrostatique est  $\vec{p} = \iiint_{\Omega \in V} \rho(\Omega) \cdot \vec{O}\Omega \cdot d^3\tau$ .

**1.c)** Exprimer  $\vec{p}$  en fonction de  $q$  et  $\vec{NP}$ .

### 2) Doublet

On considère un ensemble de deux charges ponctuelles fixes :  $-q$  en  $N(0, 0, -\frac{a}{2})$  et  $+q$  en  $P(0, 0, +\frac{a}{2})$ ,  $a$  et  $q$  étant des quantités positives.

**2.a)** Un doublet est-il un dipôle? Un dipôle est-il un doublet?

**2.b)** Donnez l'expression du moment dipolaire électrique  $\vec{p}$  de cette distribution de deux charges, en fonction de  $q$ , de  $a$  et de  $\vec{u}_z$ .

On considère un système formé d'un proton et d'un électron (la charge élémentaire est :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ ) éloignés de  $a = 0,10 nm$ .

**2.c)** Exprimer la norme du moment dipolaire  $p$  de ce dipôle.

**2.d)** Calculer le potentiel électrostatique  $V(M)$  créé par ce dipôle en un point  $M$ , en fonction de  $q$ , de la constante  $\epsilon_0$ , et des longueurs  $PM$  et  $NM$ .

**2.e)** Calculer le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créé par ce dipôle en un point  $M$ , en fonction de  $q$ , de la constante  $\epsilon_0$ , et des vecteurs  $\vec{PM}$  et  $\vec{NM}$ .

**2.f)** Dans l'approximation dipolaire ( $r \gg a$ , grâce à un développement limité au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ ), exprimer le potentiel électrostatique  $V(M)$  créé par ce doublet en  $M$  en fonction de la constante  $\epsilon_0$ , de la distance  $r$  et des vecteurs  $\vec{p}$  et  $\vec{u}_r$ .

**2.g)** Dans l'approximation dipolaire ( $r \gg a$ , grâce à un développement limité au premier ordre en  $\frac{a}{r}$ ), montrer que le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créé par ce doublet en  $M$  est de la forme  $\vec{E}(M) = \alpha \cdot (\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r + \beta \cdot \vec{p}$ . On exprimera  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de la constante  $\epsilon_0$  et de la distance  $r$ .

**2.h)** En déduire les composantes  $E_r$ ,  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique créé par ce dipôle, en fonction des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , de  $p$  et de la constante  $\epsilon_0$ .

On plonge le doublet dans un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  supposé homogène.

**2.i)** Exprimer l'énergie potentielle  $E_p$  électrostatique du doublet en fonction de  $\vec{p}$  et de  $\vec{E}_{ext}$ .

**2.j)** Quel est le moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des actions électrostatiques exercées sur ce doublet en fonction de  $\vec{p}$  et de  $\vec{E}_{ext}$ ?

### 3) Dipôle électrostatique actif

Dans cette sous-partie, on se place dans l'approximation dipolaire, c'est à dire en  $M$  tel que  $OM \gg O\Omega$ ,  $\forall \Omega \in V$ . On va reprendre les calculs du potentiel et du champ créé dans le cas plus général du dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = p \cdot \vec{u}_z$ .

**3.a)** Exprimer le potentiel électrostatique  $V(M)$  créé par ce dipôle en un point  $M$ , en fonction de la constante  $\epsilon_0$  et des vecteurs  $\vec{p}$  et  $\vec{OM}$ .

**3.b)** En déduire  $V(M)$  en coordonnées sphériques en fonction des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , de  $p$  et de la constante  $\epsilon_0$ .

**3.c)** Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles sous la forme d'une relation entre  $r$  et l'angle  $\theta$ .

**3.d)** Quelles sont les composantes  $E_r$ ,  $E_\theta$  et  $E_\varphi$  (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique créé par ce dipôle, en fonction des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , de  $p$  et de la constante  $\epsilon_0$ ?

**3.e)** Déterminer l'équation des lignes de champ sous la forme d'une relation entre  $r$  et l'angle  $\theta$ .

### 4) Dipôle électrostatique passif

On plonge le dipôle dans un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  supposé homogène.

**4.a)** Exprimer l'énergie potentielle  $E_p$  électrostatique du dipôle en fonction de  $\vec{p}$  et de  $\vec{E}_{ext}$ .

**4.b)** Quel est le moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des actions électrostatiques exercées sur ce dipôle en fonction de  $\vec{p}$  et de  $\vec{E}_{ext}$  ?

**5)** Force de Van der Waals

On considère une molécule  $M_1$ , polaire (de moment dipolaire  $\vec{p}_1 = p_1 \cdot \vec{u}_z$ ) ainsi qu'une molécule  $M_2$  polarisable repérée par  $M_1 \vec{M}_2 = r \cdot \vec{u}_r$  dans le repère sphérique de centre  $M_1$  et d'axe polaire  $\vec{u}_z$ .

**5.a)** Exprimer les composantes (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique  $\vec{E}_{M_1}(M_2)$  créé par  $M_1$  qui règne en  $M_2$ , en fonction des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , de  $p_1$  et de la constante  $\varepsilon_0$ .

$M_2$  est une molécule polarisable : plongée dans un champ électrique  $\vec{E}_{ext}$ , elle acquiert un moment dipolaire induit  $\vec{p}_2 = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{ext}$ .

**5.b)** Exprimer l'énergie potentielle électrostatique  $E_{p_2}$  de  $M_2$  en fonction de  $\alpha$ , des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ , de  $p_1$  et de la constante  $\varepsilon_0$ .

On donne :  $\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$ .

**5.c)** Montrer que la force  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  exercée par  $M_1$  sur  $M_2$  est de la forme

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{-\beta}{r^7} ((18 \cdot \cos^2 \theta + 6) \cdot \vec{u}_r + 3 \cdot \sin(2\theta) \cdot \vec{u}_\theta)$$

On exprimera  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ ,  $p_1$  et  $\varepsilon_0$ .

**5.d)** Préciser si cette force est attractive ou répulsive.