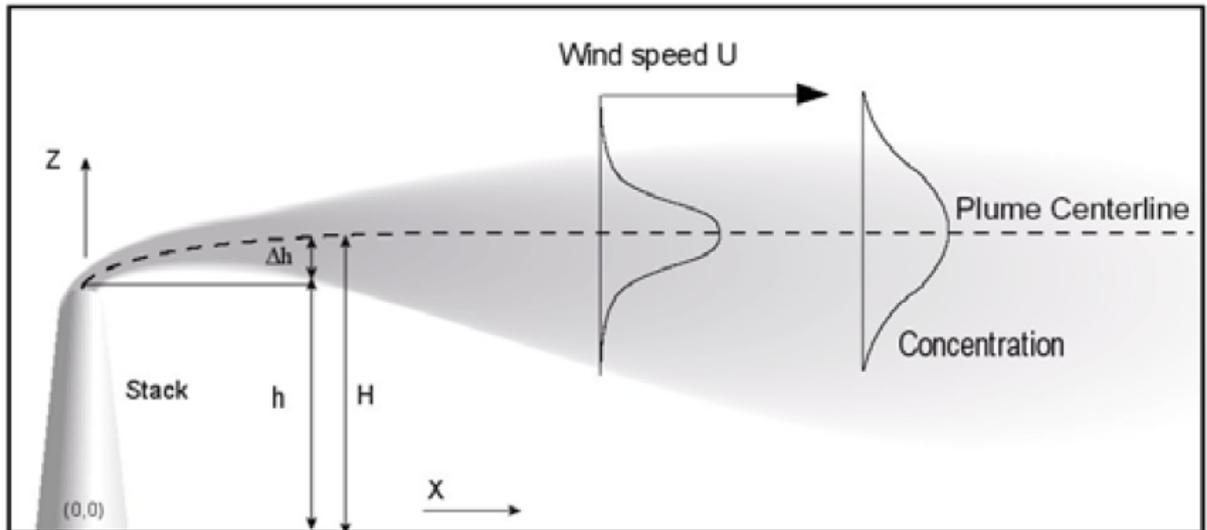
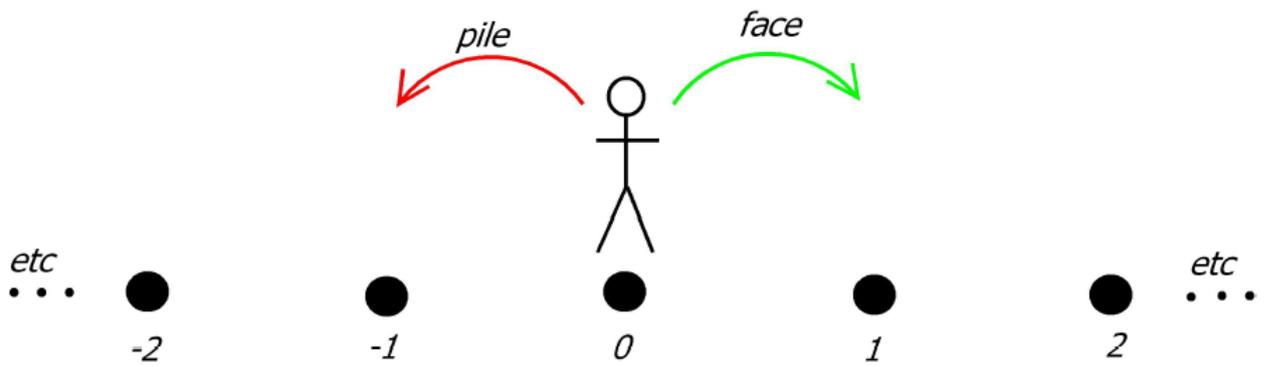




## Comment se dispersent les polluants qui sortent d'une cheminée ?



► **suivre un premier modèle :**  
**la marche au hasard**

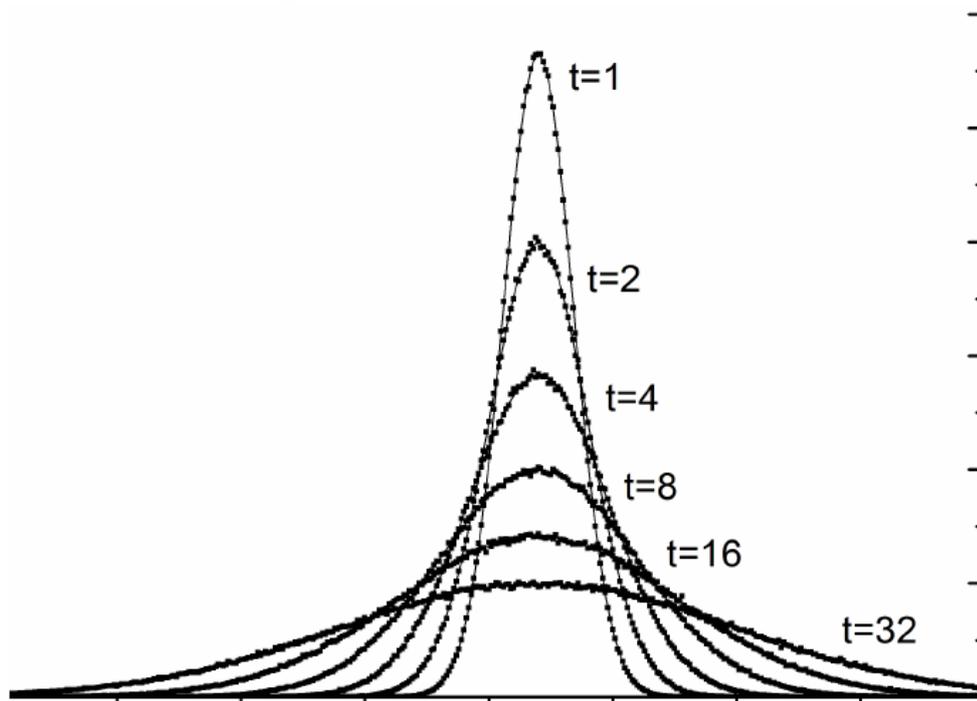


► **faire un bilan de particules  
et démontrer l'équation de diffusion**

$$\textit{variation} = + \text{immigration} - \text{émigration} + \text{Naissances} - \text{Décès}$$

The equation is illustrated with icons: a person with a suitcase and an arrow pointing right for immigration; a person with a suitcase and an arrow pointing left for emigration; a baby for Naissances; and a coffin for Décès.

► **trouver des solutions  
à l'équation de diffusion**



# Diffusion de particules

## Les points du cours à connaître

### I- Modèle microscopique du phénomène de diffusion

#### 1. Marche au hasard

**Mouvement brownien** *vidéo*

Brown a étudié le mouvement de pollens dans l'eau, soumis aux chocs aléatoires des molécules d'eau.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**Libre parcours moyen** *schéma*

La figure 1 représente une particule assimilée à une boule se déplace de  $\ell$  avant d'entrer en collision avec une autre particule.

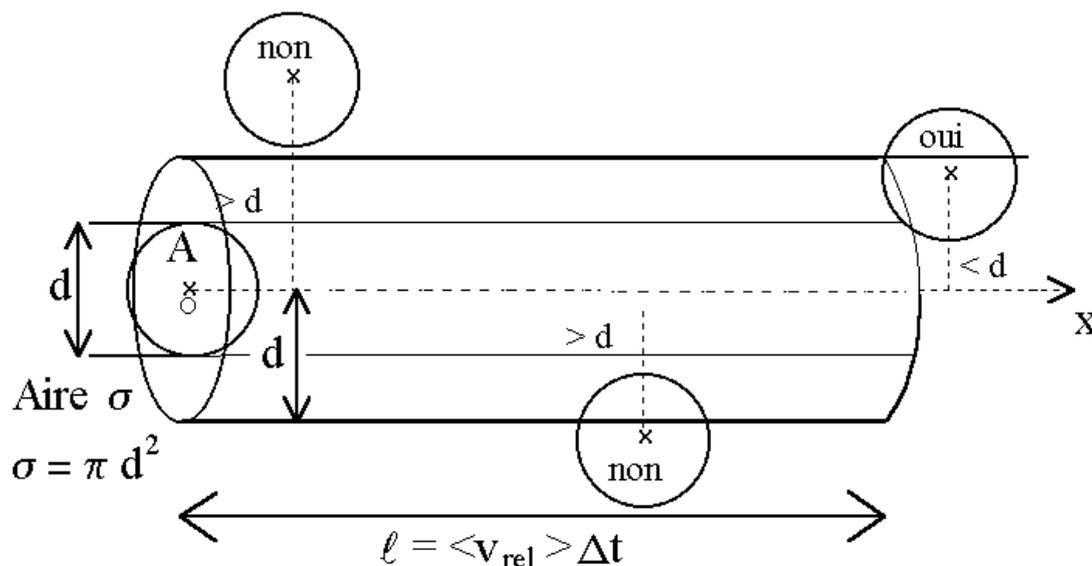


FIGURE 1 – Libre parcours moyen

**Vitesse quadratique moyenne, temps de vol et libre parcours moyen** *définition*

En moyenne, une particule de masse  $m$  se déplace de façon rectiligne uniforme sur une longueur  $\ell$  (le libre parcours moyen) entre deux chocs éloignés dans le temps de  $\Delta t$  (le temps de vol).

Sa vitesse quadratique moyenne  $v_q = \frac{\ell}{\Delta t}$  est telle que l'énergie cinétique moyenne de la particule est  $E_c = \frac{1}{2} m v_q^2$ .

**✳ Probabilité dans la marche au hasard à une dimension** *s'y retrouver*

La particule part en  $t = 0$  de  $x = 0$ .

Tous les  $\Delta t$ , elle subit une collision. Lors d'une collision, la particule a une probabilité

- 1/2 de se déplacer de  $\Delta x$  vers la droite
- 1/2 de se déplacer de  $\Delta x$  vers la gauche

**2. Diffusion d'une particule**

**👁 Marche au hasard à une dimension** *animation*

La figure 2 représente les différents chemins possibles le long d'un axe  $x$  en fonction du temps  $t$  pour une marche au hasard qui se fait en se déplaçant de  $\Delta x$  vers la gauche ou vers la droite tous les  $\Delta t$ .

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

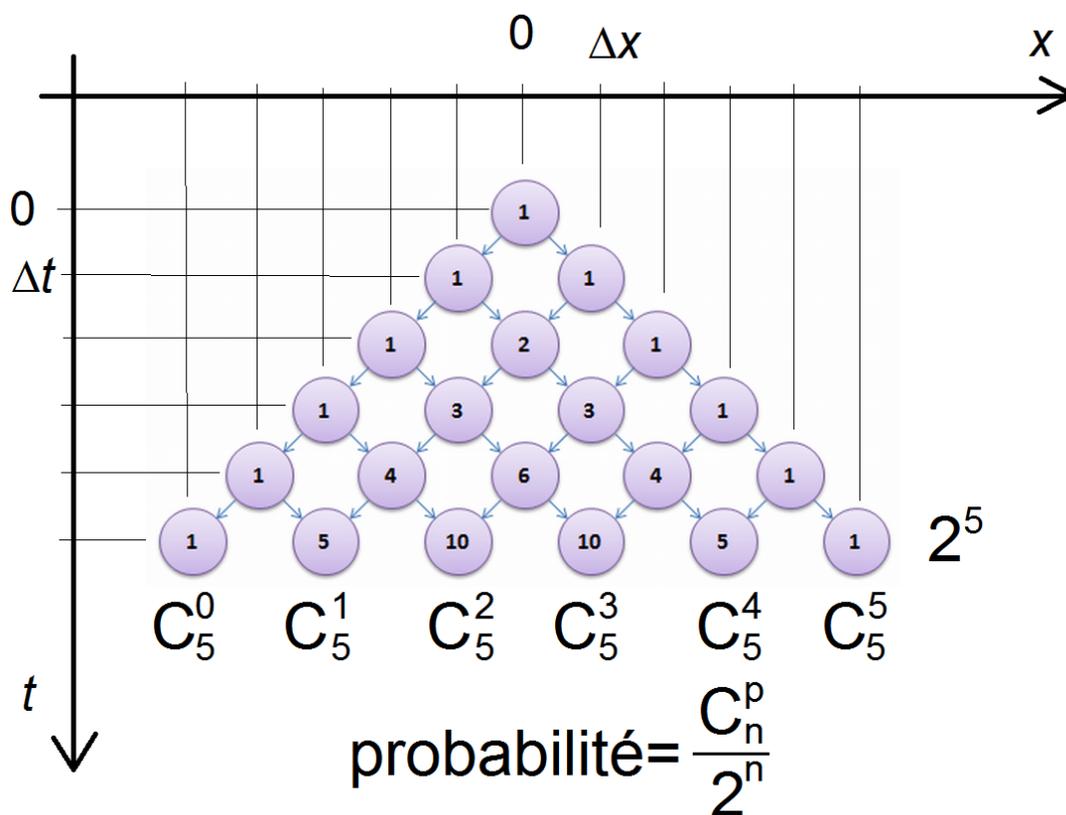


FIGURE 2 – Marche au hasard à une dimension

**👁 Probabilité d'une position dans le cas de la marche au hasard à une dimension** *animation*

La figure 3 représente l'évolution de la probabilité d'être en  $x$  en fonction du temps  $t$  (après  $n$  pas, donc  $n\Delta t$ ) dans le cas de la marche au hasard qui se fait en se déplaçant de  $\Delta x$  vers la gauche ou vers la droite tous les  $\Delta t$ .

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

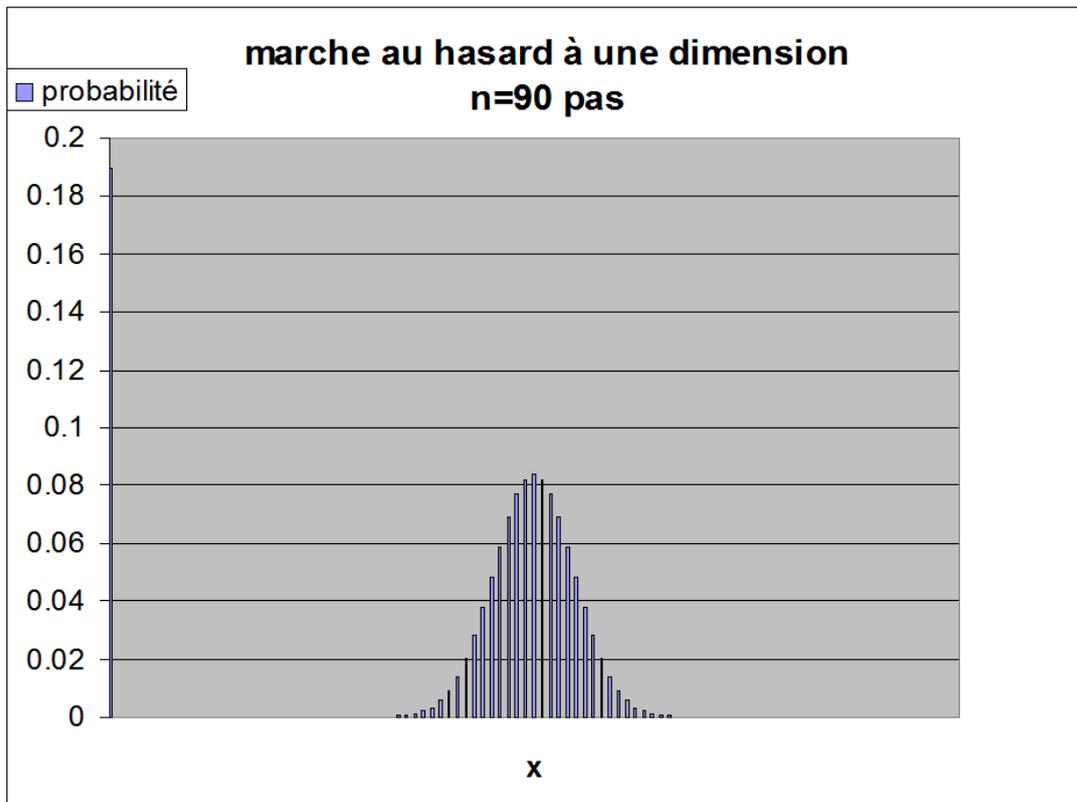


FIGURE 3 – Probabilité d'une position dans le cas de la marche au hasard à une dimension

### 1 Passage d'une probabilité discrète à une densité de probabilité *théorème*

La probabilité  $p(x_n, t_n)$  pour la particule d'être à l'abscisse  $x_n$  à la date  $t_n$ , où  $x_n = n \Delta x$  et  $t_n = n \Delta t$  est

$$p(x_n, t_n) = \frac{1}{2}p(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{1}{2}p(x_{n+1}, t_{n-1})$$

En passant à une probabilité continue

$$\begin{cases} p(x_n, t_n) \approx p(x_n, t_{n-1}) + \frac{\partial p}{\partial t} \Delta t \\ p(x_{n-1}, t_{n-1}) \approx p(x_n, t_{n-1}) - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Delta x^2 \\ p(x_{n+1}, t_{n-1}) \approx p(x_n, t_{n-1}) + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Delta x^2 \end{cases}$$

On trouve donc  $\frac{\partial p}{\partial t} \Delta t \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Delta x^2$  soit ...  $\Rightarrow$

La probabilité de trouver la particule dans le modèle de la marche au hasard est

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

avec

$$D \approx \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = v_q \Delta x$$

où  $\ell$  est le libre parcours moyen,

$\Delta t$  le temps de vol.

et  $v_q$ , la vitesse quadratique moyenne.

### 3. Densité volumique de particules



### Densité de particules *définition*

Le nombre  $N_0$  de particules du système (ouvert) défini par le volume  $V$ , délimité par la surface fermée  $\Sigma$  est :

$$N_0 = \iiint n_0 \, d^3\tau$$

où  $n_0$  est la densité volumique de ces particules (en  $\text{m}^{-3}$ ).



### Effet de la diffusion sur la densité volumique de particules *s'y retrouver*

On peut admettre que la densité volumique de particules  $n_0$  est proportionnelle à la densité de probabilité  $p$  de trouver une particule. Aussi

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

## II- Flux de particules

### 1. Cas de la convection



#### Convection *s'y retrouver*

On s'intéresse à des particules qui se déplacent à la vitesse  $\vec{v}$  du fait d'un déplacement macroscopique du fluide.



#### Bilan de particules qui passent à travers une surface *schéma*

La figure 4 représente Les particules de vitesse  $\vec{v}$  qui passent à travers la surface  $d^2S$  sont celles présentes dans le cylindre de longueur  $v \, dt$ .

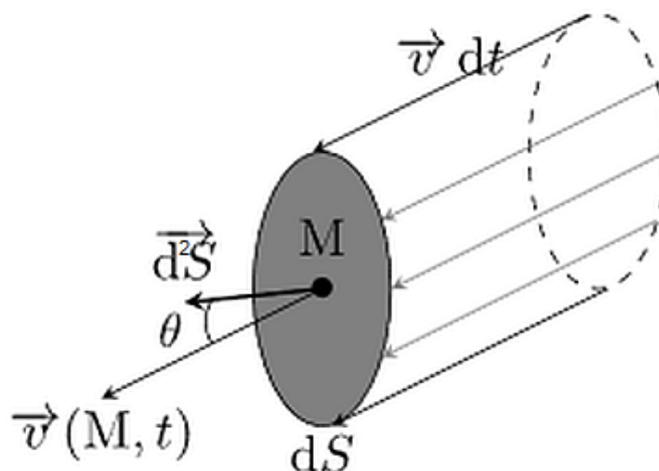


FIGURE 4 – Bilan de particules qui passent à travers une surface

## 2. Généralisation



### Flux de particules à travers une surface orientée *définition*

Le nombre  $dN_0$  de particules qui traversent une surface orientée  $S$  pendant  $dt$  est :

$$dN_0 = \phi_N dt \text{ avec : } \phi_N = \iint_S \vec{j}_N \cdot \vec{d^2S}$$

Le flux de particules  $\phi_N$  s'exprime en  $s^{-1}$ .

et la densité volumique de courant de particules  $\vec{j}_N$  s'exprime en  $m^{-2} \cdot s^{-1}$ .

## 3. Cas de la diffusion



### Diffusion *s'y retrouver*

On s'intéresse à des particules qui se déplacent sans déplacement macroscopique du fluide. Le physiologiste allemand Fick a étudié, le premier, la diffusion vers 1850.

La diffusion intervient dans de nombreux champs, en particulier :

- en biologie ;
- en chimie ( chromatographie) ;
- en physique nucléaire (séparation isotopique de l'uranium, neutrons dans un réacteur nucléaire) ;
- en physique des matériaux (jonction  $p-n$  pour les diodes, diodes électroluminescentes et diodes lasers).



### Loi de Fick *définition*

On admet la loi phénoménologique suivante (loi de Fick) :

$$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n_0)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion (en  $m^2 \cdot s^{-1}$ ).



### Interprétation de la loi de Fick *s'y retrouver*

A une dimension  $x$ , la loi de Fick devient

$$\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial x} \vec{u}_x$$

La loi de Fick revient à supposer une réponse ( $\vec{j}_N$ ) proportionnelle aux causes (les inhomogénéités de  $n_0$ ).

Le signe  $-$  est là car les particules vont vers les zones peu denses.

### 👁 Exemples de coefficients de diffusion dans l'eau *tableau*

Le tableau 1 présente quelques valeurs numériques de coefficients de diffusion moléculaire dans l'eau à  $25^{\circ}\text{C}$ .

molécule	$D$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{NaCl}$	$19 \times 10^{-10}$
sucre	$5,2 \times 10^{-10}$

TABLE 1 – Quelques coefficients de diffusion moléculaire dans l'eau à  $25^{\circ}\text{C}$

### 👁 Exemples de coefficients de diffusion de gaz *tableau*

Le tableau 2 présente quelques valeurs numériques de coefficients de diffusion de gaz dans l'air à  $0^{\circ}\text{C}$  et  $P = 1 \text{ atm}$ .  $D$  varie comme  $M^{-\frac{1}{2}}$  et donc diminue à mesure que la masse augmente.

gaz	$D$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{H}_2$	$611 \times 10^{-7}$
$\text{CH}_4$	$196 \times 10^{-7}$
$\text{O}_2$	$178 \times 10^{-7}$
$\text{CO}_2$	$138 \times 10^{-7}$

TABLE 2 – Quelques coefficients de diffusion de gaz dans l'air à  $0^{\circ}\text{C}$  et  $P = 1 \text{ atm}$

### 👁 Utilisation de la diffusion pour l'enrichissement de l'uranium. *photo*



La quasi-totalité des centrales nucléaires utilise un combustible enrichi à environ 4% en uranium 235 alors que cet élément n'est présent qu'à 0,7% dans l'uranium naturel essentiellement composé d'uranium 238.

### III- Equation de diffusion des particules

#### 1. Etablissement de l'équation de diffusion des particules

 **Conventions thermodynamiques schéma**

La figure 5 représente une surface fermée. On introduit un signe moins dans les bilans car les conventions de l'analyse vectorielle et de la thermodynamique sont différentes.

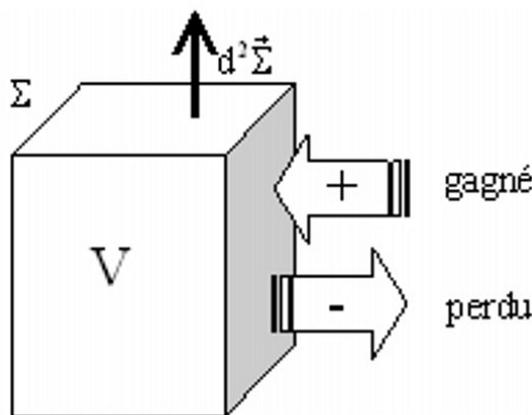


FIGURE 5 – Conventions thermodynamiques

 **Flux de particules à travers une surface fermée définition**

Un bilan pour le système délimité par la surface fermée  $\Sigma$  donne (s'il n'y a ni création, ni annihilation de ces particules par une réaction) :

$$\frac{dN_0}{dt} = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2\Sigma$$

 **2 Equation de continuité à une dimension théorème**

Considérons un milieu unidimensionnel dont la densité de particules varie avec  $x$ . Appelons  $N_0(t)$  le nombre de particules situées dans le volume cylindrique d'aire  $S$  compris entre  $x$  et  $x + dx$  et faisons un bilan :

$$N_0(t) = n_0(x, t) S \, dx \text{ et } N_0(t + dt) = n_0(x, t + dt) S \, dx, \text{ d'où } \frac{dN_0}{dt} = \frac{\partial n_0}{\partial t} S \, dx.$$

Or, si l'on suppose qu'il n'y a aucun processus de création ou d'annihilation de particules,

$$\frac{dN_0}{dt} = S j_x(x, t) - S j_x(x + dx, t) = -\frac{\partial j_x}{\partial x} S \, dx$$

Ainsi...  $\Rightarrow$

à une dimension ( $x$ ), sans création ni annihilation, la densité de particule  $n_0(x, t)$  suit :

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

### 3 Equation de diffusion sans création ni annihilation à une dimension *théorème*

Si on utilise la loi de Fick à une dimension :

$$j_x = -D \frac{\partial n_0}{\partial x}$$

dans l'équation de continuité

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

on trouve...  $\Rightarrow$

L'équation de diffusion à une dimension ( $x$ ) dans un milieu homogène de coefficient de diffusion  $D$ , sans création ni annihilation, est (si la densité de particule est  $n_0(x, t)$ ) :

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

### Cas où il y aurait création ou annihilation de particules *s'y retrouver*

S'il y a création et/ou annihilation, il faut rajouter (et/ou soustraire) des termes dans l'équation de diffusion.

### Généralisation de l'équation de diffusion sans création ni annihilation *s'y retrouver*

L'équation de diffusion à trois dimensions dans un milieu homogène de coefficient de diffusion  $D$ , sans création ni annihilation, est

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \Delta n_0$$

On peut utiliser le laplacien en coordonnées cylindriques si  $n_0(r, t)$  :

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

On peut utiliser le laplacien en coordonnées sphériques si  $n_0(r, t)$  :

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

### Cas où il y aurait création ou annihilation de particules *s'y retrouver*

S'il y a création ( $C$ ) et/ou annihilation ( $A$ ), il faut rajouter (et/ou soustraire) des termes dans l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \Delta n_0 + C - A$$

## 2. Solution de l'équation de diffusion en régime permanent

### 👁️ Position du problème à une dimension *schéma*

La figure 6 représente une tige homogène, de section constante  $S$ , de longueur  $L_{AB}$ , fermée sur ses surfaces latérales, mise en contact avec deux milieux en  $x_A$  et en  $x_B$ , en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ).

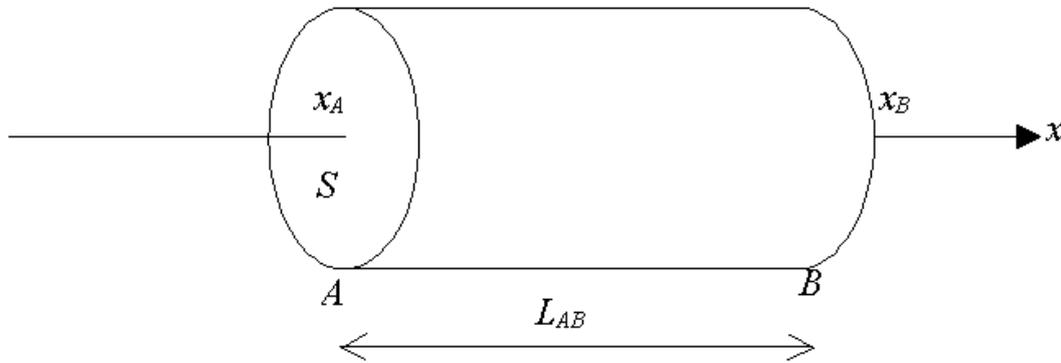


FIGURE 6 – Position du problème à une dimension

### 🔪 4 Solution de l'équation de diffusion en régime permanent *théorème*

En régime permanent, l'équation de diffusion devient :

$$\frac{d^2 n_0}{dx^2} = 0$$

soit  $n_0(x) = ax + b$  et  $j_x = -D \frac{\partial n_0}{\partial x} = -Da$ ,

où  $a$  et  $b$  sont des constantes fixées par les conditions aux limites.

On se souviendra donc que...  $\Rightarrow$

En régime permanent, dans un milieu homogène :

- la grandeur qui diffuse ( $n_0(x)$ ) suit une loi affine,
- le flux ( $\phi_N$ ) est constant.

### 🔪 5 Résistance pour la diffusion des particules *théorème*

$\vec{\text{grad}}(n_0) = \frac{dn_0}{dx} \vec{u}_x = \frac{n_B - n_A}{x_B - x_A} \vec{u}_x$  et  $\phi_N = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2S \vec{u}_x = D \frac{n_A - n_B}{L_{AB}} S$ . Ainsi, on a  $\Rightarrow$

La différence de densité particulaire aux bornes d'un cylindre de coefficient de diffusion  $D$ , de section  $S$  et de longueur  $L_{AB}$  est (en convention récepteur) :

$$n_A - n_B = R_N \phi_N \quad \text{avec} \quad R_N = \frac{L_{AB}}{D S}$$

$R_N$  s'exprime en  $s \cdot m^{-3}$ .

## 3. Solution de l'équation de diffusion en régime quelconque

### ✳ Propriétés de l'équation de diffusion *s'y retrouver*

Cette équation étant non invariante par transformation du sens d'écoulement du temps ( $t \rightarrow -t$ ), la diffusion est irréversible.

Il y a unicité de la solution. Il existe des solutions analytiques dans des cas particuliers, mais souvent il faut faire appel à une résolution numérique.

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites (spatiales et temporelles).

### ✳ Solution numérique *s'y retrouver*

Il se peut que l'on ne trouve pas de solution analytique à l'équation de diffusion. On fait alors appel à une solution numérique, trouvée par ordinateur.

### ♥ Obtention d'ordres de grandeurs de diffusion *à retenir*

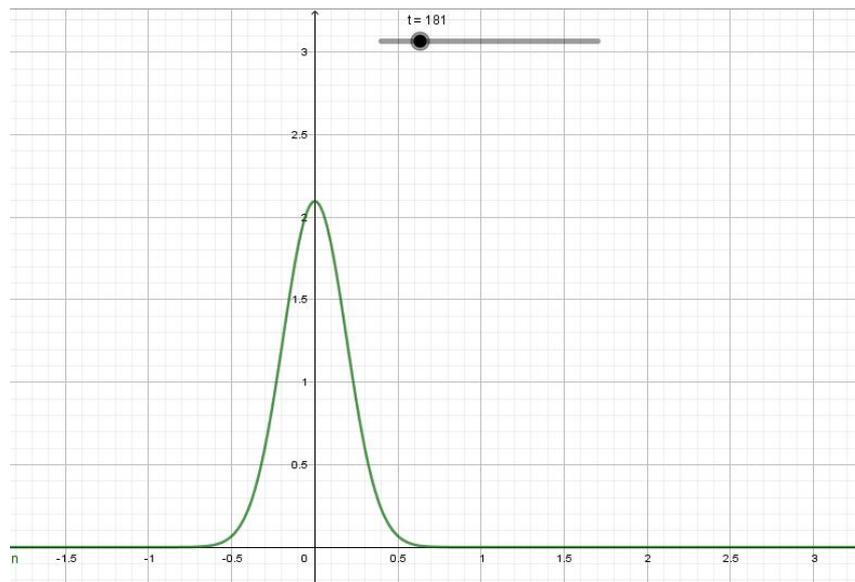
L'équation de diffusion fait apparaître un temps caractéristique  $\tau$  pour un système de taille caractéristique  $L$  :

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2}$$

### ✳ Lenteur des phénomènes de diffusion *s'y retrouver*

On voit donc que  $L$  varie comme  $\sqrt{\tau}$  : la diffusion est un phénomène lent, dans la mesure où, pour des tailles macroscopiques, les temps de diffusion sont souvent très grands.

### 👁 Solution gaussienne de l'équation de diffusion *animation*



La distribution de particules initialement disposées en  $x = 0$  est une gaussienne dont la largeur augmente au cours du temps.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



## Valeurs numériques (compléments) Diffusion de particules

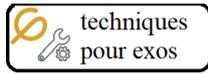
### Exemples de coefficients de diffusion

quelques valeurs numériques de coefficients diffusion moléculaire dans l'eau à 25°C.

molécule	$D$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{NaCl}$	$19 \times 10^{-10}$
sucre	$5,2 \times 10^{-10}$

$D$  varie comme  $M^{-\frac{1}{2}}$  et donc diminue à mesure que la masse augmente. Quelques coefficients de diffusion de gaz dans l'air à 0°C et  $P = 1 \text{ atm}$  :

gaz	$D$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{H}_2$	$611 \times 10^{-7}$
$\text{CH}_4$	$196 \times 10^{-7}$
$\text{O}_2$	$178 \times 10^{-7}$
$\text{CO}_2$	$138 \times 10^{-7}$



## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

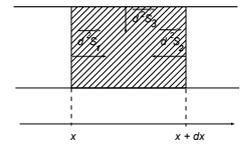
### Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources internes

Il s'agit de faire un bilan particulaire : le nombre de particules  $N(t) = \iiint n_0(x, y, z, t) d^3\tau$  du système défini (qui vérifie les symétries du problème) varie pendant  $dt$  de  $dN = +C dt - A dt + dN_e$ , où  $A$  est le terme d'absorption (nul ici),  $C$  le terme de création (nul ici), et le nombre de particules échangées  $dN_e$  est tel que  $\frac{dN_e}{dt}$  est égal au flux de  $\vec{j}_N$  à travers les parois du système orientées vers l'intérieur.

**Attention!** la densité de flux par diffusion est donnée par la loi de Fick ( $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n_0$ ), mais il peut y avoir aussi de la convection à la vitesse  $\vec{v}$  ( $\vec{j}_N = n_0 \vec{v}$ ).

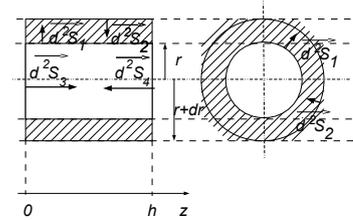
#### Dans une géométrie unidimensionnelle

La densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial x} \vec{u}_x$ .  
On fait un bilan pour un système de section  $S$  entre  $x$  et  $x + dx$  en orientant les surfaces.



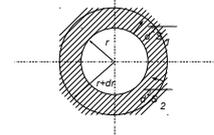
#### Dans une géométrie cylindrique

La densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial r} \vec{u}_r$ .  
On fait un bilan pour un cylindre creux de longueur  $\ell$  entre  $r$  et  $r + dr$  en orientant les surfaces.



#### Dans une géométrie sphérique

La densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial r} \vec{u}_r$ .  
On fait un bilan pour une sphère creuse entre  $r$  et  $r + dr$  en orientant les surfaces.



#### Dans une géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien

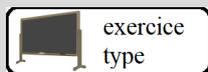
on peut réécrire l'équation de diffusion dans un cas quelconque

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \Delta n_0$$

en utilisant

$$\Delta f = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$$



#### Exercice 2.1 (le prof fait cet exercice type jeudi) Etablissement de l'équation de diffusion

- 1) Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources interne
  - 1.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien
  - 1.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique
  - 1.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique
- 2) Retrouver les précédents résultats en utilisant l'opérateur laplacien

1) Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources interne

1.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien

$$N(t) = S n_0(x, t) dx \Rightarrow \frac{dN}{dt} = S dx \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_3$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_x} \vec{u}_x \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +S j_{N_x}(x, t) - S j_{N_x}(x + dx, t) = -S \frac{\partial j_{N_x}}{\partial x} dx$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = S dx \frac{\partial n_0}{\partial t} = -S \frac{\partial j_{N_x}}{\partial x} dx = +D S \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

1.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique

$$N(t) = \ell 2\pi r dr n_0(r, t) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \ell 2\pi r dr \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_3 + \iint_{S_4} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_4$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_r} \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +\ell 2\pi r j_{N_r}(r, t) - \ell 2\pi (r + dr) j_{N_r}(r + dr, t) = -\ell 2\pi \frac{\partial (r j_{N_r})}{\partial r} dr$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = \ell 2\pi r dr \frac{\partial n_0}{\partial t} = -\ell 2\pi \frac{\partial (r j_{N_r})}{\partial r} dr = +D \ell 2\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (n_0)}{\partial r} \right) dr \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

1.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique

$$N(t) = 4\pi r^2 dr n_0(r, t) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_r} \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +4\pi r^2 j_{N_r}(r, t) - 4\pi (r + dr)^2 j_{N_r}(r + dr, t) = -4\pi \frac{\partial (r^2 j_{N_r})}{\partial r} dr$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial n_0}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial (r^2 j_{N_r})}{\partial r} dr = +D 4\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial (n_0)}{\partial r} \right) dr \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

2) Retrouver les précédents résultats en utilisant l'opérateur laplacien

2.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien

$$\Delta n_0 = \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

2.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

2.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$



**Exercice 2.2** pour s'entraîner

### Diffusion de particules à trois dimensions sans absorption ni création

Quelle est l'équation que suit  $n_0$ , la densité volumique de particules dans un milieu homogène à trois dimensions, de coefficient de diffusion  $D$ , sans création ni annihilation ?

Conservation des particules : pour le volume  $V$ , s'il n'y a ni création ni annihilation de matière :

$$\frac{dN_0}{dt} = \iiint_V \frac{\partial n_0}{\partial t} d^3\tau = - \oiint_{\Sigma} \vec{j}_N \cdot d^2\vec{\Sigma} = - \iiint_V \operatorname{div}(\vec{j}_N) \cdot d^3\tau$$

Au niveau local, la loi de conservation des particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{j}_N)$$

Si le système est homogène, le coefficient de diffusion  $D$  ne dépend pas de la position on a :

$$\operatorname{div}(\vec{j}_N) = -D \cdot \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(n_0)) = -D \cdot \nabla^2 n_0 = -D \cdot \Delta n_0$$

L'équation de diffusion à trois dimensions dans un milieu homogène de coefficient de diffusion  $D$ , sans création ni annihilation, est

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \cdot \Delta n_0$$

On retrouve bien sûr l'équation à une dimension.



**Exercice 2.3** pour s'entraîner

### Diffusion de particules à une dimension sans absorption ni création

Quelle est l'équation que suit  $n_0$ , la densité volumique de particules dans un milieu homogène à une dimension  $x$ , de coefficient de diffusion  $D$ , sans création ni annihilation ?

On va faire un bilan pour un cylindre de section  $S$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

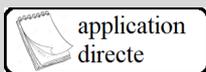
En  $x$ , le flux de particules est  $\phi_N(x, t) = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S} = -D \cdot S \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)_x$ .

En  $x + dx$ , le flux de particules est  $\phi_N(x + dx, t) = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S} = -D \cdot S \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)_{x+dx}$ .

Le nombre de particules est  $N_0 = n(x, t) \cdot S \cdot dx$ .

Le bilan est  $\frac{dN_0}{dt} = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} \cdot S \cdot dx = +\phi_N(x, t) - \phi_N(x + dx, t) = -\frac{\partial \phi_N}{\partial x} dx = D \cdot S \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} dx$ . D'où

$$\frac{\partial n_0(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n_0(x, t)}{\partial x^2}$$



**Exercice 2.4** pour s'entraîner

### Diffusion de particules à une dimension avec absorption et création

Quelle est l'équation que suit  $n_0$ , la densité volumique de particules dans un milieu homogène à une dimension  $x$ , de coefficient de diffusion  $D$ , avec création et annihilation ?

On va faire un bilan pour un cylindre de section  $S$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

En  $x$ , le flux de particules est  $\phi_N(x, t) = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S} = -D \cdot S \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)_x$ .

En  $x + dx$ , le flux de particules est  $\phi_N(x + dx, t) = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S} = -D \cdot S \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)_{x+dx}$ .

Le nombre de particules est  $N_0 = n(x, t) \cdot S \cdot dx$ .

Le bilan est  $\frac{dN_0}{dt} = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} S \cdot dx = +\phi_N(x,t) - \phi_N(x+dx,t) + C \cdot S \cdot dx - A \cdot S \cdot dx = -\frac{\partial \phi_N}{\partial x} dx + C \cdot S \cdot dx - A \cdot S \cdot dx = D \cdot S \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} dx + C \cdot S \cdot dx - A \cdot S \cdot dx$ .

Dans un milieu homogène à une dimension  $x$ , de coefficient de diffusion  $D$ , avec création volumique  $C$  et annihilation volumique  $A$ ,

$$\frac{\partial n_0(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n_0(x,t)}{\partial x^2} + C - A$$



application  
directe

**Exercice 2.5** pour s'entraîner

### Création par réaction en chaîne dans un réacteur nucléaire

On s'intéresse aux neutrons créés par la réaction nucléaire qui a lieu dans le cœur du réacteur. Chaque neutron va casser plusieurs noyaux et ainsi donner naissance à de nouveaux neutrons.

Ecrire l'équation de diffusion pour la densité  $n_0$  des neutrons.

Sachant que le terme de création est proportionnel à  $n_0$ , on peut écrire  $C = c \cdot n_0$ ,  
soit  $\frac{\partial n_0(x,t)}{\partial t} = D \cdot \Delta \cdot n_0(x,t) + c \cdot n_0(x,t)$ .



application  
directe

**Exercice 2.6** pour s'entraîner

### Source radioactive de particules

On s'intéresse à une source qui génère par une réaction radioactive des particules en un point  $O : \left(\frac{dN}{dt}\right)_O = S_0$ . On se place en régime permanent. Les particules diffusent avec un coefficient  $D$  dans le milieu environnant. Comme la diffusion est isotrope, la densité  $n_0$  des particules ne dépend que du rayon  $r$  dans les coordonnées sphériques.

- 1) Dédurre l'équation différentielle suivie par  $n_0$  grâce à l'expression du laplacien en sphérique :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

si  $f(r, t)$ .

- 1)  $\frac{dN}{dt} = 0 = +\phi_n(r_0) - \phi_n(r+dr)$  en orientant le flux vers les  $r$  croissants.

Comme  $\phi_n(r) = -4 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial r}\right)_r = S_0$ ,

$$\phi_n(r+dr) = -4 \cdot \pi \cdot (r+dr)^2 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial n_0}{\partial r}\right)_{r+dr} = -4 \cdot \pi \cdot r^2 \left(1 + 2\frac{dr}{r}\right) \cdot D \cdot \left[\left(\frac{\partial n_0}{\partial r}\right)_r + \left(\frac{\partial^2 n_0}{\partial r^2}\right)_r \cdot dr\right],$$

soit au premier ordre  $\phi_n(r+dr) = -\phi_n(r) - 4 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot dr \cdot D \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 n_0}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial n_0}{\partial r}\right)_r\right]$ ,

On trouve donc  $D \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 n_0}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial n_0}{\partial r}\right)_r\right] = 0$ .

$$2) \Delta f = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\mu_2 \cdot \mu_3}{\mu_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mu_3 \cdot \mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$$

soit  $\Delta n_0(r) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \sin \theta \cdot \frac{\partial n_0}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \left[ 2 \cdot r \cdot \frac{\partial n_0}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 n_0}{\partial r^2} \right]$  ce qui redonne bien la même équation de diffusion.



application  
directe

**Exercice 2.7** pour s'entraîner

### Diffusion dans un tube

Soit  $n(x, t) = n_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$ , la densité de particules diffusantes dans un tube d'axe  $Ox$  ( $x$  est compris entre 0 et  $h$ ). On note  $S$  la section du tube,  $h$  sa longueur et  $D$  le coefficient de diffusion.

- 1) Exprimer le nombre total de particules contenues dans le tube.
- 2) Exprimer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$ .
- 3) Exprimer le flux par unité de temps des particules qui traversent une surface  $S$  placée en  $x = \frac{h}{2}$ .

- 1) Le nombre total de particules contenues dans le tube est

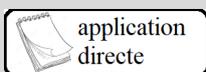
$$N = S \int_{x=0}^{x=h} n(x) dx = S n_0 \int_{x=0}^{x=h} e^{-\frac{x}{a}} dx = S n_0 \left[ -a e^{-\frac{x}{a}} \right]_{x=0}^{x=h} = a S n_0 \left[ 1 - e^{-\frac{h}{a}} \right]$$

- 2) Le vecteur densité de courant est

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}n} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x = + \frac{D n_0}{a} e^{-\frac{x}{a}} \vec{e}_x$$

- 3) Le flux par unité de temps des particules qui traversent une surface  $S$  placée en  $x = \frac{h}{2}$  est

$$\Phi_N = \iint_{x=\frac{h}{2}} \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S} = S \frac{D n_0}{a} e^{-\frac{h}{2a}}$$



application  
directe

**Exercice 2.8** pour s'entraîner

### Séparation isotopique

L'uranium naturel contient une faible proportion (0,72%) de l'isotope 235, qui seul intéresse l'industrie nucléaire, le reste étant de l'isotope 238. Il convient donc d'enrichir le minerai naturel en  $^{235}\text{U}$ . On commence pour cela à préparer l'hexafluorure  $\text{UF}_6$ , gazeux.

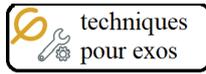
La diffusion est d'autant plus rapide que les molécules sont plus légères (loi de Graham) : le coefficient de diffusion dépend de la masse molaire  $M$  en  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ .

On arrive à une séparation acceptable moyennant de très nombreux passages successifs du mélange gazeux à travers des cloisons poreuses.

1) Calculer le rapport  $r$  des vitesses de diffusion de  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$ , connaissant la masse molaire du fluor :  $M(\text{F}) = 19 \text{g.mol}^{-1}$ .

- 1) Les vitesses de diffusion de  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$  sont dans le rapport :

$$r = \frac{v(^{235}\text{UF}_6)}{v(^{238}\text{UF}_6)} = \sqrt{\frac{238 + 6.M(\text{F})}{235 + 6.M(\text{F})}} = 1,00429$$



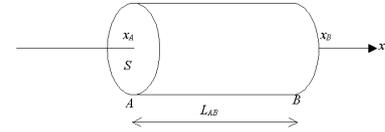
**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

## Solution de l'équation de diffusion en régime permanent

### Dans une géométrie unidimensionnelle

Une double intégration de  $\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} = \frac{d^2 n_0}{dx^2} = 0$  montre que  $n_0(x)$  est une fonction affine et  $\vec{j}_N$  est constante.

On peut alors, pour un flux (constant) de particules  $\Phi_N = \iint \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S}$  orienté de A vers B, montrer que  $n_0(B) - n_0(A) = R_N \Phi_N$  (équivalent d'une loi d'Ohm). **Attention!** Il faut "se mettre en convention récepteur", c'est-à-dire en orientant le flux dans le sens opposé à la différence des densités.



### Dans une géométrie cylindrique ou sphérique

**Attention!**  $n_0(x)$  n'est pas une fonction affine et  $\vec{j}_N$  n'est pas constante. Il faut intégrer  $\Delta n_0 = 0$ .

## Cas du régime quelconque

### Analyser l'équation en ordre de grandeur

On voit, en ordre de grandeur, que  $\frac{1}{\tau} \approx \frac{D}{\ell^2}$  où  $\tau$  et  $\ell$  sont respectivement une durée et une longueur caractéristiques. Si  $\ell \rightarrow 2\ell$ , alors  $\tau \rightarrow 4\tau$ .

### Utiliser le modèle probabiliste

Grâce au modèle probabiliste, on peut évaluer le coefficient de diffusion  $D$  en fonction du libre parcours moyen  $\ell_m$  et de la vitesse quadratique  $v_q$  :  $D \approx \ell_m v_q$ .

### Vérifier qu'une solution fournie convient

Il s'agit de calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial n_0}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial n_0}{\partial x}$  puis  $\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$ .

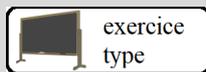
## Déterminer les constantes

### Utiliser les conditions aux limites

Les conditions aux limites peut porter sur  $n_0$  ou sur son flux ( $\Phi_N = \iint \vec{j}_N \cdot d^2\vec{S}$ ).

### Utiliser la conservation des particules

Si les particules se conservent,  $N = \iiint n_0 d^3\tau = \text{cste}$ .



### Exercice 2.9 (le prof fait cet exercice type jeudi)

#### Solutions de l'équation de diffusion

On se place dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien.

- 1) En régime permanent
  - 1.a) Déterminer la solution de l'équation de diffusion.
  - 1.b) Montrer que le flux de particules se conserve.
  - 1.c) Trouver une relation de proportionnalité entre ce flux de particules et la différence des densités.

Comparer à la loi d'Ohm en électricité.

- 2) En régime quelconque
  - 2.a) Analyser l'équation en ordre de grandeur.
  - 2.b) Vérifier que la fonction gaussienne  $n_0(x, t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$  convient.
  - 2.c) Discuter la limite  $t \rightarrow \infty$ .
  - 2.d) Comparer la largeur à mi-hauteur de la gaussienne à celle trouvée précédemment.

1) En régime permanent

1.a) La densité est  $n_0(x)$  :

$$\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} = \frac{d^2 n_0}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dn_0}{dx} = a = \text{cste} \Rightarrow n_0 = ax + b = \frac{n_0(\ell) - n_0(0)}{\ell} x + n_0(0)$$

1.b) Le flux de particules (orienté vers les  $x$  croissants) est :

$$\Phi_N = \iint \vec{j}_N \cdot d^2 \vec{S} = S j_{N_x} = -D S \frac{\partial n_0}{\partial x} = -D S a$$

Il se conserve.

1.c) On a vu que  $a = \frac{n_0(\ell) - n_0(0)}{\ell}$ , aussi

$$\Phi_N - D S \frac{n_0(\ell) - n_0(0)}{\ell} \Rightarrow n_0(0) - n_0(\ell) = \frac{\ell}{D S} \Phi_N$$

qui est comme la loi d'Ohm en électricité, avec une résistance  $R_N = \frac{\ell}{D S}$ .

2) En régime quelconque

2.a) On voit, en ordre de grandeur, en notant  $\tau$  et  $\ell$  sont respectivement une durée et une longueur caractéristiques, que

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{D}{\ell^2} \Rightarrow \ell \approx \sqrt{D \tau}$$

2.b) Partons de la fonction gaussienne :

$$n_0(x, t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4D t}}$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{A}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{x^2}{4D t}} \left( -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4D} (-t^{-2}) t^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{x^2}{4D t}} t^{-\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{2x^2}{4D t} \right)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial x} = -\frac{2x}{4D t} \frac{A}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4D t}} = -\frac{1}{2D} \frac{A}{\sqrt{4\pi D}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4D t}} x$$

$$\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} = -\frac{1}{2D} \frac{A}{\sqrt{4\pi D}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4D t}} \left( 1 - \frac{2x}{4D t} x \right)$$

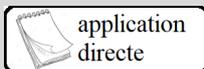
On a bien  $\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$  : la fonction proposée est bien solution de l'équation de diffusion.

2.c) Pour les temps longs, on aboutit à une fonction nulle, donc affine!

2.d) La largeur à mi-hauteur est telle que

$$\frac{N}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{\Delta x^2}{16D t}} = \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{4\pi D t}} \Leftrightarrow e^{-\frac{\Delta x^2}{16D t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta x^2 = 16 \ln(2) D t$$

soit  $\Delta x = 4\sqrt{\ln(2) D t}$ . La largeur à mi-hauteur de la gaussienne n'est pas loin de  $\sqrt{D t}$  car  $4\sqrt{\ln(2)} = 2,8$ .



application  
directe

**Exercice 2.10** pour s'entraîner

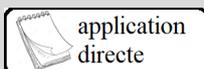
**Temps de diffusion du  $CO_2$  dans une pièce**

On donne le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans l'air :  $D = 0,14 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$ .

1) Calculer l'ordre de grandeur de la durée  $t$  que mettrait du dioxyde de carbone à diffuser dans une salle dont le volume vaut  $V = 50 m^3$ .

1)  $L^2 = D \cdot t$ , d'où :

$$t = \frac{V^{\frac{2}{3}}}{D} = 11 \text{ jours}$$



application  
directe

**Exercice 2.11** pour s'entraîner

**Diffusion de la vapeur d'eau au dessus de l'eau bouillante**

De l'eau est portée juste à ébullition dans un b cher, de sorte qu' sa surface de cote  $z = 0$ , la densité moléculaire prenne la valeur fixée

$$n(z = 0) = n_0 = \frac{P_0}{k_B T}$$

où  $P_0 = 1,0 \times 10^5$  Pa est la pression de vapeur saturante de l'eau  100 C. Le b cher est fermé et surmonté d'un tube vertical de section  $S$  et de hauteur  $L$ . Soit  $n(z, t)$  la densité de vapeur d'eau qui diffuse dans l'air avec un coefficient de diffusion  $D$ . A l'extrémité supérieure, un courant d'air impose une densité volumique de courant de particules

$$j_N(z = L, t) = k n(z = L, t)$$

où  $k$  est une constante positive.

1) Etablir l'équation locale de diffusion.

2) Résoudre cette équation dans le cas stationnaire : déterminer  $n(z)$  et  $j_N$  en fonction de  $z$ ,  $k$ ,  $D$ ,  $n_0$  et  $L$ .

1) Un bilan pour un système de section  $S$  compris entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  donne :

$$\frac{dN}{dt} = S dz \frac{\partial n}{\partial t}$$

et

$$\frac{dN}{dt} = S j_z(z, t) - S j_z(z + dz, t) = -S \frac{\partial j_z}{\partial z} dz$$

Donc

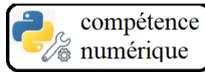
$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

d'après la loi de Fick.

2) Dans le cas stationnaire,  $n(z) = a z + b$ . Les conditions aux limites sont :

- en  $z = 0$ ,  $n(z = 0) = b = n_0$
- en  $z = L$ ,  $j_N(z = L, t) = k n(z = L, t) = k(a L + n_0) = -D \frac{dn}{dz} = -D a$ .

Donc  $(k L + D) a = -k n_0 \Rightarrow a = \frac{-k n_0}{k L + D}$ . D'où  $n(z) = \frac{-k n_0}{k L + D} z + n_0$  et  $j_N(z) = \frac{D k n_0}{k L + D}$ .



## Exercice 2.12 (le prof présente les résultats jeudi) Marche au hasard et diffusion des particules

### Extrait de l'aide fournie au concours CentraleSupélec

Les fonctions d'échantillonnage et de génération de valeurs pseudo-aléatoires sont regroupées dans la bibliothèque **numpy.random**.

L'expression **randint(a, b)** permet de choisir un entier au hasard dans l'intervalle  $[a, b[$ . La fonction **randint** prend un troisième paramètre optionnel permettant d'effectuer plusieurs tirages et de renvoyer les résultats sous forme de tableau ou de matrice.

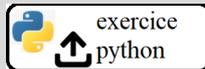
La fonction **random** renvoie un réel compris dans l'intervalle  $[0, 1[$ . Si  $X$  désigne la variable aléatoire correspondant au résultat de la fonction **random**, alors pour tout  $a$  et  $b$  dans  $[0, 1[$  avec  $a \leq b$ , on a  $P(a \leq X < b) = b - a$ . Cette fonction accepte un paramètre optionnel permettant de réaliser plusieurs tirages et de les renvoyer sous forme de tableau ou de matrice.

### Exemple de code python à adapter

```
# ouverture des bibliothèques
import numpy as np
import numpy.random as rd      # fonction random.normal de la bibliothèque numpy
import matplotlib.pyplot as plt # fonction hist de la bibliothèque matplotlib.pyplot

# tirage au sort parmi un ensemble d'entiers (comme un tirage de dé)
A=rd.randint(1, 7, 1000) # tableau 1d de 1000 nombres entiers entre 1 et 7, 7 exclus.
print(f"espérance: = {A.mean()}")      # affichage de la moyenne
print(f"écart-type: = {A.std(ddof=1)}") # affichage de l'écart type

# affichage de l'histogramme
plt.clf()
plt.hist(A,color='blue'
        ,bins='rice'      # intervalle de population (lissage)
        ,density=True)    # normalisation des populations
plt.show()
```



## Exercice 2.12 (code python à téléverser avant dimanche 24h sur cahier de prépas) Marche au hasard et diffusion des particules

On peut imaginer un individu (ou « particule ») sur un escalier, qui tire à pile ou face pour décider si le prochain pas sera vers le haut ou vers le bas. Après  $n$  pas au total,  $P(X_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$  si  $n$  et  $k$  ont même parité, = 0 sinon. L'espérance est nulle ; la variance vaut  $n$  et l'écart type  $\sqrt{n}$  ; on a toujours la loi des grands nombres : le théorème central limite établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme qu'une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes tend (le plus souvent) vers une variable aléatoire gaussienne d'espérance  $\mu$ , et d'écart type  $\sigma$  est donnée par :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ . (issus d'articles wikipedia)

#### 1) Tracé de marches au hasard

Une particule partant de  $x = 0$  suit une marche au hasard, tous les pas de temps  $\tau$  elle se déplace de  $\ell$  vers la gauche ou la droite de façon équiprobable. Superposer plusieurs marches au hasard dans un graphique où  $x$  est l'abscisse et  $t$  l'ordonnée.

#### 2) Répartition des particules ayant subi des marches au hasard au bout d'une durée donnée

On s'intéresse désormais à  $Np$  particules partant de  $x = 0$  qui suivent une marche au hasard (tous les pas de temps  $\tau$  elle se déplace de  $\ell$  vers la gauche ou la droite de façon équiprobable) durant  $Nt$  pas de temps.

**2.a)** Calculer l'espérance et l'écart-type de la distribution des endroits d'arrivée de ces  $Np$  marches au hasard.

**2.b)** Tracer l'allure de l'histogramme représentant les probabilités de la distribution des endroits d'arrivée de ces  $Np$  marches au hasard et superposer la loi normale adaptée.

## 1) Diverses marches au hasard

```

# ouverture des bibliothèques
import numpy as np
import numpy.random as rd # fonction random.normal de la bibliotheque numpy
import matplotlib.pyplot as plt # fonction hist de la bibliotheque matplotlib.pyplot

def Tirage(N):
    return (rd.randint(0, 2, N-1)-0.5)*2 # 0 ou 1 décalé de -0,5 puis multiplié par 2

N=100000 # nombre de tirages
tau=1 # pas de temps
l=1 # déplacement élémentaire
Ntot = 1000 # taille du nombre de tirages
Positions=np.zeros(Ntot) # préparation du tableau des positions avec état initial
Dates=np.arange(Ntot)*tau # tableau des dates

def chemin():
    T=Tirage(Ntot) # création du tableau des tirages au sort
    # remplissage du tableau des position par incrémentation
    for nt in range(0, Ntot-1,1):
        Positions[nt+1]=Positions[nt]+T[nt]*l
    plt.plot(Positions,Dates) # affichage du chemin

# affichage des chemins
plt.clf()
for n_chemin in range(0, 20,1):
    chemin()
plt.show()

```



## 2) Répartition des positions après le même nombre d eps pour plusieurs marches au hasard

```

▶ def gaussienne(x,sigma,mu):
    return 1/(sigma * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp( - (x - mu)**2 / (2 * sigma**2) )

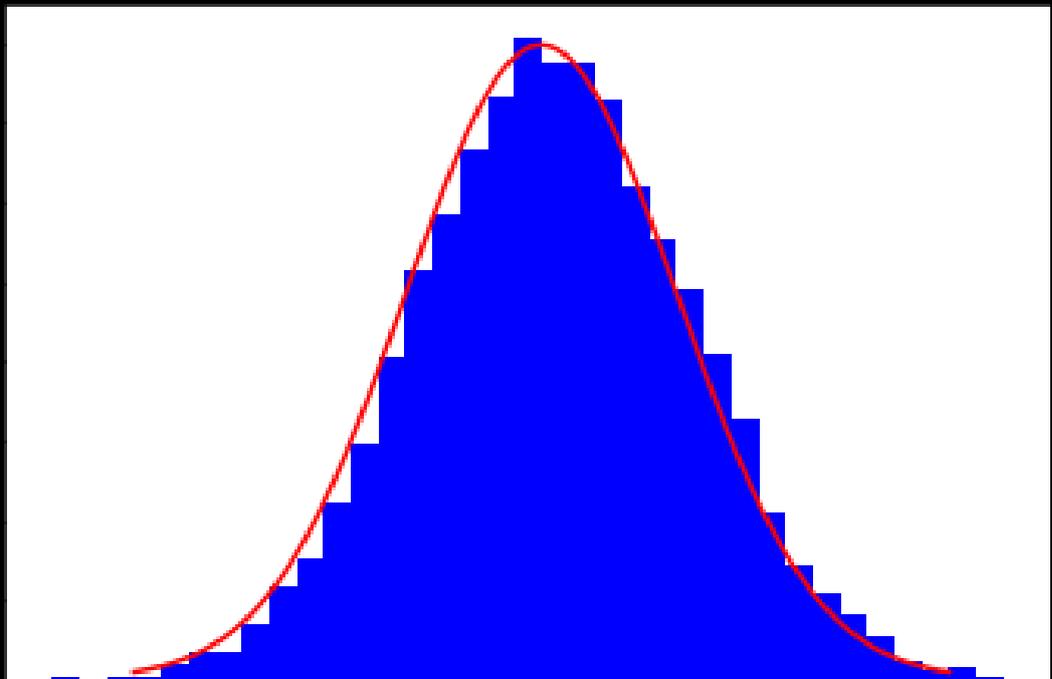
Np = int(5000)      # taille du nombre de chemins (ou de particules)
Nt = int(101)      # taille du nombre de tirages pour chaque chemin
Xfin = np.zeros(Np) # préparation du tableau des positions finales

for nc in range(0, Np-1,1): # boucle sur le numéro du chemin
    T=Tirage(Nt)           # tirage de Nt pas
    Xfin[nc]=T.sum()       # x d'arrivée = somme de tous les tirages au sort

print(f"espérance: = {Xfin.mean()} | valeur théorique = 0")
print(f"écart-type: = {Xfin.std(ddof=1)} | valeur théorique = {(np.sqrt(Nt))}")

# affichage
X = np.arange(-3*Xfin.std(ddof=1),3*Xfin.std(ddof=1),1/Np) # zone de variation de x (+-3 ecarts type)
plt.clf()
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("densité de probabilité")
plt.hist(Xfin,color='blue'
        ,bins='rice'           # on choisit un intervalle de population quelconque (lissage)
        ,density=True)        # normalisation des populations de chemins (pour comparer à la gaussienne)
plt.plot(X,gaussienne(X,Xfin.std(ddof=1),0), color='red')
plt.show()

```



### Exercice 2.13 pour s'entraîner

## Densité de probabilité gaussienne

On admet que

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{cases}$$

- 1) Déterminer le coefficient de normalisation  $A$  de la densité de probabilité  $p(x, t) = Ae^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ .
- 2) Calculer  $\langle x \rangle$ , la valeur moyenne de  $x$ .
- 3) Calculer  $\langle x^2 \rangle$ , la moyenne quadratique de  $x$ .

1) On pose  $\alpha = \frac{1}{4Dt}$ . Aussi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\alpha x^2} dx = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

donc

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

2) Comme la fonction  $x e^{-\alpha x^2}$  est impaire,

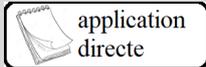
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x A e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

3)

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

On remplace  $\alpha$  par  $\frac{1}{4Dt}$  :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{4Dt}{2} \sqrt{4\pi Dt} = 2Dt$$



application  
directe

**Exercice 2.14** pour s'entraîner

### De la marche au hasard à la la formule d'Einstein

On admet que les trois directions de l'espace étant indépendantes,

$$\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle$$

1) Le modèle de la marche au hasard à une dimension suivant  $x$  donne à la date  $t$  :

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion. En déduire  $\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$  pour un modèle à trois dimensions.

2) L'observation du mouvement brownien de particules de taille  $a$  à la surface d'un liquide de viscosité  $\eta$  à la température  $T$  aboutit à la relation :

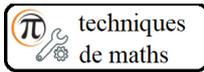
$$\langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2k_B T}{3\pi\eta a} t$$

En déduire le coefficient de diffusion  $D$  de ces particules de taille  $a$  dans le volume du liquide de viscosité  $\eta$  à la température  $T$ .

1) Pour un modèle à trois dimensions :  $\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle = 6Dt$ .

2) A 2D :  $\langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2k_B T}{3\pi\eta a} t = 2 \langle x^2 \rangle = 4Dt$ , donc

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}$$



## Techniques mathématiques à maîtriser Calcul de l'opérateur gradient

### Définition du gradient :

On posera  $df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{d\ell}$  donc  $\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{d\ell} = f(B) - f(A)$ .

### Dans le repère cartésien :

Rappelons que  $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$  et, comme en coordonnées cartésiennes  $\overrightarrow{d\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$ , on peut écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{u}_z$$

### Expression avec l'opérateur nabla : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$

en posant l'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes seulement!!!

### Dans le repère cylindrique :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

mais cette fois

$$\overrightarrow{d\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{u}_z$$

### Dans le repère sphérique :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) d\varphi$$

mais cette fois

$$\overrightarrow{d\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

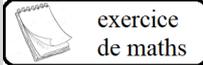
donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \vec{u}_\varphi$$

### Expression dans un repère quelconque :

dans n'importe quel repère, on peut écrire  $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{pmatrix}$  avec

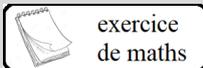
Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

exercice  
de maths**Exercice 2.15** pour s'entraîner**Calcul d'un gradient en coordonnées cartésiennes**1) Donner l'expression de  $\vec{\text{grad}}f$  pour  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$ .1) On calcule les dérivées partielles de  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

d'où  $\vec{\text{grad}}f = \frac{2x}{y}\vec{u}_x - \frac{x^2}{y^2}\vec{u}_y + \vec{u}_z$ .exercice  
de maths**Exercice 2.16** pour s'entraîner**Calcul d'un gradient en coordonnées cylindriques**1) Donner l'expression de  $\vec{\text{grad}}f$  pour  $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$ .1) On calcule les dérivées partielles de  $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$  :

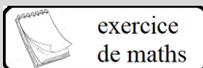
$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

et on utilise le formulaire :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

d'où  $\vec{\text{grad}}f = -\frac{2 \cos \theta}{r^3}\vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r^3}\vec{u}_\theta$ .exercice  
de maths**Exercice 2.17** pour s'entraîner**Calcul d'un gradient en coordonnées sphériques**1) Donner l'expression de  $\vec{\text{grad}}f$  pour  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$ .1) On calcule les dérivées partielles de  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3}$$

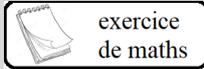
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r^2}$$

et on utilise le formulaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{\text{grad}}f = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_\theta + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta r^3} \vec{u}_\varphi.$$



exercice  
de maths

**Exercice 2.18** pour s'entraîner

### Calcul d'un autre gradient en coordonnées sphériques

1) Donner l'expression de  $\overrightarrow{\text{grad}}f$  pour  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{-\cos \theta}{r^2}$ .

1) On calcule les dérivées partielles de  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{-\cos \theta}{r^2}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

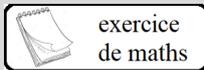
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

et on utilise le formulaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta.$$



exercice  
de maths

**Exercice 2.19** pour s'entraîner

### Calcul d'une variation finie à partir d'un gradient

1) On donne  $\overrightarrow{\text{grad}}f = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$ . Calculer  $\Delta f$  si on part de l'origine ( $x = y = 0$ ) pour aller en  $A(1, 1)$ .

1)

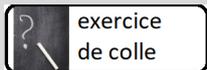
$$\overrightarrow{\text{grad}}f = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y \Rightarrow df = x dx + y dy$$

donc

$$\Delta f = \int_O^A df = \int_O^A (x dx + y dy)$$

On pose  $B(1, 0)$  et on peut écrire un chemin :

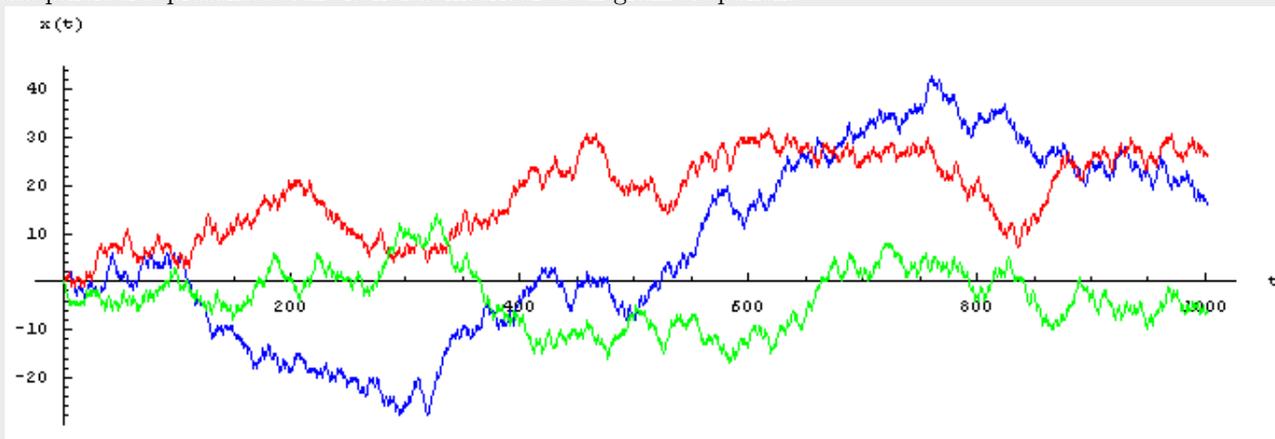
$$\Delta f = \int_O^B (x dx + y dy) + \int_B^A (x dx + y dy) = \int_O^B (x dx + 0 dy) + \int_B^A (1 dx + y dy) = \int_0^1 (x dx) + \int_0^1 (y dy) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



**Exercice 2.20**  
**Marche au hasard et densité de probabilité gaussienne**

En mathématiques, en économie, et en physique théorique, une marche au hasard est un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires, ou effectués « au hasard ». On emploie également fréquemment les expressions marche aléatoire, promenade aléatoire ou random walk en anglais. Ces pas aléatoires sont de plus totalement décorrélés les uns des autres ; cette dernière propriété, fondamentale, est appelée caractère markovien du processus, du nom du mathématicien Markov. Elle signifie intuitivement qu'à chaque instant, le futur du système dépend de son état présent, mais pas de son passé, même le plus proche. Autrement dit, le système « perd la mémoire » à mesure qu'il évolue dans le temps. Pour cette raison, une marche aléatoire est parfois aussi appelée « marche de l'ivrogne ».

Cette modélisation mathématique permet de rendre compte de certains phénomènes naturels, dont l'exemple le plus fameux est le mouvement brownien, correspondant par exemple aux mouvements en apparence aléatoires des particules présentes dans le fluide intérieur d'un grain de pollen.



La figure ci-dessus montre un échantillon de trois simulations numériques indépendantes de marches aléatoires pour une particule : on a tracé les positions successives  $x(t)$  de la particule aux instants  $t = 1, 2, \dots$ , partant de la condition initiale  $x(0) = 0$ .

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Marche\\_aléatoire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Marche_aléatoire)

1) Equation de diffusion

Montrer que  $n_0(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$  vérifie l'équation de diffusion à une dimension  $\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$ .

2) Marche au hasard

On s'intéresse à une particule qui se déplace selon l'axe  $x$  sur une longueur  $\ell$  vers la gauche ou vers la droite tous les  $\Delta t$ . On prendra  $n$  et  $k$  entiers et on appelle  $p(k, n)$  la probabilité d'être en  $x = k\ell$  à la date  $t = n \Delta t$ .

2.a) Que doit vérifier  $k$  pour que  $p$  soit non nul ?

2.b) Exprimer  $p(k, n)$  en utilisant la fonction  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

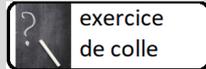
3) On suppose que  $n \gg 1$ . On admet que dans ce cas :

$$\frac{C_n^p}{2^n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp \left[ \frac{-2}{n} \left( \frac{n}{2} - p \right)^2 \right]$$

3.a) Que devient  $p(k, n)$  ?

3.b) En passant au continu, exprimer la densité de probabilité  $p(x, t)$  telle que  $p(x, t) \times 2\ell = p(k, n)$ .

3.c) On peut montrer que  $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ . Exprimer alors le coefficient de diffusion  $D$  en fonction de  $\ell$  et  $\Delta t$ .



exercice  
de colle

## Exercice 2.21 Modèle de Langevin de la diffusion à une dimension

L'étude du mouvement brownien, l'agitation de particules colloïdales en suspension dans un liquide, a eu une grande importance en Physique. C'est une preuve de l'agitation thermique à l'échelle des molécules du liquide. Einstein a donné une première théorie de cet effet (1905) avec sa célèbre formule reliant le coefficient de diffusion  $D$  au coefficient de viscosité  $\eta$ . L'approche d'Einstein est macroscopique et utilise la thermodynamique. Langevin (1908) propose une nouvelle approche. Il suit le mouvement d'une particule et décrit les chocs des molécules par une force aléatoire. Cette « équation de Langevin » s'est montrée particulièrement utile pour étudier les fluctuations moléculaires dans de nombreux systèmes, y compris dans la thermodynamique hors d'équilibre. Elle est toujours utilisée par les biophysiciens pour l'étude des fluides biologiques contenant de nombreuses particules en suspension.

<https://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2006/01/refdp20061p14.pdf>



© ESPCI, Centre de Ressources Historiques.

De gauche à droite : A. Einstein, P. Ehrenfest, P. Langevin, H. Kammerlingh Onnes et P. Weiss, photo prise en 1920.

On considère le mouvement à une dimension d'une particule de masse  $m$  le long d'un axe  $Ox$  (on note  $x$  et  $v$  les valeurs algébriques de la position et de la vitesse de la particule) soumise à une force "aléatoire"  $F(t)$  et à une force de frottement  $f = -\alpha v$ , où  $\alpha$  est une constante positive. Il n'y a pas de pesanteur dans ce modèle simple.

- 1) Montrer que l'équation du mouvement de la particule peut se mettre sous la forme :

$$m \frac{d}{dt}(xv) = mv^2 - \alpha xv + xF(t)$$

2) Compte tenu du caractère complexe de la force aléatoire  $F(t)$ , nous ne cherchons pas à résoudre directement l'équation du mouvement. En fait, sous certaines hypothèses, le mouvement "moyen" de la particule dépend peu de la forme exacte de la force aléatoire. Pour accéder à ce mouvement "moyen", on imagine qu'un grand nombre de particules se trouve initialement à la position  $x = 0$  à l'instant  $t = 0$ . Chaque particule vérifie, indépendamment des autres, l'équation du mouvement de la question précédente. En revanche, à chaque instant, la valeur de la force aléatoire diffère *a priori* d'une particule à l'autre.

L'opérateur mathématique noté  $\langle \dots \rangle$  permet de représenter symboliquement, à un instant donné, la valeur moyenne sur toutes les particules des grandeurs  $x$ ,  $v$ ,  $xv$ , etc.

Le caractère aléatoire de la force  $F(t)$  se traduit alors par  $\langle F \rangle(t) = 0$ . De plus, la position de la particule n'étant pas corrélée à la force, on a  $\langle xF \rangle = \langle x \rangle \langle F \rangle$ . Enfin, comme cet opérateur agit à un instant donné, on suppose qu'il commute avec l'opérateur de dérivée temporelle, soit :  $\frac{d\langle \dots \rangle}{dt} = \langle \frac{d\langle \dots \rangle}{dt} \rangle$ .

**2.a)** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\langle xv \rangle$ .

**2.b)** Pour un gaz de particules de masse  $m$  à la température  $T$ , donner la moyenne temporelle du carré d'une composante cartésienne de la vitesse, notée  $\overline{v_x^2}$ . Dans le reste de la question, on admettra que  $\langle v^2 \rangle = \overline{v_x^2}$ .

**2.c)** Compte tenu des conditions initiales, résoudre l'équation vérifiée par  $\langle xv \rangle$ .

**2.d)** En déduire  $\langle x^2 \rangle(t)$ .

**2.e)** Définir un temps caractéristique  $\tau$  séparant deux régimes dans l'évolution temporelle de  $\langle x^2 \rangle$ . Préciser l'évolution temporelle aux temps courts et aux temps longs. Commenter le mouvement "moyen" obtenu dans chaque régime. Que peut-on dire de l'effet combiné du frottement et de l'agitation thermique ? On posera dans la suite  $D = k_B T / \alpha$ .

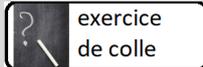
3) On s'intéresse dans cette question uniquement au comportement aux temps longs. On généralise, pour un mouvement à trois dimensions relativement à un repère cartésien  $(Oxyz)$ , le résultat obtenu pour le modèle à une dimension en supposant que :  $\langle x^2 \rangle(t) = \langle y^2 \rangle(t) = \langle z^2 \rangle(t)$ .

**3.a)** Quelle propriété du système peut-on invoquer pour justifier cette hypothèse ?

**3.b)** Déterminer  $\langle r^2 \rangle(t)$ , où  $r$  représente la distance de chaque particule au point  $O$ , en faisant apparaître le coefficient  $D$ .

**3.c)** Déterminer le temps  $\tau_D$  mis par une particule pour se déplacer en moyenne d'une distance égale à son diamètre  $2a$ .

**3.d)** On considère une particule sphérique de rayon  $a$  dans un liquide de viscosité  $\eta$ . Donner l'expression de  $\tau_D$  en fonction de  $k_B$ ,  $T$ ,  $\eta$  et  $a$ .



exercice  
de colle

### Exercice 2.22 Diffusion en marche

Une cuve parallélépipédique, d'axe  $Ox$  et de section  $S$  comprend deux compartiments : initialement

- le compartiment  $z > 0$  contient un solvant avec un soluté dilué homogène de densité moléculaire  $C_{01}$  ;
- le compartiment  $z < 0$  contient le même solvant et le même soluté dilué homogène de densité moléculaire  $C_{02} \neq C_{01}$ .

À l'instant  $t = 0$ , on supprime la paroi qui sépare les deux compartiments et le soluté diffuse avec un coefficient de diffusion  $D$  le long de la direction  $\vec{u}_z$ .

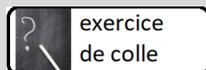


- 1) Démontrer l'équation de diffusion suivie par la densité moléculaire  $C(z)$ .
- 2) Conditions initiales et aux limites :
  - 2.a) Quelles sont les conditions initiales  $C(z, t = 0)$  ?
  - 2.b) Quelles sont les conditions aux limites  $C(z \rightarrow -\infty, t)$  et  $C(z \rightarrow +\infty, t)$  ?
  - 2.c) Quelles sont les deux conditions de continuité en  $z = 0$  pour  $t > 0$  ?
- 3) On cherche une solution de la forme :

$$\begin{cases} C(z < 0, t) = A_- + B_- \int_{-\infty}^v e^{-u^2} du \\ C(z > 0, t) = A_+ + B_+ \int_{+\infty}^v e^{-u^2} du \end{cases}$$

avec  $v = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$ . On donne  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

- 3.a) Vérifier que les fonctions proposées sont bien solution de l'équation de diffusion.
  - 3.b) Déterminer les constantes  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $B_+$  et  $B_-$ .
- 4) Interprétation
    - 4.a) Tracer l'allure de la fonction  $f(v) = \int_{-\infty}^v e^{-u^2} du$ .
    - 4.b) Sur un même graphique, tracer les allures de  $C(z, t_1)$  et  $C(z, t_2)$  pour  $t_2 > t_1$ .



exercice  
de colle

### Exercice 2.23

#### Etude de la solution gaussienne à l'équation de diffusion

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est en lien avec de nombreux objets mathématiques dont le mouvement brownien, le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Plus formellement, c'est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance et son écart type.

La courbe de cette densité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche, entre autres. C'est la représentation la plus connue de cette loi. La loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_normale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_normale)



Gauss. Tableau de Gottlieb Biermann (1887), d'après un portrait par Christian Albrecht Jensen (1840).

#### 1) Gaussienne

On admet que

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{cases}$$

**1.a)** Déterminer le coefficient de normalisation  $A$  de la densité de probabilité  $p(x, t) = Ae^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ .

**1.b)** Calculer  $\langle x \rangle$ , la valeur moyenne de  $x$ .

**1.c)** Calculer  $\langle x^2 \rangle$ , la moyenne quadratique de  $x$ .

#### 2) Equation de diffusion

Montrer que  $n_0(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$  vérifie l'équation de diffusion à une dimension  $\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$ .

#### 3) Etude de la fonction.

**3.a)** Montrer que  $n_0(x, t)$  à  $t$  fixée est paire.

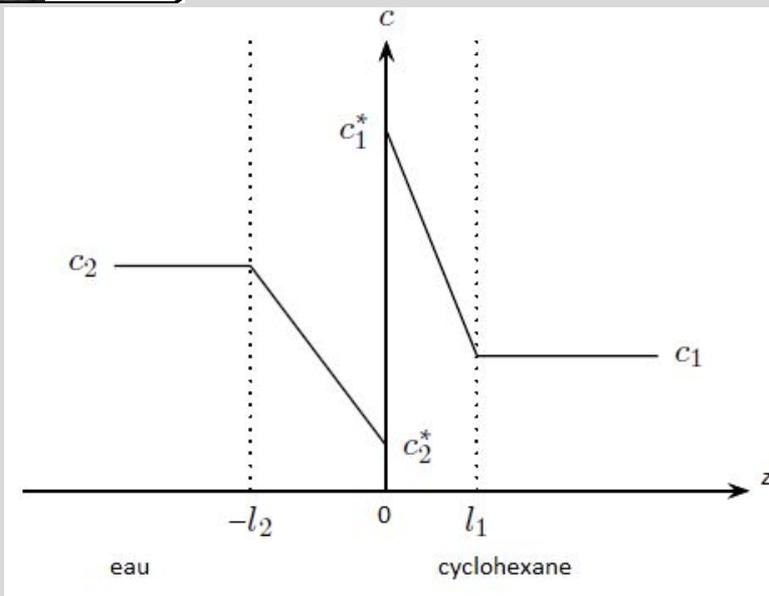
**3.b)** Calculer  $\Delta x(t)$  la largeur à mi-hauteur, telle que  $n_0\left(\pm \frac{\Delta x(t)}{2}, t\right) = \frac{n_0(0, t)}{2}$ .

**3.c)** Tracer l'allure de  $n_0(x, t)$  en fonction de  $x$  à plusieurs dates  $t$ .

**3.d)** Interprétation : comment varie la largeur à mi-hauteur  $\Delta x(t)$  avec  $t$ ? Retrouver un équivalent de  $\Delta x(t)$  en utilisant l'équation de diffusion.

exercice de colle

**Exercice 2.24**  
**Diffusion du diiode**



Une ampoule à décantée est modélisée par un cylindre vertical de section  $S$ , d'axe  $Oz$  vertical (vers le haut). Elle contient

- de l'eau pour  $z \in [-h_2; 0]$
- et du cyclohexane pour  $z \in [0; +h_1]$ .

On propose dans ce qui suit un modèle simplifié de l'étude cinétique du transfert du diiode contenu initialement dans l'eau vers la phase organique du cyclohexane.

A l'instant  $t$ , on assimile la concentration à la courbe représentée ci-dessus. Les concentrations  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_2^*$  et  $c_1^* = K c_2^*$  (où  $K$  est une constante) dépendent du temps.

On suppose que la quantité de diiode dans les couches limites (d'épaisseur  $l_1$  et  $l_2$ ) est négligeable devant celle contenue dans le reste du récipient. On néglige le volume de ces couches limites devant les volumes  $V_2$  de l'eau et  $V_1$  du cyclohexane.

Les coefficients de diffusion du diiode dans l'eau et dans le cyclohexane sont notés respectivement  $D_2$  et  $D_1$ . A  $t = 0$ ,  $c_1(0) = 0$  et  $c_2(0) = c_0$ .

1) Montrer que  $c_0 h_2 = c_1(t) h_1 + c_2(t) h_2$ .

2) On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface, de sorte que le régime est quasi-permanent (la durée caractéristique de variation des concentrations est très grande devant la durée caractéristique de la diffusion).

2.a) Justifier le profil des concentrations ci-dessus.

2.b) Quelle est l'expression du vecteur densité de courant de matière  $\vec{j}_2$  dans l'eau, et  $\vec{j}_1$  dans le cyclohexane ?

2.c) Donner deux expressions de la quantité de diiode  $\frac{dn}{dt}$  qui passe par unité de temps de l'eau vers le cyclohexane.

3) Montrer qu'on peut exprimer  $c_1(t)$ ,  $c_2^*(t)$  et  $c_1^*(t)$  en fonction de  $c_2(t)$  et de constantes définies dans l'énoncé.

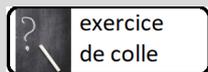
4) Evolution de  $c_2(t)$  :

4.a) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $c_2(t)$  est

$$\tau \frac{dc_2}{dt} + c_2 = \alpha c_0$$

avec  $\tau$  et  $\alpha$  deux constantes positives.

4.b) Expérimentalement,  $\tau = 14$  h et  $\alpha = 0,02$ . Interprétation ?



exercice  
de colle

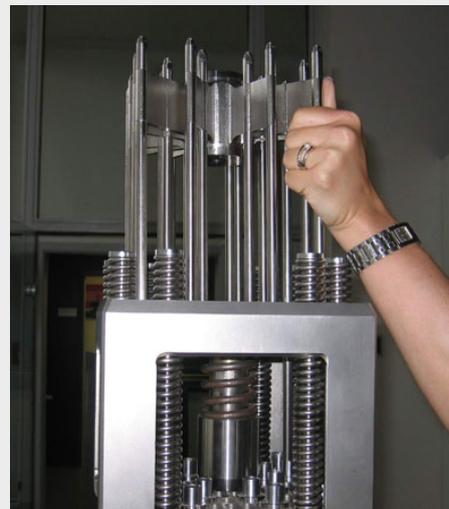
### Exercice 2.25 Absorption de neutrons par le bore

Aussi bien en radioprotection que pour réguler la marche des réacteurs, il est nécessaire de pouvoir absorber ou de réduire le flux de neutrons.

On emploie pour ce faire des matériaux absorbeurs de neutrons, soit sous forme métallique soit sous forme de composés. Les principaux absorbeurs de neutrons sont le cadmium et le bore. On utilise également le hafnium, et parfois une terre rare, le gadolinium. Ces éléments naturels doivent leur qualité absorbante à la présence d'isotopes pour lesquels la probabilité de capture de neutrons est exceptionnellement élevée.

On a recours à ces absorbeurs dans les réacteurs, car leur probabilité de capture - appelée section efficace - est très supérieure à celle des fissions qu'il s'agit de réguler. Ils se comportent comme des poisons. Selon la quantité introduite, leur introduction ralentit ou étouffe la réaction en chaîne.

[http://www.laradioactivite.com/site/pages/Absorbeurs\\_Neutrons.htm](http://www.laradioactivite.com/site/pages/Absorbeurs_Neutrons.htm)



On considère une assemblée de neutrons dans un milieu leur faisant subir de nombreux chocs, qui leur communiquent une vitesse d'agitation moyenne constante  $v$ . On appellera  $n(x, y, z, t)$  le nombre de neutrons par unité de volume.

1) Rappeler la loi de Fick qui donne le vecteur densité de courant de neutrons  $\vec{j}_n$ , dont le flux à travers une surface quelconque est égal au nombre de neutrons traversant cette surface par unité de temps.

Le milieu absorbe les neutrons et on supposera que chaque neutron parcourt une distance  $\lambda_a$  jusqu'à son absorption. Le nombre  $A$  de réactions d'absorption par seconde et par unité de volume est  $A = \frac{n v}{\lambda_a}$ .

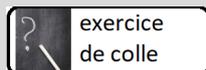
2) Vérifier que cette relation est homogène.

3) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par  $n$ .

On se place dans un milieu semi-infini situé dans le demi-espace correspondant aux valeurs positives de  $x$  (un mur). Il est limité en  $x = 0$  par une source plane délivrant  $N_0$  neutrons par unité de surface et par seconde.

4) Calculer la densité de neutrons  $n(x)$  en régime permanent.

5) Déterminer l'épaisseur  $L$  du mur pour diminuer la densité de neutrons d'un facteur 1000.

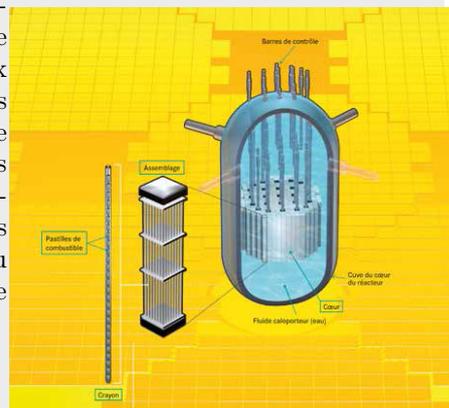


exercice  
de colle

### Exercice 2.26 Stabilité d'un réacteur nucléaire

Dans un réacteur, le contrôle permanent de la réaction en chaîne est assuré grâce à des barres de commande. Ces barres sont mobiles dans le cœur du réacteur : elles peuvent être descendues pour réduire le taux de fission, remontées pour le maintenir ou l'augmenter. La plupart des réacteurs comporte ce que l'on appelle un modérateur. Son rôle est de ralentir les neutrons libérés lors de la fission nucléaire, trop énergétiques pour provoquer efficacement une nouvelle fission. Les neutrons sont freinés lorsqu'ils traversent une matière composée d'atomes à noyaux légers qui ne les absorbe pas, comme de l'eau ou du graphite par exemple. Au final, cela permet de les ralentir, les faisant passer d'une vitesse initiale de l'ordre de 20 000 km/s à une vitesse d'environ 2 km/s.

<http://www.cea.fr/comprendre/Pages/energies/nucleaire/fonctionnement-reacteur-nucleaire.aspx?Type=Chapitre&numero=2>



1) On considère une assemblée de neutrons dans un milieu leur faisant subir de nombreux chocs, qui leur communiquent une vitesse d'agitation moyenne constante  $v$ . On appellera  $n(x, y, z, t)$  le nombre de neutrons par unité de volume.

Le milieu absorbe les neutrons et on supposera que chaque neutron parcourt une distance  $\lambda_a$  jusqu'à son absorption.

Le nombre  $A$  de réactions d'absorption par seconde et par unité de volume est  $A = \frac{n \cdot v}{\lambda_a}$ .

1.a) Vérifier que cette relation est homogène.

On supposera en outre que le milieu contient des sources de neutrons représentées par la création de  $S(x, y, z)$  neutrons par seconde et par unité de volume.

1.b) En admettant le modèle simple suivant lequel, lors d'une absorption, il y a capture d'un neutron qui donne lieu à une fission délivrant  $K$  neutrons, exprimer  $S(x, y, z)$ .

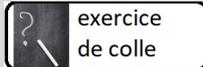
2) On considère le cas d'un réacteur nucléaire en régime permanent, compris entre deux faces planes perpendiculaires à  $Ox$  aux points d'abscisse  $x = \pm \frac{a}{2}$ , sur lesquelles la densité de neutrons est nulle :  $n(x = \pm \frac{a}{2}) = 0$ . (régime stable d'un réacteur nucléaire).

2.a) Établir l'équation différentielle suivie par  $n$  dans un tel milieu.

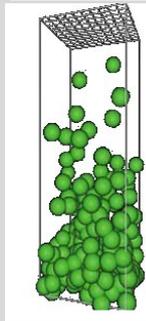
2.b) Que doit vérifier  $K - 1$  ?

2.c) Donner la forme de la répartition correspondante de densité  $n(x)$  des neutrons.

2.d) Exprimer alors  $v$  pour que le réacteur atteigne effectivement un régime stable (régime critique).



### Exercice 2.27 Expérience de Jean Perrin



A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, l'existence des atomes n'était pas universellement admise. Afin de donner une preuve indirecte de l'existence des atomes, Jean Perrin mesure le nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$  par différentes méthodes.

Dans l'une d'elles, il réalise une suspension de sphérules (toutes petites sphères) de caoutchouc dans de l'eau et l'observe au microscope : « On constate qu'il se réalise bien un état de régime permanent dans lequel la concentration décroît avec la hauteur. » (« Les atomes » - Jean Perrin).

Cet exercice explique comment il en déduit le nombre d'Avogadro.

Données (à la température de l'expérience :  $T = 293 \text{ K}$ ) :

- rayon d'une sphérule  $r = 0,212 \mu\text{m}$  ;
- masse volumique du caoutchouc utilisé :  $\mu = 1,194 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- masse volumique de l'eau  $\mu_e = 1,003 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- champ de pesanteur  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Jean Perrin a compté 100 sphérules à une altitude  $z_1$ , et 17 à une altitude  $z_2 = z_1 + 90 \mu\text{m}$ .

**1)** On considère l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme, de température  $T = 293 \text{ K}$ , de masse molaire  $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**1.a)** Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique. La projeter sur un axe  $Oz$  ascendant.

**1.b)** En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  en fonction de l'altitude  $z$ . Tracer l'allure de la courbe de  $P(z)$  et déterminer un ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère.

**1.c)** Montrer que cette loi est cohérente avec la loi selon laquelle un ensemble de particules classiques n'interagissant pas entre elles et en équilibre à la température  $T$  suivent la statistique de Maxwell-Boltzmann : la probabilité de trouver une de ces particules dans un état d'énergie  $E$  est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

**2)** Expérience de Jean Perrin

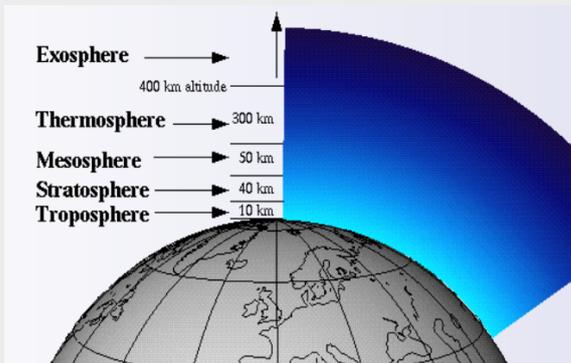
**2.a)** En tenant compte du poids d'une sphérule et de la poussée d'Archimède qu'elle subit de la part de l'eau, exprimer l'énergie potentielle de la sphérule dans la suspension en fonction de l'altitude  $z$ .

**2.b)** Appliquer la statistique de Maxwell-Boltzmann à la concentration des sphérules pour déduire des observations expérimentales de Jean Perrin une valeur approchée du nombre d'Avogadro.

**2.c)** En faisant un bilan de particules sur une tranche comprise entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ , montrer qu'il existe à l'équilibre un courant de diffusion dirigé vers le haut, et un courant de convection vers le bas.

exercice de colle

**Exercice 2.28**  
**Atmosphère isotherme**



L'atmosphère terrestre entoure la planète et est composée de plusieurs couches de gaz et de particules en suspension, d'environ 500 km d'épaisseur. La densité et la température de l'atmosphère diminuent avec l'altitude. Seule la couche la plus basse de l'atmosphère (moins de 15 km), contient des êtres vivants.

<https://www.planetoscope.com/atmosphere>

On suppose l'atmosphère isotherme, le champ de pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ , la pression est  $P = N k_B T$  où  $T$  est la température et  $N$  le nombre de particules par unité de volume, et on donne  $D$ , le coefficient d'autodiffusion des particules.

- 1) Retrouver l'équation d'état pour les gaz parfaits. Écrire la loi de Fick ainsi que les noms des variables et leurs dimensions.
- 2) Déterminer  $N(z)$ , la variation de  $N$  avec l'altitude  $z$ , en fonction de  $k_B, g$ , la masse  $m$  des particules et  $N_0 = N(z = 0)$ .
- 3) Expliquer physiquement qu'il existe un flux de particules vers le haut, le calculer. On considère que toutes les particules vont à la vitesse  $u$ . La calculer.
- 4) Expliquer physiquement qu'il existe un flux de particules vers le bas. Déterminer sa vitesse, sachant que l'atmosphère est dans un état d'équilibre dynamique permanent.
- 5) On considère que les particules descendantes subissent l'équivalent d'une force de frottement de valeur  $-\xi u \vec{u}_z$ . Déterminer la dimension de  $\xi$  puis son expression en fonction de  $D$ .
- 6) Calculer  $\xi$  et  $u$  pour le diazote. On donne  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{24} \text{ mol}^{-1}$  et  $M = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

? \ exercice  
de colle

### Exercice 2.29 Equilibre d'une atmosphère isotherme



1) On considère l'équilibre d'une atmosphère isotherme (à la température  $T$ ), de gaz parfait de molécules ayant une masse  $m$ , dans un champ de pesanteur uniforme d'accélération  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ .

On note la constante de Boltzmann  $k_B$  et l'altitude  $z$ .

1.a) Exprimer la pression  $P(z)$  en fonction de l'altitude.

1.b) Donner l'expression de la masse volumique  $\mu(z)$  du gaz en fonction de l'altitude. La masse volumique au sol est  $\mu_0$ .

2) On étudie la diffusion des particules en régime stationnaire.

2.a) Montrer qu'il existe un courant de diffusion dirigé vers le haut, dont on donnera le vecteur densité  $\vec{j}$ .

2.b) Calculer la vitesse moyenne  $u \vec{u}_z$  associée à ce courant en fonction du coefficient de diffusion  $D$  et des données du problème.

3) Interprétation.

3.a) En déduire qu'il doit exister un courant descendant de molécules de vitesse moyenne  $-u \vec{u}_z$ . Quel en est le moteur ?

3.b) Montrer alors que les collisions subies par une molécule de gaz sont en moyenne équivalentes à une force de friction  $\alpha u \vec{u}_z$  dirigée en sens inverse de la vitesse  $-u \vec{u}_z$ .

3.c) Exprimer le coefficient de friction  $\alpha$  en fonction de  $D$  et des données du problème.

4) Applications numériques.

On prendra une atmosphère de diazote à  $0^\circ\text{C}$ . On donne la masse molaire atomique de l'azote  $M = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , la constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et le coefficient d'autodiffusion du diazote  $D = 1,8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

4.a) Calculer  $u$ .

4.b) Calculer  $\alpha$ .

**exercice de colle**

**Exercice 2.30**  
**Enrichissement de l'uranium par centrifugation**



L'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235. Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium  $UF_6$ . Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon  $R = 10\text{ cm}$  et de hauteur  $h = 5\text{ cm}$ , tournant autour d'un axe vertical ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire constante  $\omega = 50 \times 10^3\text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$ . Le gaz d'hexafluorure d'uranium  $UF_6$  est introduit dans le cylindre. Les molécules  $^{235}UF_6$  et  $^{238}UF_6$  de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note  $R_0$  un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical ( $Oz$ ). On suppose que  $R_0$  est galiléen. On considère, dans un premier temps, que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait, constitué de molécules identiques de masse  $m$ . L'ensemble est à la température  $T = 353\text{ K}$ . Soit un volume élémentaire de gaz  $d^3\tau$  autour d'un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'axe ( $Oz$ ) de la centrifugeuse. On note  $P(M) = P(r)$  le champ de pression dans le gaz,  $\rho(r)$  la masse volumique du gaz et  $n^*(r)$  sa densité particulaire.

- 1) Soit  $R_1$  le référentiel lié au cylindre en rotation.
  - 1.a) Est-il galiléen ? Pourquoi ?
  - 1.b) Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel  $R_1$ . Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.
  - 1.c) Ecrire la condition d'équilibre de la particule de fluide.

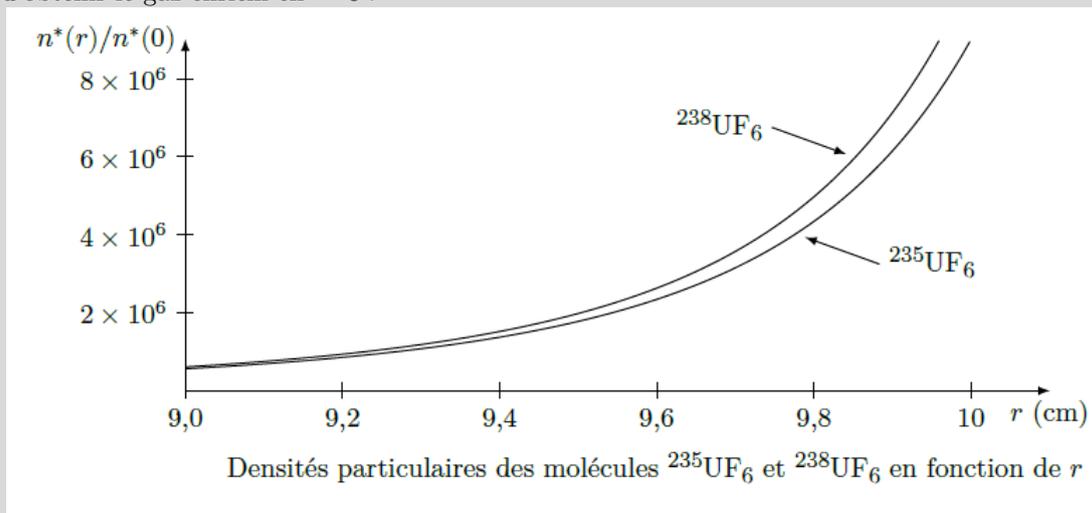
2) On donne, en figure, l'allure des densités particulaires  $n_1^*(r)$  et  $n_2^*(r)$  des molécules  $^{235}UF_6$  et  $^{238}UF_6$  en fonction de  $r$ .

2.a) Dédurre de la condition d'équilibre la répartition  $n^*(r)$  des molécules dans le cylindre. On notera  $n^*(0)$  la densité particulaire sur l'axe de rotation et on donnera l'expression de  $n^*(r)$  en fonction de  $n^*(0)$ ,  $m$ ,  $T$ ,  $k_B$ ,  $r$  et  $\omega$ .

2.b) Vérifier que la répartition  $n^*(r)$  des molécules est cohérente avec les courbes fournies.

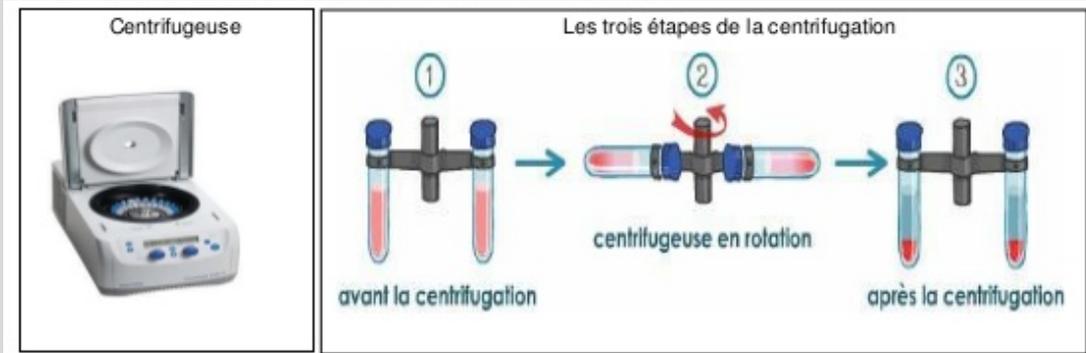
2.c) Montrer que la répartition  $n^*(r)$  ainsi trouvée obéit à une statistique de Boltzmann, avec une énergie potentielle  $E_p$  qu'on déterminera.

2.d) En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en  $^{235}U$ .



?  
exercice  
de colle

### Exercice 2.31 Centrifugeuse



On considère une ultra centrifugeuse en régime permanent dont la partie mobile (le rotor) est percée de cavités cylindriques perpendiculaires à l'axe de rotation  $Oz$ . Chaque cavité peut recevoir une cellule cylindrique d'axe  $Ox$  orthogonale à  $Oz$ , de section  $S$ , située à une distance de l'axe  $Oz$  comprise entre  $x_{min}$  et  $x_{max}$ .

Dans une cellule, on place une solution composée d'un solvant et de particules microscopiques identiques, constituant le soluté, de concentration  $c$ . On suppose que la concentration ne dépend que de  $x$ .

Le rotor est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$  constante. On admet que les particules de soluté sont animées, par rapport à la cellule, d'un mouvement radial de vitesse  $\vec{v} = s\omega^2 x \vec{u}_x$ , où  $s$  est un coefficient dépendant à la fois des particules et du solvant.

1) Exprimer le vecteur densité de courant de convection  $\vec{j}_c$ .

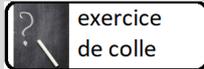
On note  $D$  le coefficient de diffusion du soluté dans la solution, cette diffusion vérifiant la loi de Fick.

2) Donner l'expression du vecteur densité de courant diffusif  $\vec{j}_d$  des particules.

3) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit la concentration  $c(x)$ .

4) En utilisant le fait que le courant total de particules (convectif + diffusif) est nul aux bords de la cellule, donner la forme de  $c(x)$ .

5) Quelle équation faut-il utiliser pour déterminer parfaitement  $c(x)$  ?



exercice  
de colle

### Exercice 2.32 Diffusion dans un tuyau poreux

#### Tubes à diffusion passive

Ce dispositif de mesure est facile à mettre en œuvre. Il représente une bonne alternative aux appareils de mesure automatiques, puisqu'il permet d'étudier un large territoire sans engager d'investissements lourds, tout en assurant la qualité de la mesure.

L'échantillonnage passif consiste à exposer à l'air libre, pendant une durée définie, des cartouches. Par simple diffusion du polluant dans l'air, celui-ci va être piégé par ces cartouches. Après une exposition de quelques jours à quelques semaines, selon le polluant surveillé, les tubes sont récoltés et analysés dans un laboratoire d'analyses de façon à connaître la concentration moyenne en polluant durant la période d'exposition. Ces tubes peuvent être utilisés lors des campagnes de mesures des oxydes d'azote ( $NO_x$ ), de dioxyde de soufre ( $SO_2$ ) ou de benzène/toluène/xylène ( $BTX$ ).

Madininair utilise, par exemple, ces tubes pour mesurer le dioxyde d'azote  $NO_2$  et établir des cartes de dispersion de la pollution automobile.

<http://www.madininair.fr/Les-tubes-a-diffusion-passive>



Soit un tube cylindrique, d'axe  $Oz$ , de longueur  $\ell$ , de rayon  $a$ , contenant des molécules. Les concentrations des molécules sont maintenues constantes aux deux extrémités  $n(0) = 0$  et  $n(\ell) = n_1$ . Soit  $D$  le coefficient de diffusion, on se place en régime permanent.

Le tube est légèrement poreux donc des molécules peuvent s'échapper vers l'extérieur à travers la paroi latérale d'épaisseur  $e$ . Cette diffusion est caractérisée par le coefficient  $D' \ll D$ . On supposera que la densité de particules varie linéairement dans l'épaisseur du tube et qu'elle est nulle hors du tube :  $n_{ext} = 0$ .

- 1) Exprimer les projections  $j_z(z)$  et  $j_r(z, r = a)$  du vecteur densité de courant  $\vec{j}$ .
- 2) En déduire que l'équation différentielle vérifiée par  $n(x)$  est  $\frac{\partial^2 n(z)}{\partial z^2} - \frac{n(z)}{\delta^2} = 0$ . On donnera l'expression de  $\delta$ .
- 3) Résoudre l'équation différentielle et étudier le cas où  $D' \ll D$ .