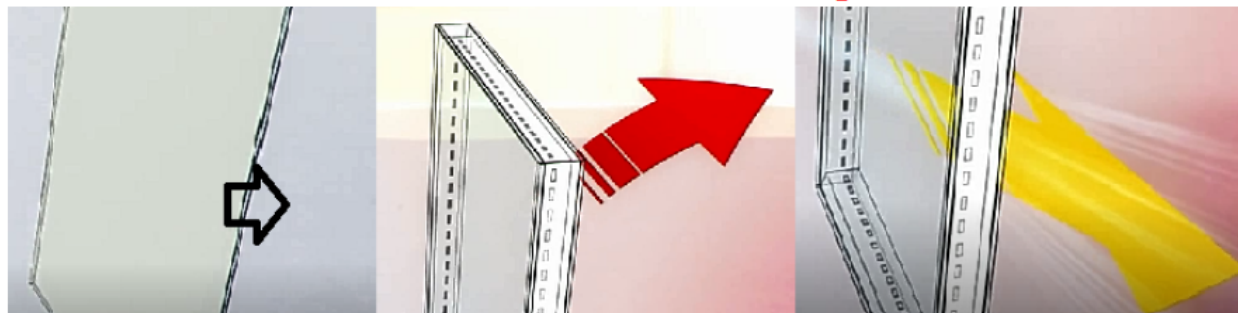


## Comment isole une fenêtre à doubles- vitrages ?

► **lister tous les types de transferts thermiques**

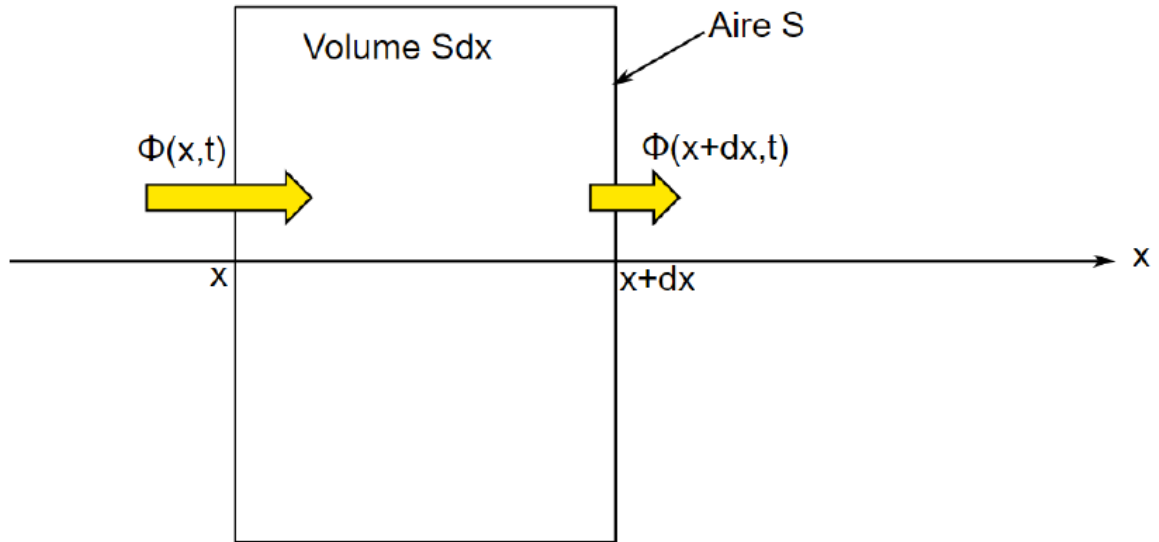


*conduction*

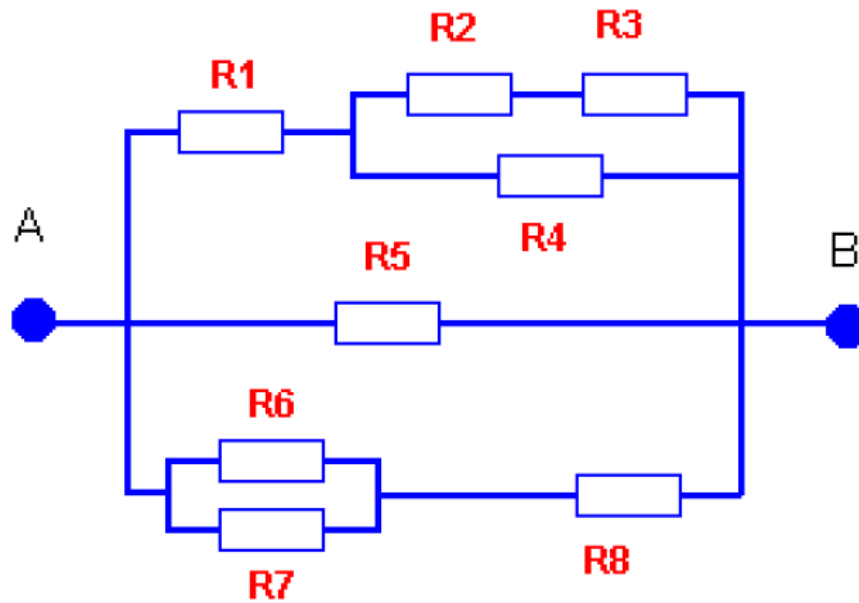
*convection*

*rayonnement*

► **faire un bilan thermodynamique  
et démontrer l'équation de diffusion**



**► trouver des solutions  
à l'équation de diffusion  
et faire une analogie avec l'électricité**



# Transferts thermiques

## Les points du cours à connaître

### I- Les flux thermiques

#### 1. Généralité sur les flux thermiques

##### **Notion de chaleur** : *s'y retrouver*

La chaleur est un transfert d'énergie (en joule, J) qui n'est pas le travail. Elle dépend du "chemin suivi" (de la transformation). On la note donc  $\delta Q$  (c'est une forme différentielle) pour une transformation infinitésimale, et  $Q$  pour une transformation finie. Attention : la chaleur n'est pas une fonction d'état : elle n'est pas définie pour un état d'équilibre.

##### **Flux thermique à travers une surface orientée** : *définition*

La chaleur qui traverse une surface orientée  $S$  pendant  $dt$  est :

$$\delta Q = \phi_{th} dt \text{ avec : } \phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2S}$$

Le flux thermique (ou puissance thermique)  $\phi_{th}$  s'exprime en W.  
 $\vec{j}_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique (en  $W \cdot m^{-2}$ ).

##### **Flux thermique pour un système** : *définition*

Soit un système fermé (limité par la surface fermée  $\Sigma$ ) qui échange pendant  $dt$  la chaleur élémentaire  $\delta Q$ . Le flux thermique  $\phi_{th}$  échangé par ce système fermé est une puissance (en W) :

$$\phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = - \oiint \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2\Sigma}$$

##### **Modes de transferts thermiques** : *s'y retrouver*

Les trois modes de transferts thermiques sont :

- la conduction (transferts thermiques de proche en proche) ;
- la convection (avec transport macroscopique de matière, naturel ou forcé) ;
- le rayonnement.

#### 2. Le rayonnement

##### **Transferts thermiques par rayonnement** *vidéo*

Le rayonnement est un mode de transfert thermique

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### ✪ Corps noir : s'y retrouver

Le corps noir est un objet idéal qui absorberait toute l'énergie électromagnétique qu'il recevrait, sans en réfléchir ni en transmettre. Il n'est fait aucune autre hypothèse sur la nature de l'objet. La lumière étant un rayonnement électromagnétique, elle est absorbée totalement et l'objet devrait donc apparaître noir, d'où son nom.

L'objet réel qui se rapproche le plus de ce modèle est l'intérieur d'un four. Afin de pouvoir étudier le rayonnement dans cette cavité, une de ses faces est percée d'un petit trou laissant s'échapper une minuscule fraction du rayonnement interne.

### 👁 Spectre du corps noir schéma

| La figure 1 représente le spectre du rayonnement du corps noir.

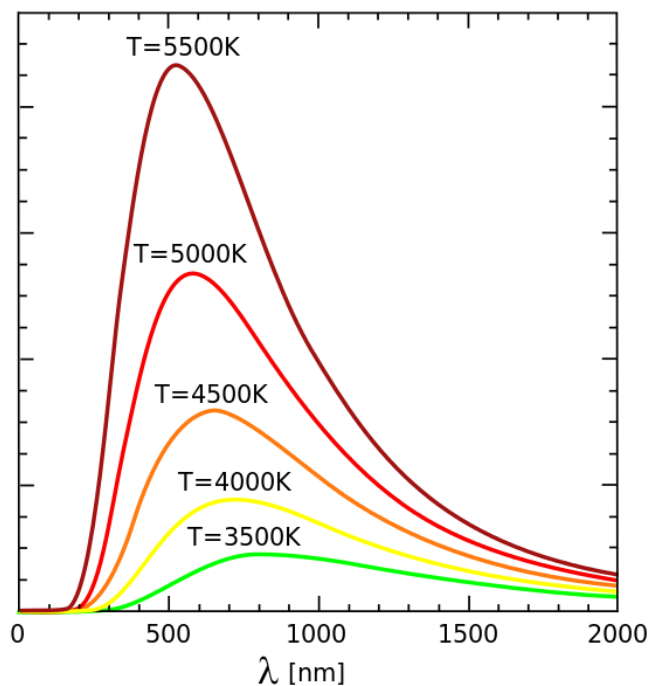


FIGURE 1 – Spectre du corps noir

### 📎 Loi de Stefan-Boltzmann : définition

La puissance émise par rayonnement d'un corps noir de surface  $S$  et de température  $T$  est :

$$P_{th} = \sigma S T^4$$

où  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

### 📎 Loi de Wien : définition

| La longueur d'onde  $\lambda_{max}$ , correspondant au pic d'émission lumineuse du corps noir, et

la température  $T$  sont liées par la relation :

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

### 👁️ Lois du corps noir *vidéo*

Le rayonnement du corps noir dépend de sa température.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 🌟 Conséquences de la loi de Wien *s'y retrouver*

La température de surface du Soleil est 5780 K, ce qui correspond à un maximum d'émission vers 500 nm, au milieu du spectre visible

Les étoiles plus chaudes émettent à des longueurs d'onde plus courtes et apparaissent bleutées ; les étoiles plus froides nous semblent rougeâtres.

Notre environnement a une température d'environ 300 K et émet ainsi dans l'infrarouge moyen, aux alentours 10  $\mu\text{m}$ .

La plupart des caméras à vision nocturne fonctionnent sur le principe de la détection de ce rayonnement thermique ;

### 👁️ Transparence de l'atmosphère *schéma*

La figure 2 représente la transparence de l'atmosphère aux rayonnements du Soleil et de la Terre.

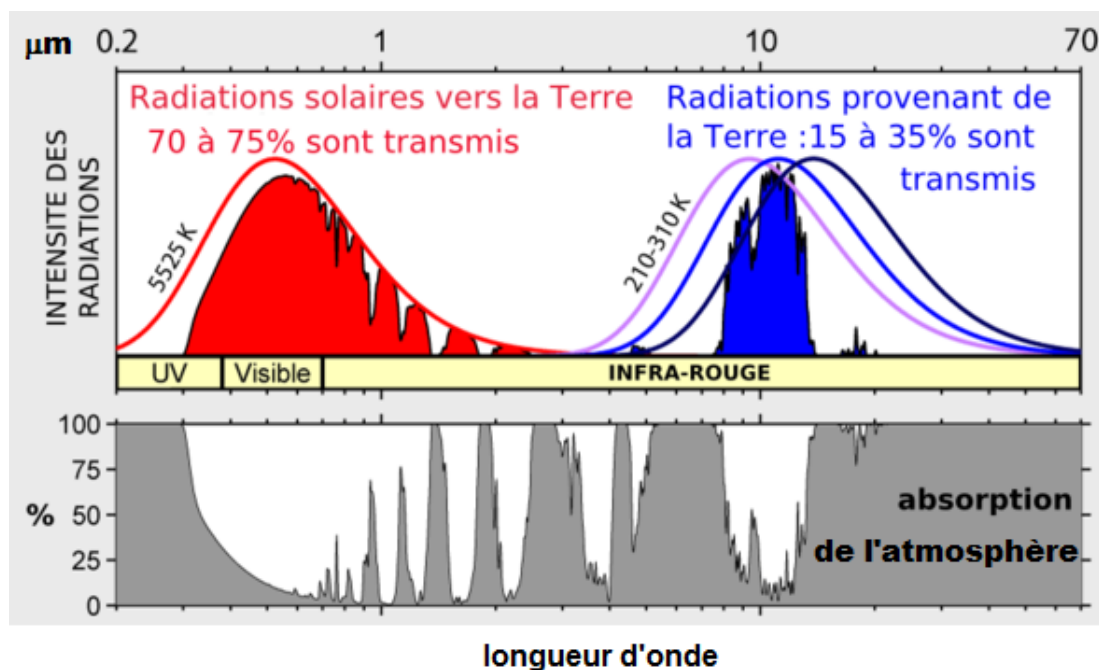


FIGURE 2 – Transparence de l'atmosphère

✪ **Le mécanisme de l'effet de serre** : *s'y retrouver*

La présence de l'atmosphère, tout comme celle du verre dans une serre, revient à absorber le rayonnement infrarouge émis par le sol, et le lui restituer en partie. Sans atmosphère, la température sur Terre serait plus basse.

### 3. Convection thermique

👁 **Notion de convection** : *schéma*

La figure 3 représente le principe de la convection. C'est un mode de transfert d'énergie qui implique un déplacement de matière dans le milieu. La matière est transportée par un fluide.

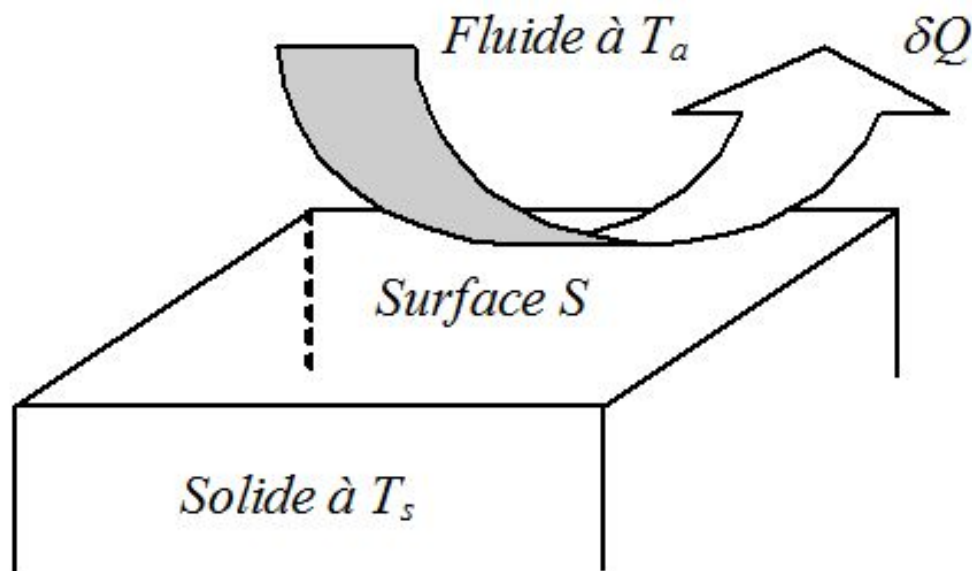
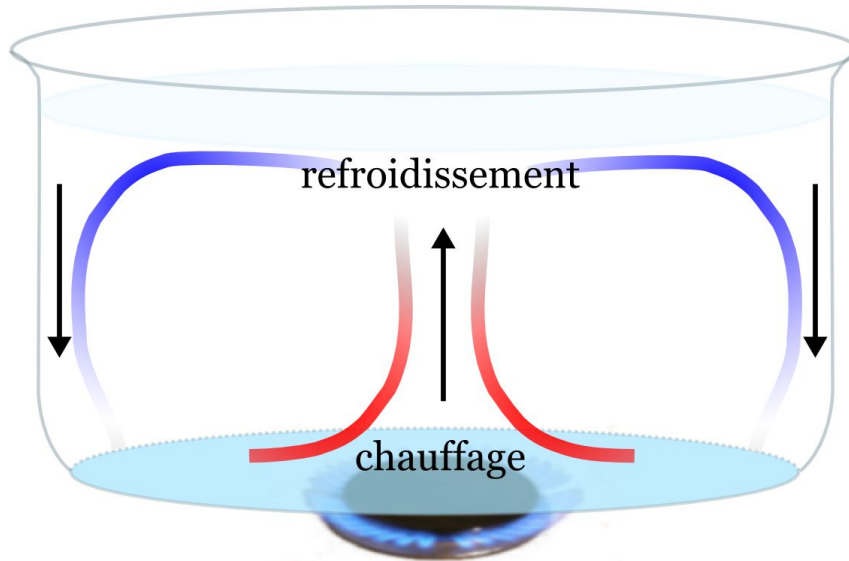


FIGURE 3 – Notion de convection :



### Exemple de convection libre *photo*



L'eau se met en mouvement spontanément dans une casserole.

### Notion de convection forcée : *s'y retrouver*

Dans le cas de la convection forcée, un dispositif mécanique (soufflerie, ventilateur) fait circuler le fluide aux abords du solide. Le mouvement favorise le transfert thermique.

Exemples de transfert thermique par convection forcée :

- radiateurs à circulation d'eau ou d'air (comme dans un ordinateur ou le moteur d'une voiture),
- tasse de liquide chaud lorsqu'on souffle dessus.

### Loi de Newton : *définition*

Pour un corps (dans l'espace  $x < x_0$ ) en contact avec un écoulement fluide à une température  $T_0$ , l'expression de la densité de flux thermique est la suivante :

$$\vec{j}_{th} = h (T(x_0, t) - T_0) \vec{u}_x$$

où  $h$  est le coefficient de transfert thermique par convection (exprimé en  $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$ ).

## 4. Conduction thermique

### Notion de conduction thermique : *s'y retrouver*

Le transfert par conduction est un échange d'énergie avec contact quand il existe une inhomogénéité (gradient) de température au sein d'un système.

Elle peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique.



**Loi de Fourier : définition**

On admet que le vecteur densité de flux thermique dans le cas de la conduction thermique suit la loi de Fourier

$$\vec{j}_{th} = -\kappa \overrightarrow{grad}(T)$$

$\kappa$ , qui s'exprime en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ , est la conductivité thermique du corps ( $\kappa > 0$ ).



**Conductivité thermique** *s'y retrouver*

Les métaux sont d'excellents conducteurs et les gaz de mauvais conducteurs thermiques : la conduction n'est sensible que dans le cas des milieux denses (solides et liquides).



**Exemples de conductivités thermiques.** *tableau*

Le tableau 1 présente quelques conductivités thermiques.

Matériau	$\kappa$ ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )
air	0,026
laine de verre	0,04
bois de chêne	0,16
eau	0,6
brique	0,66
béton	1,3
Pierre calcaire	2,2
acier inox	26
aluminium	237
or	317

TABLE 1 – Conductivités thermiques de quelques matériaux



**Interprétation de la loi de Fourier :** *s'y retrouver*

dans le cas d'un système à une dimension ( $x$ ), la loi de Fourier devient

$$\vec{j}_{th} = -\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{u}_x$$

La chaleur va du chaud vers le froid.

Ce qui est conforme à l'énoncé du second principe de Clausius selon lequel "la chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid à un corps chaud".

Aussi, la loi de Fourier prend en compte le second principe, elle porte donc en elle l'irréversibilité.

## II- Etablissement de l'équation de diffusion thermique

### 1. Etablissement dans le cas général

### 1 Diffusion thermique sans travail *théorème*

Considérons un système dense (de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ ), défini par le volume  $V$  délimité par la surface fermée  $\Sigma$ . Faisons un bilan d'énergie pendant  $dt$  :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \mu c \frac{\partial T}{\partial t} d^3\tau$$

Or, si l'on suppose qu'il n'y a aucun travail, le premier principe donne

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = - \oiint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{d}^2\Sigma = - \iiint_V \mu \operatorname{div}(\vec{j}_{th}) d^3\tau$$

Comme cela est vrai quel que soit le volume  $V$ ,

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{j}_{th}) = \kappa \Delta T$$

$\Rightarrow$

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène sans travail est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu c_V}$$

où  $D_{th}$  est la diffusivité thermique,

$\kappa$  est la conductivité thermique,

$\mu$  est la masse volumique

et  $c_V$  est la capacité thermique massique à volume constant.

## 2. Cas unidimensionnel

### Diffusion thermique à une dimension sans travail *s'y retrouver*

On retrouve bien sûr l'équation à une dimension.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu \cdot c_V} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

## 3. Symétrie cylindrique

### Système à choisir dans le cas cylindrique *schéma*

| La figure 4 représente un cylindre creux de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ .

## 4. Symétrie sphérique

### Système à choisir dans le cas sphérique *schéma*

| La figure 5 représente une sphère creuse de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ .

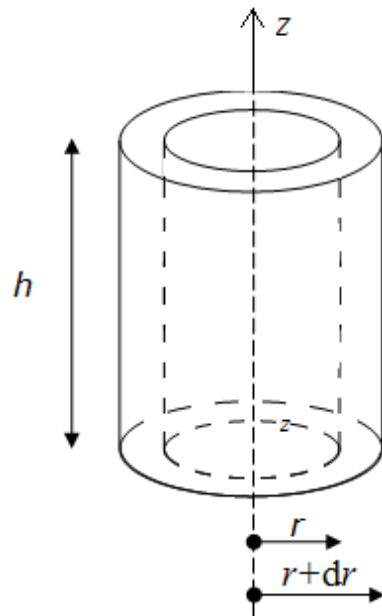


FIGURE 4 – Système à choisir dans le cas cylindrique

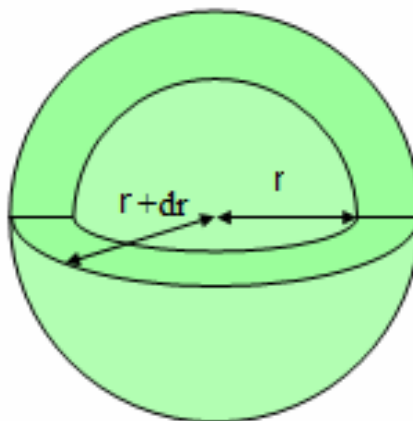


FIGURE 5 – Système à choisir dans le cas sphérique

### III- Solutions de l'équation de diffusion thermique

#### 1. Solutions en régime quelconque

##### ✪ Solution numérique : s'y retrouver

Il se peut que l'on ne trouve pas de solution analytique à l'équation de diffusion. On fait alors appel à une solution numérique, trouvée par ordinateur.

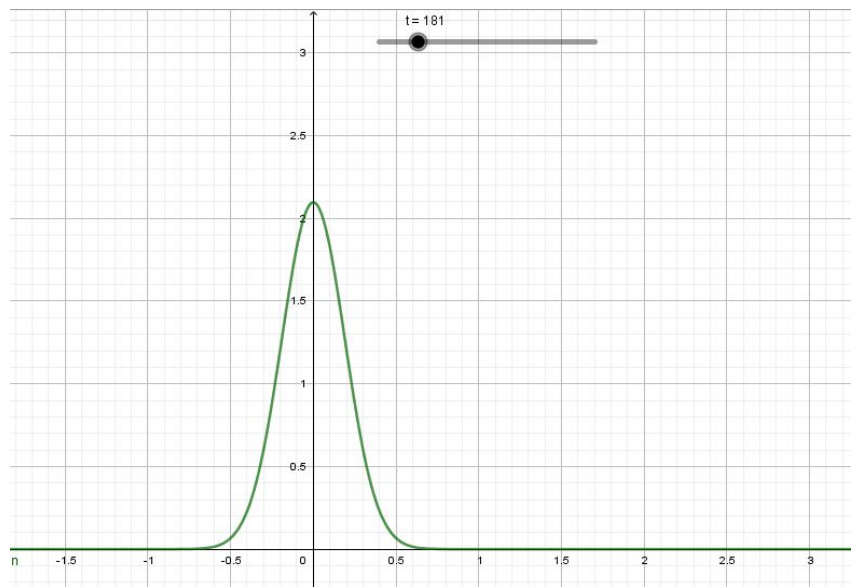
##### ✪ Ordre de grandeur : s'y retrouver

L'équation de diffusion fait apparaître un temps caractéristique  $\tau$  pour un système de taille caractéristique  $L$  :

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2}$$

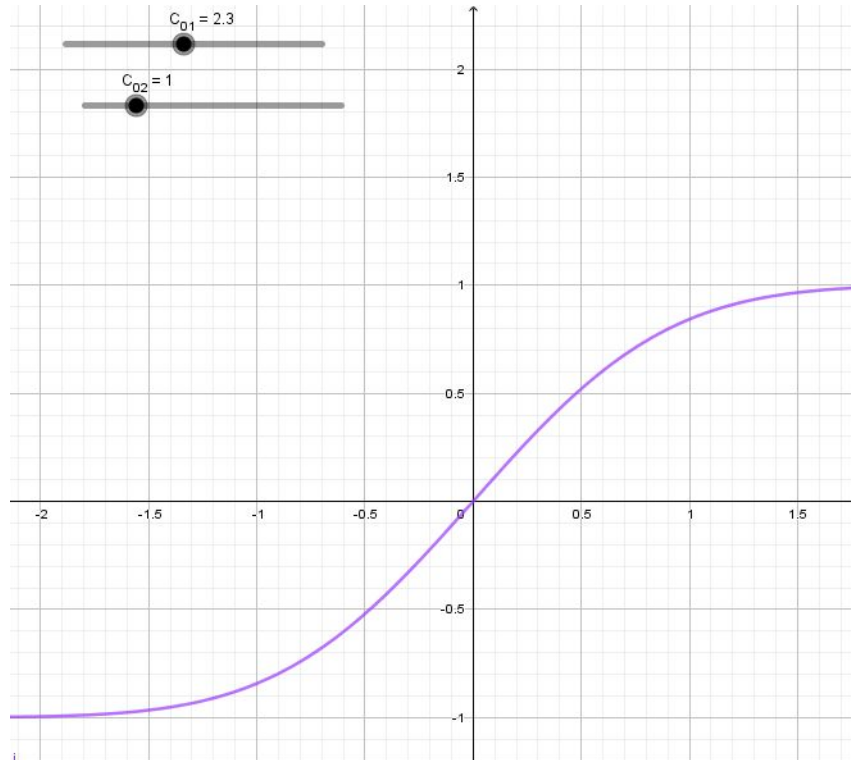
On voit donc que  $L$  varie comme  $\sqrt{\tau}$  : la diffusion est un phénomène lent, dans la mesure où, pour des tailles macroscopiques, les temps de diffusion sont souvent très grands.

##### 👁 Solution gaussienne de l'équation de diffusion *animation*



La distribution thermique après chauffage en  $x = 0$  et  $t = 0$  d'une barre.  
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 👁️ Solution intégrale d'une gaussienne de l'équation de diffusion *animation*



La distribution de température d'une barre dont les deux extrémités sont mises en contact avec des sources de chaleur différentes.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## 2. Solutions en régime permanent

### 👁️ Position du problème à une dimension *schéma*

La figure 6 représente une tige homogène, de section constante  $S$ , de longueur  $L_{AB}$ , isolée sur ses surfaces latérales, mise en contact avec deux milieux en  $x_A$  et en  $x_B$ , en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ).

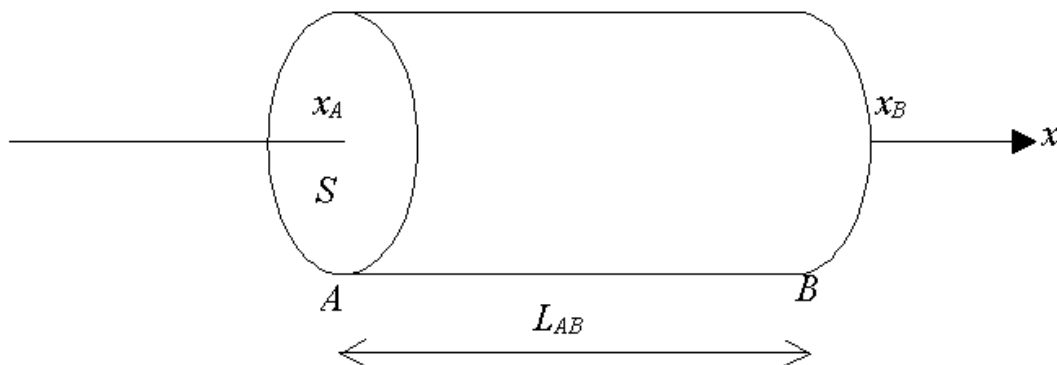


FIGURE 6 – Position du problème à une dimension

## 2 Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent à une dimension *théorème*

En régime permanent, l'équation de diffusion devient :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

soit  $T(x) = ax + b$  et  $j_x = -D \frac{\partial T}{\partial x} = -Da$ ,

où  $a$  et  $b$  sont des constantes fixées par les conditions aux limites.  $\Rightarrow$

En régime permanent, dans un milieu homogène :

- la température  $T(x)$  suit une loi affine,
- le flux thermique  $\phi_{th}$  est constant.

### 3. Analogie avec l'électricité

#### 3 Résistance thermique *théorème*

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \frac{T_B - T_A}{x_B - x_A} \vec{u}_x$$

et

$$\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2 S \cdot \vec{u}_x = \kappa \frac{T_A - T_B}{L_{AB}} S$$

$\Rightarrow$

La différence de température aux bornes d'un cylindre de coefficient de conductivité thermique  $\kappa$ , de section  $S$  et de longueur  $L_{AB}$  est (en convention récepteur) :

$$T_A - T_B = R_{th} \phi_{th} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{L_{AB}}{\kappa S}$$

$R_{th}$  s'exprime en  $K \cdot W^{-1}$ .

#### Analogie entre électricité, diffusion thermique et des particules *tableau*

Le tableau 2 présente une analogie pour trois domaines de la physique en régime permanent :

- l'électricité des conducteurs ohmiques
- la conduction thermique
- la diffusion des particules

électricité	thermique	particules
$V$	$T$	$n$
$\gamma$	$\kappa$	$D$
loi d'Ohm	loi de Fourier	loi de Fick
$\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$	$\vec{j}_{th} = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}}(T)$	$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n)$
$I = \iint_S \vec{j} \cdot d^2 S \cdot \vec{u}_x$	$\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2 S \cdot \vec{u}_x$	$\phi_N = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2 S \cdot \vec{u}_x$
$R = \frac{L_{AB}}{\gamma S}$	$R_{th} = \frac{L_{AB}}{\kappa S}$	$R_N = \frac{L_{AB}}{D S}$
$V_A - V_B = R I$	$T_A - T_B = R_{th} \phi_{th}$	$n_A - n_B = R_N \phi_N$

TABLE 2 – Présentation synthétique de l'analogie.



### Valeurs numériques (compléments) Transferts thermiques

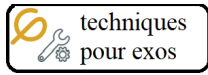
- Constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  ;
- Température de surface du Soleil : 5780 K, ce qui correspond à un maximum d'émission vers 500 nm ;

#### Exemples de conductivités thermiques.

Conductivités thermiques de quelques matériaux :

Matériau	$\kappa \text{ (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$
air	0,026
matériau isolant	0,01 à 0,2
eau	0,6
matériaux de construction	$\approx 1$
métaux	$\approx 100$





## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

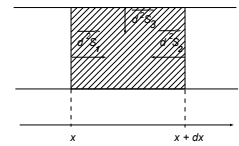
### Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources internes

Il s'agit de faire un bilan particulaire : le nombre de particules  $N(t) = \iiint n_0(x, y, z, t) d^3\tau$  du système défini (qui vérifie les symétries du problème) varie pendant  $dt$  de  $dN = +C dt - A dt + dN_e$ , où  $A$  est le terme d'absorption (nul ici),  $C$  le terme de création (nul ici), et le nombre de particules échangées  $dN_e$  est tel que  $\frac{dN_e}{dt}$  est égal au flux de  $\vec{j}_N$  à travers les parois du système orientées vers l'intérieur.

**Attention!** la densité de flux par diffusion est donnée par la loi de Fick ( $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n_0$ ), mais il peut y avoir aussi de la convection à la vitesse  $\vec{v}$  ( $\vec{j}_N = n_0 \vec{v}$ ).

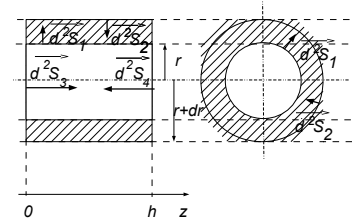
#### Dans une géométrie unidimensionnelle

La densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial x} \vec{u}_x$ .  
On fait un bilan pour un système de section  $S$  entre  $x$  et  $x + dx$  en orientant les surfaces.



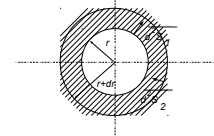
#### Dans une géométrie cylindrique

La densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial r} \vec{u}_r$ .  
On fait un bilan pour un cylindre creux de longueur  $\ell$  entre  $r$  et  $r + dr$  en orientant les surfaces.



#### Dans une géométrie sphérique

La densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique et la loi de Fick donne  $\vec{j}_N = -D \frac{\partial n_0}{\partial r} \vec{u}_r$ .  
On fait un bilan pour une sphère creuse entre  $r$  et  $r + dr$  en orientant les surfaces.



#### Dans une géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien

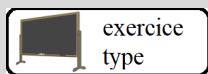
on peut réécrire l'équation de diffusion dans un cas quelconque

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = D \Delta n_0$$

en utilisant

$$\Delta f = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$$



#### Exercice 3.1 (le prof fait cet exercice type jeudi) Etablissement de l'équation de diffusion

- 1) Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources interne
  - 1.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien
  - 1.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique
  - 1.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique
- 2) Retrouver les précédents résultats en utilisant l'opérateur laplacien

1) Etablir l'équation de diffusion en l'absence de sources interne

1.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien

$$N(t) = S n_0(x, t) dx \Rightarrow \frac{dN}{dt} = S dx \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_3$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_x} \vec{u}_x \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +S j_{N_x}(x, t) - S j_{N_x}(x + dx, t) = -S \frac{\partial j_{N_x}}{\partial x} dx$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = S dx \frac{\partial n_0}{\partial t} = -S \frac{\partial j_{N_x}}{\partial x} dx = +D S \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

1.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique

$$N(t) = \ell 2\pi r dr n_0(r, t) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \ell 2\pi r dr \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_3 + \iint_{S_4} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_4$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_r} \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +\ell 2\pi r j_{N_r}(r, t) - \ell 2\pi (r + dr) j_{N_r}(r + dr, t) = -\ell 2\pi \frac{\partial (r j_{N_r})}{\partial r} dr$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = \ell 2\pi r dr \frac{\partial n_0}{\partial t} = -\ell 2\pi \frac{\partial (r j_{N_r})}{\partial r} dr = +D \ell 2\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (n_0)}{\partial r} \right) dr \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

1.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique

$$N(t) = 4\pi r^2 dr n_0(r, t) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial n_0}{\partial t}$$

Or

$$\frac{dN}{dt} = + \iint_{S_1} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_N \cdot \vec{d}^2 S_2$$

Or  $\vec{j}_N = j_{N_r} \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\frac{dN}{dt} = +4\pi r^2 j_{N_r}(r, t) - 4\pi (r + dr)^2 j_{N_r}(r + dr, t) = -4\pi \frac{\partial (r^2 j_{N_r})}{\partial r} dr$$

La loi de Fick permet de conclure :

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi r^2 dr \frac{\partial n_0}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial (r^2 j_{N_r})}{\partial r} dr = +D 4\pi \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial (n_0)}{\partial r} \right) dr \Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

2) Retrouver les précédents résultats en utilisant l'opérateur laplacien

2.a) Dans une géométrie unidimensionnelle : la densité est  $n_0(x, t)$  en cartésien

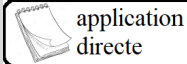
$$\Delta n_0 = \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$$

2.b) Dans une géométrie cylindrique : la densité est  $n_0(r, t)$  en cylindrique

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$

2.c) Dans une géométrie sphérique : la densité est  $n_0(r, t)$  en sphérique

$$\Delta n_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n_0}{\partial r} \right)$$



application  
directe

### Exercice 3.2 pour s'entraîner

#### Une sphère qui se refroidit

On s'intéresse à une sphère de rayon  $R$ , de masse volumique  $\mu$ , de capacité massique  $c$  et de conductivité thermique  $\kappa$ . La température ne dépend que de la date  $t$  et du rayon  $r$  dans les coordonnées sphériques.

1) Dédurre l'équation différentielle suivie par la température d'un bilan énergétique pour une écorce de rayon  $r \in [r; r + dr]$ .

2) Retrouver cette équation grâce à l'expression du laplacien en sphérique.

1) Le premier principe donne  $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = +\phi_{th}(r) - \phi_{th}(r + dr)$  en orientant le flux vers les  $r$  croissants. Comme  $\phi_{th}(r) = -4.\pi.r^2.\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r$ ,

$$\phi_{th}(r + dr) = -4.\pi.(r + dr)^2.\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r+dr} = -4.\pi.r^2 \left(1 + 2\frac{dr}{r}\right).\kappa \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r.dr \right],$$

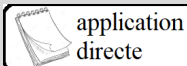
$$\text{soit au premier ordre } \phi_{th}(r + dr) = -\phi_{th}(r) - 4.\pi.r^2.dr.\kappa. \left[ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r \right],$$

$$\text{D'autre part, } \frac{dU}{dt} = \mu.c.4.\pi.r^2.dr \frac{\partial T}{\partial t}.$$

$$\text{on trouve } \mu.c.\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa. \left[ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r \right].$$

$$\triangleright \Delta f = \frac{1}{\mu_1.\mu_2.\mu_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\mu_2.\mu_3}{\mu_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mu_3.\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mu_1.\mu_2}{\mu_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$$

$$\text{soit } \Delta T(r) = \frac{1}{r^2.\sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2.\sin\theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \left[ 2.r.\frac{\partial T}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \text{ ce qui redonne bien la même équation de diffusion.}$$



application  
directe

### Exercice 3.3 pour s'entraîner

#### Diffusion thermique à trois dimensions sans travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à trois dimension, de capacité thermique massique  $c_V$ , de masse volumique  $\mu$ , de conductivité thermique  $\kappa$ , en absence de travaux ?

Premier principe pour le volume  $V$

$$dU = \iiint_V \mu.c_V.\frac{\partial T}{\partial t} d^3\tau.dt$$

s'il n'y a pas de travaux

$$dU = \delta Q = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th}.d^2\vec{\Sigma}.dt = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_{th}) .d^3\tau.dt$$

Au niveau local, la loi de conservation des particules s'écrit donc :

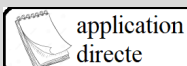
$$\mu.c_V.\frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th})$$

Si le système est homogène, la conductivité  $\kappa$  ne dépend pas de la position on a :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) = \text{div}(\kappa.\overrightarrow{\text{grad}}(T)) = \kappa.\nabla^2 T = \mu.c_V.\frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène sans travail est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th}.\Delta T \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu.c_V}$$



application  
directe

### Exercice 3.4 pour s'entraîner

#### Diffusion thermique à trois dimensions avec travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à trois dimension, de capacité thermique massique  $c_V$ , de masse volumique  $\mu$ , de conductivité thermique  $\kappa$ , avec travaux ?

Premier principe pour le volume  $V$

$$dU = \iiint_V \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d^3\tau \cdot dt$$

dans le cas général :

$$dU = \delta Q + \delta W = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{\Sigma} \cdot dt + \iiint_V \mu \cdot p \cdot d^3\tau \cdot dt = \iiint_V [-div(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p_m] \cdot d^3\tau \cdot dt$$

Au niveau local, la loi de conservation des particules s'écrit donc :

$$\mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p_m$$

Si le système est homogène,  $\kappa$  ne dépend pas de la position on a :

$$div(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p = div(\kappa \cdot \overrightarrow{grad}(T)) + \mu \cdot p_m = \kappa \cdot \nabla^2 T + \mu \cdot p_m = \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène, dont la puissance massique est  $p_m$  est

$$\kappa \cdot \Delta T + \mu \cdot p_m = \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$



**Exercice 3.5** pour s'entraîner

### Diffusion thermique à une dimension sans travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à une dimension  $x$ , de capacité thermique massique  $c_V$ , de masse volumique  $\mu$ , de conductivité thermique  $\kappa$ , en absence de travaux ?

On va faire un bilan pour un cylindre de section  $S$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

En  $x$ , le flux thermique est  $\phi_{th}(x, t) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\kappa \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$ .

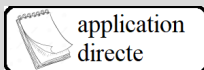
En  $x + dx$ , le flux thermique est  $\phi_{th}(x + dx, t) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\kappa \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$ .

Le premier principe s'écrit  $dU = (S \cdot dx) \cdot \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta Q$

avec  $\delta Q = +\phi_{th}(x, t) \cdot dt - \phi_{th}(x + dx, t) \cdot dt = -\frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} dx \cdot dt = \kappa \cdot S \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \cdot dt$ .

Dans un milieu homogène à une dimension  $x$ , de capacité thermique massique  $c_V$ , de masse volumique  $\mu$ , de conductivité thermique  $\kappa$ , en absence de travaux,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D_{th} \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu \cdot c_V}$$



**Exercice 3.6** pour s'entraîner

### Conduction thermique entre deux sphères concentriques

On considère un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre  $O$ , de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), de conductivité thermique  $\kappa$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\mu$ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures  $T_1$  (pour  $r = a$ ) et  $T_2$  (pour  $r = b$ ) et on suppose  $T_1 > T_2$ .

1) En utilisant un formulaire, écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température  $T$  en un point  $M$ , à l'instant  $t$ .

2) Déterminer, en régime permanent :

- 2.a) la température  $T(r)$  en tout point  $M$  du matériau ;
- 2.b) la puissance thermique  $P_t$  transférée entre les deux sphères de rayons  $a$  et  $b$  ;
- 2.c) la résistance thermique  $R_t$ , de ce conducteur.

- 1) A partir de la diffusion thermique, en connaissant le laplacien en sphérique :

$$\kappa \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \mu \cdot c \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

- 2) En régime permanent :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

2.a) d'où  $r^2 \cdot \frac{dT}{dr} = cste$  qui nous permet d'en déduire :  $T(r) = \frac{A}{r} + B$ . Les conditions aux limites fixent  $A$  et  $B$  et on trouve :

$$T(r) = \frac{a \cdot b \cdot T_1 - T_2}{r \cdot b - a} - \frac{a \cdot T_1 - b \cdot T_2}{b - a}$$

- 2.b) la puissance est  $P_t = 4\pi \cdot r^2 \cdot j_t(r, t) = -4\pi \cdot r^2 \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$ . On trouve donc :

$$P_t = 4\pi \cdot \kappa \frac{a \cdot b}{b - a} (T_1 - T_2)$$

- 2.c) la résistance thermique  $R_t$  est définie par :  $(T_1 - T_2) = R_t \cdot P_t$ , donc :

$$R_t = \frac{1}{4\pi \cdot \kappa} \frac{b - a}{a \cdot b}$$



application  
directe

**Exercice 3.7** pour s'entraîner

**Exemple d'un fil électrique cylindrique :**

On s'intéresse à un fil électrique cylindrique, de rayon  $r_1$ , de résistance linéique  $R_l$ , entouré par une gaine d'isolant, de rayon extérieur  $r_2$  et de conductivité thermique  $\kappa$ . On se place en régime permanent, la température ne dépendant que du rayon  $r$ .

1) Faire un bilan énergétique pour un cylindre de longueur  $\ell$ , de rayon  $r \in [r_1; r_2]$ , faisant apparaître  $\phi_{th}$ , le flux thermique, et  $I$ , l'intensité dans le fil.

- 2) En déduire l'équation différentielle suivie par la température.

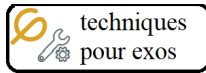
1) Le premier principe donne  $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}$ ,

avec  $\frac{\delta W}{dt} = U \cdot I = R_l \cdot \ell \cdot I^2$

et  $\frac{\delta Q}{dt} = \phi_{th}$

Soit  $\phi_{th} + R_l \cdot \ell \cdot I^2 = \frac{dU}{dt} = 0$ .

2) Comme  $\phi_{th} = -\oint \vec{j}_{th} \cdot \vec{d}^2\Sigma = -2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot j_{th,r} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$ ,  
on trouve  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r} + R_l \cdot I^2 = 0$ .



**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

## Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent

### Utilisation des conditions aux limites

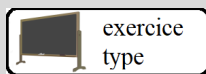
En régime permanent, la solution de l'équation de diffusion thermique en cartésien est une fonction affine et le flux thermique est constant si le milieu est homogène.

- à l'interface entre deux milieux qui suivent la loi de diffusion thermique il y a continuité de la température et du flux thermique ;
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et un fluide, il faut utiliser la continuité du flux thermique (qui est donné par la loi de Newton) ;
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et un thermostat, il faut utiliser la continuité de la température (qui est celle du thermostat) ;
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et une paroi atherme, il faut utiliser la continuité du flux thermique (qui est nul).

### Utilisation de la loi d'Ohm pour la diffusion en régime permanent

Un milieu homogène de conductivité  $\kappa$ , de longueur  $\ell$  et de section  $S$  présente une résistance thermique  $R_{th} = \frac{\ell}{\kappa \cdot S}$ . Si ce milieu est suivi d'un autre, les résistances thermiques s'ajoutent (résistances en série), s'il est à côté d'un autre, les inverses des résistances s'ajoutent (résistances en parallèle).

En régime permanent, si un milieu 1 de température  $T_1$  est séparé d'un milieu 2 de température  $T_2$  par une résistance thermique  $R_{th}$ , la loi d'Ohm stipule que  $T_2 - T_1 = R_{th} \cdot \Phi_{th}$ , où  $\Phi_{th}$  est le flux thermique qui passe dans la résistance orienté depuis 2 vers 1 (convention récepteur).



**Exercice 3.8** (le prof fait cet exercice type jeudi)

### Solution de l'équation de diffusion en régime permanent

On s'intéresse à une pièce à la température  $T_{int}$ , l'extérieur étant à  $T_{ext} < T_{int}$ . Pour modéliser les échanges par convection, pour l'air calme à la température  $T_a$ , on utilisera la loi de Newton :

$$\|\vec{j}_{th}\| = h |T(x, t) - T_a|$$

On prendra  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1) La paroi qui sépare la pièce de l'extérieur est formée d'un mur de section  $S = 5 \text{ m}^2$ , de conductivité thermique  $\kappa_m = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_m = 25 \text{ cm}$ , percé d'une fenêtre en verre de section  $S = 5 \text{ m}^2$ , de conductivité thermique  $\kappa_v = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$ .

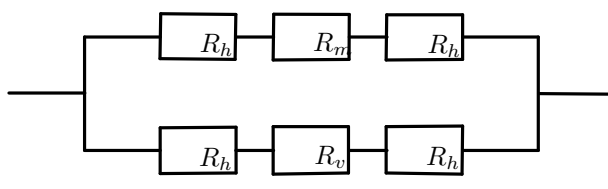
- Modéliser la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi par une association de résistances.
- Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.
- Calculer alors  $R_{th}$ .

2) On installe des doubles vitrage composés de deux verres de section  $S_v$ , de conductivité thermique  $\kappa_v$  et d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$ , entre lesquels se trouve de l'air de conductivité thermique  $\kappa_a = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_a = 2,0 \text{ mm}$ .

- Modéliser la résistance thermique  $R'_{th}$  de la nouvelle paroi par une association de résistances.
- Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.
- Pourquoi fait-on des économies d'énergie grâce au double vitrage ?

1)

1.a)



1.b) Comme  $R = \frac{\Delta T}{\phi_{th}}$  soit pour la convection  $R = \frac{\Delta T}{j_{th} S}$  et pour la conduction  $R = \frac{e}{\kappa S}$ .

Pour la convection :  $R_h = \frac{1}{h S} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

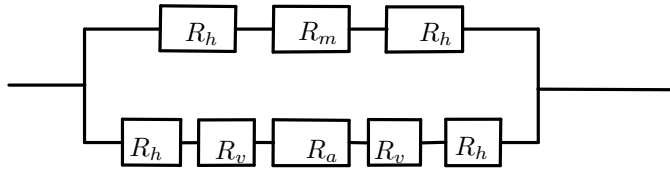
Pour le mur par conduction :  $R_m = \frac{e_m}{\kappa_m S} = 2,3 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

Pour le verre par conduction :  $R_v = \frac{e_v}{\kappa_v S} = 3,3 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

1.c) Comme  $R_v$  est négligeable, et  $R_h \approx R_m$ ,  $\frac{1}{R_{th}} \approx \frac{1}{2R_h} + \frac{1}{3R_h} = \frac{5}{6R_h}$  donc  $R_{th} \approx \frac{6R_h}{5} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

2)

2.a)



2.b) Idem avant avec

Pour l'air par conduction :  $R_a = \frac{e_a}{\kappa_a S} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

2.c) Comme  $R_v$  est négligeable, et  $R_h \approx R_m$ ,  $\frac{1}{R'_{th}} \approx \frac{1}{2R_h + R_a} + \frac{1}{3R_h}$  donc  $R'_{th} = 2,9 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ , soit 20% de plus que  $R_{th}$ .



**Exercice 3.9** pour s'entraîner

### Utilisation des conditions aux limites

On s'intéresse à deux cylindres (1 en  $x \in [-L_1, 0]$  et 2 en  $x \in [0, +L_2]$ ), de longueurs respectives  $L_1$  et  $L_2$ , de même section  $S$ , de masses volumiques respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , de capacités calorifiques massiques respectives  $c_1$  et  $c_2$ , de conductivités thermiques respectives  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ .

1) Donner l'expression de la température en régime permanent dans les cas suivants :

1.a) Les extrémités des deux cylindres sont en contact avec des thermostats de températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ .

1.b) L'extrémité du cylindre 1 est en contact avec un thermostat de température  $T_1$  et l'extrémité du cylindre 2 est atherme.

1.c) Les extrémités des deux cylindres sont athermes.

2)

2.a) Extrémité isolée

Si la tige (de conductivité thermique  $\kappa$ , d'axe  $\vec{u}_x$ ) a une extrémité isolée thermiquement en  $x_0$ , le flux thermique  $y$  est nul :

$$\phi(x_0) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_0} = 0$$

2.b) Contact avec un thermostat

Si la tige (de conductivité thermique  $\kappa$ , d'axe  $\vec{u}_x$ ) a une extrémité (en  $x_0$ ) en contact avec un fluide à la température  $T_0$ , la projection suivant  $\vec{u}_x$  de la densité de flux thermique suit la loi de Newton :

$$j_{th_x}(x_0, t) = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_0} = h \cdot (T(x_0, t) - T_0)$$

où  $h$  est un coefficient qui s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

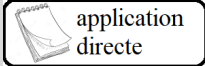
2.c) Contact entre deux tiges solides

Au point de contact thermique (en  $x_0$ ) de deux tiges de même axe  $\vec{u}_x$ , de conductivités thermiques respectives  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , la température est unique :

$$T_1(x_0, t) = T_2(x_0, t)$$

et le flux thermique se conserve :

$$\phi_1(x_0, t) = \phi_2(x_0, t) \Rightarrow \kappa_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x_0} = \kappa_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x_0}$$



application  
directe

### Exercice 3.10 pour s'entraîner Isolant

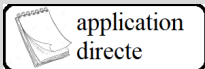
Une couche d'isolant d'épaisseur  $d = 10\text{cm}$  et de conductivité thermique  $\kappa = 40\text{mW}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a une face (repérée par  $x = 0$ ) maintenue à la température  $\theta_1 = 100^\circ\text{C}$ . L'autre face (repérée par  $x = d$ ) est refroidie par convection par un courant d'air à  $\theta_a = 25^\circ\text{C}$  qui doit maintenir sa température à la valeur  $\theta_2 = 30^\circ\text{C}$  (en régime permanent).

- Calculer quelle doit être la valeur du coefficient  $h$  défini dans la loi de Newton.
- Quel paramètre peut-on adapter simplement pour obtenir cette valeur ?

1) En régime permanent, la répartition de température s'écrit  $\theta(x) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{d}x + \theta_1$ .  
La densité volumique de flux thermique qui traverse le mur (par conduction) vaut :  $j_{th_x} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa \frac{\theta_2 - \theta_1}{d}$ .  
Or sur la face  $x = d$  du mur :  $j_{th_x} = h(\theta_2 - \theta_a)$ . Conclusion :

$$h = \frac{\kappa \theta_1 - \theta_2}{d \theta_2 - \theta_a} = 5,6\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$$

2) En augmentant la ventilation, on augmente la masse d'air qui vient, par unité et temps, au contact du solide, ce qui augmente, toute autres choses étant égales, la puissance thermique évacuée par l'air.



application  
directe

### Exercice 3.11 pour s'entraîner Refroidissement d'un composant électronique

Un composant électronique de conductivité thermique  $\kappa = 4,0 \cdot 10^{-2}\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a deux faces 1 et 2 séparées par l'épaisseur  $d = 2,0\text{cm}$ . Un ventilateur refroidit la surface 1 grâce à un courant d'air à la température  $\theta_a = 20^\circ\text{C}$  tandis que l'autre face (2) est maintenue (du fait de son utilisation) à la température  $\theta_2 = 50^\circ\text{C}$ . En régime permanent, la température de 1 doit avoir la valeur  $\theta_1 = 30^\circ\text{C}$ .

- Calculer quelle doit être la valeur du coefficient  $h$  défini dans la loi de Newton.
- Sur quel paramètre peut-on jouer simplement pour obtenir cette valeur ?

- $h = \frac{\kappa \theta_2 - \theta_1}{d \theta_1 - \theta_a} = 4,0\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .
- On peut jouer simplement sur le débit d'air pour obtenir cette valeur !



application  
directe

### Exercice 3.12 pour s'entraîner Intérêt d'un double-vitrage

On s'intéresse à une pièce à la température  $T_{int}$ , l'extérieur étant à  $T_{ext} < T_{int}$ . La paroi qui sépare la pièce de l'extérieur est formée d'un mur de section  $S_m$ , de conductivité thermique  $\kappa_m$  et d'épaisseur  $e_m$ , percé d'une fenêtre en verre de section  $S_v \sim S_m$ , de conductivité thermique  $\kappa_v \gg \kappa_m$  et d'épaisseur  $e_v \ll e_m$ .

1) Exprimer la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi. Montrer qu'elle est à peu près celle de la fenêtre.

On installe des doubles vitrage composés de deux verres de section  $S_v$ , de conductivité thermique  $\kappa_v$  et d'épaisseur  $e_v$ , entre lesquels se trouve de l'air de conductivité thermique  $\kappa_a \ll \kappa_v$  et d'épaisseur  $e_a \sim e_v$ .

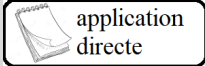
- Exprimer la nouvelle résistance thermique  $R'_{th}$  de la paroi.
- Pourquoi fait-on des économies d'énergie grâce au double vitrage ?

1) On met en parallèle deux résistances :  $R_{th}(m) = \frac{e_m}{\kappa_m \cdot S_m}$  et  $R_{th}(v) = \frac{e_v}{\kappa_v \cdot S_v}$ , soit  $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th}(m)} + \frac{1}{R_{th}(v)}$ .  
Comme  $R_{th}(m) \gg R_{th}(v)$ ,  $R_{th} \approx R_{th}(v)$ .

2) On met maintenant trois résistances en série :  $R'_{th} = R_{th}(v) + R_{th}(a) + R_{th}(v)$ . Comme  $R_{th}(a) = \frac{e_a}{\kappa_a \cdot S_v} \gg R_{th}(v)$ ,  $R'_{th} \approx R_{th}(a)$ .

3)  $R'_{th} \gg R_{th}$ , donc  $\phi'_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R'_{th}} \ll \phi_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}}$  : le flux thermique est plus faible avec le double vitrage. Ainsi, on a besoin de moins chauffer la pièce.





### Exercice 3.13 pour s'entraîner

#### Etude d'un double-vitrage

On s'intéresse à une baie vitrée de surface  $S = 4,0m^2$  qui délimite un intérieur où règne une température  $T_i = 20C$  d'un extérieur où règne une température  $T_e = 5C$ . On suppose que les fuites thermiques n'ont lieu que par conduction, à travers cette baie vitrée.

1) La baie vitrée est constituée d'un verre (de conductivité thermique  $\kappa = 1,2W.m^{-1}.K^{-1}$ ) d'épaisseur  $e = 3,0mm$ .

- 1.a) Calculer la résistance thermique  $R_{th}$  présentée par la baie vitrée.
- 1.b) En déduire la puissance thermique  $P_{th}$  perdue.

2) La baie vitrée est maintenant un double-vitrage, constitué d'une épaisseur  $e = 3,0mm$  d'air de conductivité thermique  $\kappa' = 26mW.m^{-1}.K^{-1}$  compris entre deux verres (de conductivité thermique  $\kappa = 1,2W.m^{-1}.K^{-1}$ ) d'épaisseur  $e = 3,0mm$ .

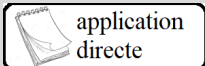
- 2.a) Calculer la nouvelle résistance thermique  $R'_{th}$  présentée par la baie vitrée.
- 2.b) En déduire la puissance thermique  $P'_{th}$  perdue.

1) Baie vitrée constituée d'un verre unique :

- 1.a)  $R_{th} = \frac{e}{\kappa.S} = 0,63mK.W^{-1}$ .
- 1.b)  $P_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R_{th}} = -24kW$ .

2) Double-vitrage :

- 2.a)  $R'_{th} = 2.R_{th} + \frac{e}{\kappa'.S} \approx \frac{e}{\kappa'.S} = 30mK.W^{-1}$ .
- 2.b)  $P'_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R'_{th}} = -0,45kW$ .



### Exercice 3.14 pour s'entraîner

#### Pertes thermiques à travers un pan de mur

On s'intéresse à un pan de muraille de surface totale  $S_t = 7,5m^2$  composé d'un mur de brique d'épaisseur  $e_b = 40cm$ , de conductivité thermique  $\kappa_b = 0,70W.m^{-1}.K^{-1}$  et d'une fenêtre de surface  $S_f = 0,5m^2$  en verre  $\kappa_v = 1,2W.m^{-1}.K^{-1}$  d'épaisseur  $e_v = 3mm$  qui délimite un intérieur où règne une température  $T_i = 20C$  d'un extérieur où règne une température  $T_e = 5C$ . On suppose que les fuites thermiques n'ont lieu que par conduction, à travers cette muraille.

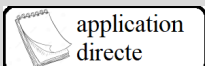
- 1) Calculer la résistance thermique :
  - 1.a)  $R_v$  présentée par la fenêtre de verre ;
  - 1.b)  $R_b$  présentée par le mur de brique ;
  - 1.c)  $R_t$  présentée par le mur en totalité.
- 2) En déduire la puissance thermique  $P_{th}$  perdue.

1) Résistance thermique :

- 1.a)  $R_v = \frac{e_v}{\kappa_v.S_v} = 5,0mK.W^{-1}$  pour la fenêtre de verre ;
- 1.b)  $R_b = \frac{e_b}{\kappa_b.(S_t - S_v)} = 82mK.W^{-1}$  pour le mur de brique ;
- 1.c) Association en parallèle de résistances :  $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_b}$ , soit pour le mur en totalité :

$$R_t = \frac{R_v.R_b}{R_v + R_b} \approx R_v = 4,7mK.W^{-1}$$

- 2)  $P_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R_t} = -3,2kW$ .



### Exercice 3.15 pour s'entraîner

#### La sensation de chaud ou de froid

Tout l'exercice est à une dimension :  $x$  et les transferts thermiques sont purement conductifs. On s'intéresse à deux cylindres (1 en  $x \in [-L, 0]$  et 2 en  $x \in [0, +L]$ ), de mêmes longueurs  $L$ , de masses volumiques respectives

$\mu_1$  et  $\mu_2$ , de capacités calorifiques massiques respectives  $c_1$  et  $c_2$ , de conductivités thermiques respectives  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , thermostatés à leurs extrémités ( $T(-L, t) = T_1$  et  $T(+L, t) = T_2$ ), en contact en  $x = 0$ .

1) Thermodynamique :

1.a) Rappeler l'équation de diffusion thermique.

1.b) Donner l'expression de la température en régime permanent. Exprimer en particulier  $T_0$ , la température en  $x = 0$ .

2) Application à la sensation de chaud et de froid :

On suppose que le cylindre 2 est une main, et  $T_2 = 37^\circ C$ . L'autre cylindre est un objet touché par la main. On imagine que la sensation de chaud ou de froid ressentie par la main est reliée à la température au point de contact  $x = 0$ .

2.a) Discuter cette modélisation.

2.b) Contact avec du bois :  $\kappa_1 \ll \kappa_2$ . Ce bout de bois semble-t-il chaud ou froid, si le bout de bois est à  $T_1 = 20^\circ C$ ? Et si  $T_1 = 60^\circ C$ ?

2.c) Contact avec un métal : mêmes questions, mais cette fois,  $\kappa_1 \gg \kappa_2$ .

1) Thermodynamique

1.a) Equation de diffusion thermique :

$$\mu c \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \kappa \Delta T(\vec{r}, t)$$

1.b) En régime permanent, la température est affine dans les deux cylindres :

$$\begin{cases} T(x \in [-L; 0]) = a_1 \cdot x + b_1 \\ T(x \in [0; +L]) = a_2 \cdot x + b_2 \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver 4 équations données par les conditions aux limites, pour déterminer les 4 inconnues ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$ ).

Les cylindres sont en contact en  $x = 0$ , d'où :

$$\left. \begin{array}{l} T(0^-) = T_2(0^+) \\ \kappa_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^-} = \kappa_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^+} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 = T_0 \\ \kappa_1 \cdot a_1 = \kappa_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

où  $T_0$  est la température en  $x = 0$ .

Les extrémités des deux cylindres sont en contact avec des thermostats de températures respectives  $T_1$  et  $T_2$  :

$$\left. \begin{array}{l} T(-L) = T_1 \\ T(+L) = T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -L \cdot a_1 + b_1 = T_1 \\ +L \cdot a_2 + b_2 = T_2 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{\kappa_2(T_1 - T_2)}{L \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)} \\ a_2 = -\frac{\kappa_1(T_1 - T_2)}{L \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)} \end{cases}$$

et

$$T_0 = \frac{T_1 \cdot \kappa_1 + \kappa_2 \cdot T_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$$

2) Application

2.a) La sensation de chaud ou de froid ressentie par la main est complexe (mesure de température, mesure différentielle de température, mesure de transfert thermique...). Et pourquoi les deux cylindres auraient la même longueur?

2.b) Contact avec du bois :

$$\kappa_1 \ll \kappa_2 \Rightarrow T_0 \approx T_2$$

Que le bois soit chaud ou froid, c'est la main qui impose sa propre température au contact.

2.c) Contact avec un métal :

$$\kappa_2 \ll \kappa_1 \Rightarrow T_0 \approx T_1$$

Que le métal soit chaud ou froid, c'est lui qui impose sa propre température au contact. Si  $T_1 = 20^\circ C$ , il semble froid (plus froid que la main!). Et si  $T_1 = 60^\circ C$ , il semble chaud.

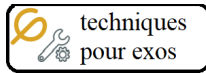


**Exercice 3.16** pour s'entraîner  
**Transfert par conduction et (ir)réversibilité**

Afin de modéliser un échangeur thermique, on considère une barre de section  $S$  et de longueur  $L$ , de conductivité thermique  $\kappa$  (on négligera les autres modes de transfert thermique) qui a, en régime permanent, ses deux extrémités aux températures  $T_1$  (en  $x_1$ ) et  $T_2$  (en  $x_2 > x_1$ ).

- 1) Exprimer le flux thermique  $\phi$  qui se propage suivant  $\vec{u}_x$ .
- 2) Faire un bilan d'entropie pendant  $dt$  : donner
  - 2.a) la variation d'entropie  $dS$  ;
  - 2.b) l'entropie échangée  $\delta S_e$  ;
  - 2.c) l'entropie créée  $\delta S_c$ .
- 3) Interprétation :
  - 3.a) Le précédent résultat est-il conforme au second principe ?
  - 3.b) Comment faire pour rendre le processus réversible ? Qu'est-ce que cela impose pour  $\phi$  ?
  - 3.c) Montrer que, pour minimiser les irréversibilités tout en conservant un flux non nul, il faut que  $T_1 - T_2 = \delta T \ll T_1$ .

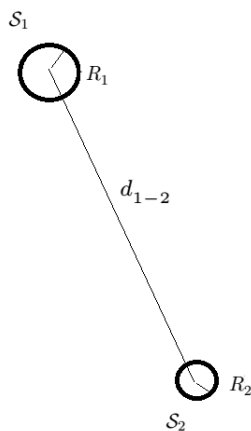
- 1)  $\phi = \frac{T_1 - T_2}{L} \kappa \cdot S$ .
- 2) Bilan d'entropie pendant  $dt$  :
  - 2.a)  $dS = 0$  car  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  ;
  - 2.b)  $\delta S_e = \left( \frac{\Phi_{x_1} \cdot dt}{T_1} - \frac{\Phi_{x_2} \cdot dt}{T_2} \right) = - \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 \cdot T_2} \frac{\kappa \cdot S}{L} dt$  ;
  - 2.c)  $\delta S_c = -\delta S_e = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 \cdot T_2} \frac{\kappa \cdot S}{L} dt$ .
- 3) Interprétation :
  - 3.a)  $\delta S_c \geq 0$ .
  - 3.b)  $T_1 = T_2 \Rightarrow \delta S_c = 0$ , mais aussi  $\phi = 0$ .
  - 3.c)  $\phi = \frac{\delta T}{L} \kappa \cdot S$  est un infinitésimal du premier ordre ;  
 et  $\delta S_c \approx \left( \frac{\delta T}{T_1} \right)^2 \frac{\kappa \cdot S}{L} dt$  est un infinitésimal du second ordre.



## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Les transferts thermiques par rayonnement

#### Utiliser la loi de Stefan



Déterminer le flux perdu par  $\mathcal{S}_2$  :

- Déterminer le flux **surfaccique** émis par le système  $\mathcal{S}_2$  (à la température  $T_2$ ) :  $\varphi_2 = \sigma T_2^4$  ;
- en déduire le flux **total** émis par le système  $\mathcal{S}_2$  :  $\Phi_2 = \varphi_2 4\pi R_2^2$ .

Déterminer le flux gagné par  $\mathcal{S}_2$  :

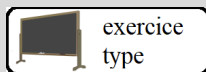
- Déterminer le flux **surfaccique** émis par le système  $\mathcal{S}_1$  (à la température  $T_1$ ) :  $\varphi_1 = \sigma T_1^4$  ;
- en déduire le flux **total** émis par le système  $\mathcal{S}_1$  :  $\Phi_1 = \varphi_1 4\pi R_1^2$  ;
- en déduire le flux **surfaccique** reçu par le système  $\mathcal{S}_2$  :  $\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Phi_1}{4\pi d_{1-2}^2}$  ;
- en déduire le flux **total** donné par  $\mathcal{S}_1$  à  $\mathcal{S}_2$  :  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \varphi_{1 \rightarrow 2} \pi R_2^2$  (**attention ! la surface de réception est celle d'un disque.**)

#### Faire un bilan d'énergie

pour  $\mathcal{S}_2$  (à l'équilibre thermique) **avec les flux totaux** :

$$0 = -\Phi_2 + a \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

où  $a$  est le coefficient d'absorption par  $\mathcal{S}_2$  du rayonnement émis par  $\mathcal{S}_1$ .



#### Exercice 3.17 (le prof fait cet exercice type jeudi) Effet de serre

1) Modélisation sans l'effet de serre :

Imaginons de la terre (à la température  $T_1$ ) qui émet un flux surfaccique  $\varphi_1$  (principalement dans l'infrarouge). Elle est éclairée par le soleil (elle reçoit un flux surfaccique incident  $\varphi_0$ , principalement dans le visible). La terre absorbe tout ce flux.

Faire un bilan de rayonnement en régime permanent. En déduire une relation entre  $T_1$  et  $\varphi_0$ .

2) Modèle simple de l'effet de serre :

Imaginons une serre, composée de deux systèmes : de la terre (à la température  $T_2$ ) couverte par une vitre  $V$  en verre (à la température  $T_V$ ). Ces deux objets sont à des températures telles qu'ils émettent (respectivement  $\varphi_2$  et  $\varphi_V$ ) principalement dans l'infrarouge.

La vitre est éclairée par le soleil (elle reçoit un flux surfaccique incident  $\varphi_0$ , principalement dans le visible). Le verre absorbe une partie  $a$  du rayonnement solaire (principalement dans l'UV : on ne bronze pas derrière une vitre !), en réfléchit une faible partie  $r$ , et en transmet la plus grande partie :  $t = 1 - a - r$ . La terre absorbe tout ce qui est transmis et émis par la vitre. La vitre absorbe tout le rayonnement infrarouge émis par la terre : elle est opaque à ces longueurs d'onde.

En supposant que ces deux corps suivent les lois du corps noir, déterminer la température d'équilibre  $T_2$  de la terre, en fonction de  $T_1$ ,  $a$  et  $t$ .

3) Applications numériques :

**3.a)** La température moyenne de la terre est de  $12^\circ \text{C}$  (285K). Pour une vraie serre :  $a \approx 10\%$ ,  $r \approx 8\%$  et  $t \approx 82\%$ . La serre permet-elle d'élever sensiblement la température de la terre ?

**3.b)** On supposera que l'atmosphère ( $a \approx 19\%$ ,  $r \approx 30\%$  et  $t \approx 51\%$ ) joue le rôle de la vitre dans l'exemple précédent, principalement grâce aux gaz à effet de serre ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ , etc.). Quelle serait la température de la Terre sans l'atmosphère ?

1) Sans vitre :

Système : terre. Elle absorbe  $\varphi_{abs}(terre) = \varphi_0$  et émet  $\varphi_{emis}(terre) = \varphi_1 = \sigma T_1^4$ .

L'équilibre thermique impose :

$$\varphi_0 = \sigma T_1^4$$

**2) Modèle simple de l'effet de serre :**

Système : vitre. Elle absorbe  $\varphi_{abs}(vitre) = a.\varphi_0 + \varphi_2$  et émet  $\varphi_{emis}(vitre) = \varphi_V = \sigma.T_V^4$

Système : terre. Elle absorbe  $\varphi_{abs}(terre) = t.\varphi_0 + \frac{\varphi_V}{2}$  car la moitié du rayonnement émis par la vitre l'est vers la terre (et l'autre vers le ciel) et émet  $\varphi_{emis}(terre) = \varphi_2 = \sigma.T_2^4$ .

Il y a deux équilibres :

$$\begin{cases} a.\varphi_0 + \sigma.T_2^4 = \sigma.T_V^4 \\ t.\varphi_0 + \frac{\sigma.T_V^4}{2} = \sigma.T_2^4 \end{cases}$$

En éliminant la température de la vitre, on trouve :

$$2.t.\varphi_0 + a.\varphi_0 + \sigma.T_2^4 = 2.\sigma.T_2^4 \Rightarrow (2.t + a).\sigma.T_1^4 = \sigma.T_2^4$$

soit :

$$T_2 = (2.t + a)^{\frac{1}{4}} . T_1$$

**3) Applications numériques**

**3.a) Vraie serre :**

$$T_1 = 285K \Rightarrow T_2 = 326K = 53^{\circ}C$$

**3.b) Terre : avec l'atmosphère,  $T_2 = 285K$ . Sans l'atmosphère, la température de la terre serait :**

$$T_1 = 272K = -1^{\circ}C$$



**Exercice 3.18** pour s'entraîner

### Température de la Terre grâce au rayonnement solaire

1) Température du Soleil :

Sachant que le rayonnement solaire a son maximum d'intensité dans le jaune, à  $\lambda_{\max} = 580\text{nm}$ , quelle est sa température extérieure ?

2) Flux solaire :

Donner alors l'émittance totale du Soleil,  $M$ . Le rayon du Soleil étant  $R_S = 6,96 \cdot 10^8\text{m}$ , quel est le flux thermique total  $\phi_{\text{tot}}$  rayonné par celui-ci ?

3) Flux sur Terre :

La lumière mettant 8 minutes pour parcourir la distance Terre-Soleil, en déduire le flux surfacique incident  $\varphi_0$  sur Terre.

4) Température de la Terre :

En supposant que la Terre se comporte comme un corps noir, quelle devrait-êtr sa température  $T_T$  ?

1) Température du Soleil :

Loi de Wien :  $\lambda_{\max} \cdot T_S \approx 3000\mu\text{m} \cdot \text{K}$ , sa température extérieure est :

$$T_S = 5,17 \cdot 10^3 \text{K}$$

(à peu près  $5000^\circ\text{C}$ )

2) Flux solaire :

L'émittance totale d'un corps noir est donnée par la loi de Stephan Boltzmann :  $M = \sigma \cdot T_S^4$  avec  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ , soit  $M = 4,5 \cdot 10^7 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Le flux thermique total rayonné par le Soleil est :

$$\phi_{\text{tot}} = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot M \Rightarrow \phi_{\text{tot}} = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 = 2,74 \cdot 10^{26} \text{W}$$

3) Flux sur Terre :

Soit une sphère de centre, le centre du Soleil, et de rayon 8 minutes lumière ( $d = 1,4 \cdot 10^{11}\text{m}$ ), la distance Soleil-Terre, creusée d'une autre sphère concentrique, de rayon  $R_S$ .

$$4\pi \cdot R_S^2 \cdot M = 4\pi d^2 \cdot \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 M,$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 = 1,1 \cdot 10^3 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

4) Température de la Terre :

La Terre présente au rayonnement solaire un disque de rayon  $R_T$  (son rayon).

Elle absorbe (pas d'atmosphère) :

$$\phi_{\text{abs}}(\text{Terre}) = \varphi_0 \cdot \pi \cdot R_T^2 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \cdot \pi \cdot R_T^2$$

elle émet (c'est une sphère) :

$$\phi_{\text{emis}}(\text{Terre}) = M_T \cdot 4\pi \cdot R_T^2$$

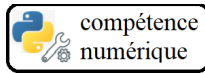
où  $M_T = \sigma \cdot T_T^4$ .

$$\left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \cdot \pi \cdot R_T^2 = \sigma \cdot T_T^4 \cdot 4\pi \cdot R_T^2 \Rightarrow$$

$$T_T = \sqrt{\frac{R_S}{2d}} T_S = 2,7 \cdot 10^2 \text{K}$$

soit autour de  $0^\circ\text{C}$ , au lieu de  $12^\circ\text{C}$ .

On s'attendait à un peu plus (en fait, il y a l'effet de serre).



### Exercice 3.19 (le prof présente les résultats jeudi) Résolution numérique de l'équation de diffusion

#### Extrait de l'aide fournie au concours CentraleSupélec

Pour résoudre une équation différentielle  $x' = f(x, t)$ , on peut utiliser la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`. Cette fonction nécessite une liste de valeurs de  $t$ , commençant en  $t_0$ , et une condition initiale  $x_0$ . La fonction renvoie des valeurs approchées (aux points contenus dans la liste des valeurs de  $t$ ) de la solution  $x$  de l'équation différentielle qui vérifie  $x(t_0) = x_0$ .

Pour résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 de solution  $x$ , on demandera la résolution du système différentiel d'ordre 1 satisfait par  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ .

#### Préparation du script python

On crée un maillage du temps ( $t \in [0; t_{max}]$ ) :  $t = nt\tau$  où  $nt \in [0, Nt - 1]$ ; et de l'espace ( $x \in [x_{min}; x_{max}]$ ) :  $x = x_{min} + nxa$  où  $nx \in [0, Nx - 1]$ . La température  $T(x, t)$  sera sur ce maillage stockée dans un tableau  $Ta[nx, nt]$ .

On peut faire les développements limités suivants :

$T(x, t + \tau) \approx T(x, t) + \frac{\partial T}{\partial t} \tau$  et  $T(x + a, t) \approx T(x, t) + \frac{\partial T}{\partial x} a + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$  et  $T(x - a, t) \approx T(x, t) - \frac{\partial T}{\partial x} a + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$  donc

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \rho C_p \frac{T(x, t + \tau) - T(x, t)}{\tau} = \lambda \frac{T(x + a, t) + T(x - a, t) - 2T(x, t)}{a^2}$$

Ainsi on trouve la relation de récurrence

$$Ta[p, q + 1] = Ta[p, q] + \varepsilon (Ta[p + 1, q] + Ta[p - 1, q] - 2Ta[p, q]) \text{ avec } \varepsilon = \frac{\lambda \tau}{\rho C_p a^2} = 0, 1 \text{ pour convergence}$$

Dimensionnement du tableau  $Ta[nx, nt]$  (il faut que un nombre total de cellules  $N_{tot} \leq 10^7$  pour un calcul en une durée convenable) :

$L$	$\Delta t = \frac{L^2 \rho C_p}{\lambda}$	choix	$Nx$	$a = \frac{L}{Nx}$	$\tau = \frac{\rho C_p a^2 \varepsilon}{\lambda}$	$Nt = \frac{\Delta t}{\tau}$	$N_{tot} = N_t N_x$	conclusion
10 cm	$10^2$ s	choix 1	$10^3$	0,1 mm	$10^{-5}$ s	$10^7$	$10^{10}$	non !
10 cm	$10^2$ s	choix 2	$10^2$	1 mm	$10^{-3}$ s	$10^5$	$10^7$	OK !

#### Exemple de code python à adapter

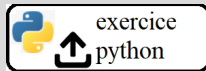
```

import numpy as np          # pour les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques

# constantes
lambda_Cu=390              # conductivité thermique du cuivre en W/(K.m)
cp_Cu=385                  # capacité thermique du cuivre en J/(kg.K)
rho_Cu=8960                # masse volumique du cuivre en kg:m^3
Nx=100
Nt=int(10**5)
L=0.1                      # taille en m
a=L/(Nx-1)
epsilon=0.1
tau=epsilon*rho_Cu*cp_Cu*a**2/lambda_Cu

# tableaux
Ta=np.zeros((Nx,Nt))      # initialisation du tableau de température
Positions=a*np.arange(0,Nx) # tableau des positions, utile pour l'affichage
Dates=tau*np.arange(0,Nt) # tableau des dates, utile pour l'affichage

```



### Exercice 3.19 (code python à téléverser avant dimanche 24h sur cahier de prépas) Résolution numérique de l'équation de diffusion

On considère une barre de cuivre :

de longueur  $L = 10$  cm,

de conductivité thermique  $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,

de capacité thermique  $C_p = 385 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,

de masse volumique  $\rho = 9,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On étudiera l'évolution de cette barre pendant une durée  $\Delta t$  adaptée.

1) Résolution numérique de l'équation de diffusion à une dimension.

1.a) Définir les constantes nécessaires et les tableaux nécessaires.

1.b) Créer des procédures de résolution de l'équation avec des conditions initiales données et les conditions aux limites suivantes :

- des températures fixées à gauche  $T(x = x_{min}, \forall t) = T_g$  et à droite  $T(x = x_{max}, \forall t) = T_d$ .

- des bords athermes  $\frac{\partial T}{\partial x}(x = x_{min}, \forall t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x = x_{max}, \forall t) = 0$ .

1.c) Créer une routine qui trace  $T(x, t)$  à  $t$  fixée.

2) Interprétation physique

Tracer l'évolution de  $T(x, t)$  en fonction de  $x$  pour plusieurs dates dans les cas suivants :

2.a) avec des bords à température fixée (par exemple en fixant comme conditions aux limites  $T_g = 273 \text{ K}$  et  $T_d = 373 \text{ K}$  et comme conditions initiales  $T(\forall x, t = 0) = 300 \text{ K}$ ).

2.b) avec des bords athermes (avec des conditions initiales  $T(\forall x, t = 0) = 300 + \alpha x$  avec  $\alpha = 1000 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$  par exemple).

1) Résolution numérique de l'équation de diffusion à une dimension.

1.a) Définir les constantes nécessaires et les tableaux nécessaires :

```
import numpy as np          # pour les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques

# constantes
lambda_Cu=390              # conductivité thermique du cuivre en W/(K.m)
cp_Cu=385                  # capacité thermique du cuivre en J/(kg.K)
rho_Cu=8960                # masse volumique du cuivre en kg:m^3
Nx=100
Nt=int(10**5)
L=0.1                      # taille en m
a=L/(Nx-1)
epsilon=0.1
tau=epsilon*rho_Cu*cp_Cu*a**2/lambda_Cu

# tableaux
Ta=np.zeros((Nx,Nt))      # initialisation du tableau de température
Positions=a*np.arange(0,Nx) # tableau des positions, utile pour l'affichage
Dates=tau*np.arange(0,Nt) # tableau des dates, utile pour l'affichage
```

1.b) Créer des procédures de résolution de l'équation :

```
def Solution_Bords_Tfixe(Tg,Td): # solution de l'équation de diffusion avec température fixée au bord
    for q in range(Nt-1):
        Ta[1:-1,q+1]=Ta[1:-1,q]+epsilon*(Ta[0:-2,q]+Ta[2:,q]-2*Ta[1:-1,q]) # récurrence
        Ta[0,q+1]=Tg # condition aux limites : T imposé à gauche
        Ta[-1,q+1]=Td # condition aux limites : T imposé à droite

def Solution_Bords_Athermes(): # solution de l'équation de diffusion
    for q in range(Nt-1):
        Ta[1:-1,q+1]=Ta[1:-1,q]+epsilon*(Ta[0:-2,q]+Ta[2:,q]-2*Ta[1:-1,q]) # récurrence
        Ta[0,q+1]=Ta[1,q+1] # condition aux limites : dérivée nulle à gauche
        Ta[-1,q+1]=Ta[-2,q+1] # condition aux limites : dérivée nulle à droite
```

1.c) Créer une routine qui trace  $T(x, t)$  à  $t$  fixée :



```

▶ def index_t(t): # transforme la date t (en s) en index_t (entier entre 0 et Nt)
    return int(t/tau)

def courbe_t(t): # courbe de température à t donnée
    plt.title("Inhomogénéités de température",size=16)
    plt.xlabel('$x$ (m)') # axe des abscisses
    plt.ylabel('$T$ (K)') # axe des ordonnées
    plt.plot(Positions,Ta[:,index_t(t)],label=f"$t= {t}$ s") # courbe à t donnée
    plt.legend()

def courbe_xt(): # courbe à 3D
    plt.xlabel('$x$ en m')
    plt.ylabel('$t$ en s')
    plt.pcolormesh(Positions,Dates,np.transpose(Ta),cmap='coolwarm',shading="auto")
    plt.colorbar(label="$T$ (K)") # l'échelle de couleur pour T
    plt.show()

```

## 2) Interprétation physique

### 2.a) Bords à températures fixées :

```

▶ Ta[:,0]=300 # température initiale
Solution_Bords_Tfixe(273,373) # solution de l'équation de diffusion avec température fixée au bord

# affichage
plt.clf() # effaçage des courbes
courbe_t(0)
courbe_t(0.01)
courbe_t(0.1)
courbe_t(1)
courbe_t(5)
courbe_t(10)
courbe_t(90)
plt.show() # affichage des courbes

```

### 2.b) Bords athermes :

```

▶ Ta=np.zeros((Nx,Nt)) # réinitialisation du tableau de température
Ta[:,0]=np.arange(300,300+1000*L) # température initiale
Solution_Bords_Athermes() # solution de l'équation de diffusion avec bords athermes

# affichage
plt.clf() # effaçage des courbes
courbe_t(0)
courbe_t(1)
courbe_t(2)
courbe_t(5)
courbe_t(10)
courbe_t(20)
courbe_t(90)
plt.show() # affichage des courbes

```



application  
directe

**Exercice 3.20** pour s'entraîner

### Durée d'un régime transitoire de diffusion thermique le long d'une barre

1) Calculer l'ordre de grandeur  $\Delta t$  de la durée d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier homogène, de longueur  $L$ , de section droite circulaire de rayon  $a$ , de masse  $m$ , de capacité thermique massique  $c$ , de conductivité thermique  $\kappa$  lors d'une diffusion thermique.

#### 2) Applications numériques :

**2.a)**  $a = 1,0\text{cm}$ ,  $m = 1,24\text{kg}$ ,  $c = 0,46\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $L = 0,50\text{m}$  et  $\kappa = 82\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

**2.b)** même matériau de longueur double.

1) L'équation de diffusion  $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$  où  $\mu = \frac{m}{\pi \cdot a^2 \cdot L}$  nous donne :  $\frac{\kappa}{L^2} \approx \frac{\mu \cdot c}{\Delta t}$ . Aussi :

$$\Delta t \approx \frac{\mu \cdot c \cdot L^2}{\kappa} = \frac{m}{\pi \cdot a^2 \cdot L} \frac{c \cdot L^2}{\kappa}$$

- 2) Applications numériques :
  - 2.a)  $\Delta t \approx 10^3$  s, soit 3 heures ;
  - 2.b)  $\Delta t' = 4.\Delta t$ , soit 12 heures.



**Exercice 3.21** pour s'entraîner  
**Diffusion d'un pic de température**

Soit une tige isolée et homogène, de section  $S$  constante, et suffisamment longue pour que le problème des conditions aux limites ne se pose pas. À l'instant initial, la répartition température est une fonction gaussienne de  $x$  :

$$T(x, t = 0) = T_0 + \theta.e^{-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2}$$

- 1) Vérifier que  $T(x, t) = T_0 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{4.D.t}{l_0^2} + 1}}.e^{-\frac{x^2}{4.D.t+l_0^2}}$  est solution de l'équation de diffusion.
- 2) Etudier  $T(x, t)$  à  $t$  fixé :
  - 2.a) Que vaut son maximum  $T_{max}(t)$  ?
  - 2.b) Possède-t-elle des propriétés de parité ?
  - 2.c) Donner l'allure de  $T(x, t)$ .

On définit la largeur  $l(t)$  à l'instant  $t$  du pic de température par la largeur de l'ensemble des positions  $x$  telles que  $T(x, t) - T_0 > \frac{T_{max}(t)-T_0}{e}$ .

- 3) Définir et calculer  $l(t)$ , la largeur à l'instant  $t$  du pic de température.

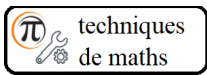
- 1) On vérifie que

$$\kappa.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu.c \frac{\partial T}{\partial t}$$

pour peu que  $D = \frac{\kappa}{\mu.c}$

- 2) Etude de  $T(x, t)$  à  $t$  fixé :
  - 2.a)  $T_{max} = T_0 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{4.D.t}{l_0^2} + 1}}$  ?
  - 2.b)  $T(x, t)$  est paire.
  - 2.c) L'allure de  $T(x, t)$  est une courbe en cloche (gaussienne).
- 3)  $T(x = \pm \frac{l(t)}{2}, t) - T_0 = \frac{T_{max}(t)-T_0}{e}$ , d'où  $e^{-\frac{l^2}{16.D.t+4l_0^2}} = e^{-1} \Leftrightarrow l(t)^2 = 16.D.t + 4l_0^2$ , soit :

$$l(t) = 2.\sqrt{4.D.t + l_0^2}$$



**Techniques mathématiques à maîtriser**  
**Calcul des opérateurs divergence et laplacien scalaire**

**Définition de la divergence :**

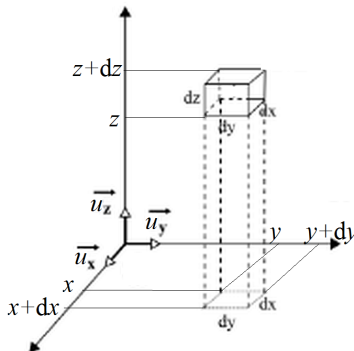
$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau$  pour un volume  $V$  délimité par une surface fermée  $\Sigma$  (formule d'Ostrogradsky).

**Calcul dans le repère cartésien :**

pour un volume élémentaire  $dx dy dz$ ,

$$\text{div}(\vec{A}) dx dy dz = \phi(\vec{A})$$

Si on prend un parallélépipède rectangle entre  $x$  et  $x + dx$ ,  $y$  et  $y + dy$  et  $z$  et  $z + dz$



$$\begin{aligned} \phi(\vec{A}) = & -A_x(x, y, z) dy dz + A_x(x + dx, y, z) dy dz \\ & -A_y(x, y, z) dx dz + A_y(x, y + dy, z) dx dz \\ & -A_z(x, y, z) dx dy + A_z(x, y, z + dz) dx dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{A}) = + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy$$

donc  $\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ .

**Expressions avec l'opérateur nabla :**

$$\boxed{\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} \text{ et } \boxed{\Delta f = \nabla^2 f = \text{div}[\vec{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)}$$

avec l'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes seulement !!!

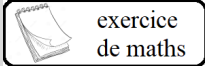
**Expressions dans un repère quelconque :**

dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

$$\boxed{\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left( \frac{\partial(\mu_2 \mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \mu_1 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \mu_2 A_3)}{\partial s_3} \right)}$$

$$\text{et } \boxed{\Delta f = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]}$$

exercice  
de maths**Exercice 3.22** pour s'entraîner**Calcul d'une divergence en coordonnées cylindriques**1) Donner l'expression de  $\operatorname{div} \vec{A}$  pour  $\vec{A}(r, \theta, z) = -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$ .

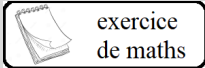
1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2 \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{-4 \cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) = -\frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r A_z) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0$$

$$\text{d'où } \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{-4 \cos \theta}{r^3} - \frac{\cos \theta}{r^3} \right) = -\frac{5 \cos \theta}{r^4}.$$

exercice  
de maths**Exercice 3.23** pour s'entraîner**Calcul d'une divergence en coordonnées cartésiennes**1) Donner l'expression de  $\operatorname{div} \vec{A}$  pour  $\vec{A}(x, y, z) = \frac{2x}{y} \vec{u}_x - \frac{x^2}{y^2} \vec{u}_y + \vec{u}_z$ .

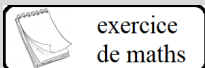
1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{2x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{d'où } \operatorname{div} \vec{A} = \frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}.$$

exercice  
de maths**Exercice 3.24** pour s'entraîner**Calcul d'une divergence en coordonnées sphériques**1) Donner l'expression de  $\operatorname{div} \vec{A}$  pour  $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_\theta + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta r^3} \vec{u}_\varphi$ .

1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

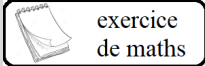
$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r} \right) = +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin^2 \theta \sin \varphi}{r^2} \right) = -2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} A_\varphi \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{r^2 \tan \theta} \right) = -\frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta}$$

d'où

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} \right) - \frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta} = \frac{1}{r^4 \sin \theta} \left( 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \sin \varphi \tan \theta \right)$$

exercice  
de maths**Exercice 3.25** pour s'entraîner**Calcul d'un flux de vecteur à partir de sa divergence**

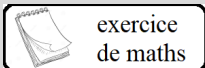
1) On donne  $\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, \varphi) = 3$ . Calculer  $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma}$  pour une sphère de rayon  $R$  de centre  $O$ , l'origine du repère.

1) On utilise la formule d'Ostrgradsky :

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) \, d^3\tau$$

On prendra comme volume  $V$ , la sphère de rayon  $R$  de centre  $O$ , l'origine du repère. Aussi,

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} = \iiint_V 3 \, d^3\tau = 4\pi R^3$$

exercice  
de maths**Exercice 3.26** pour s'entraîner**Calcul d'un laplacien en coordonnées cartésiennes**

1) Donner l'expression de  $\Delta f$  pour  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$ .

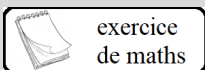
1) On calcule les dérivées partielles de  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

d'où  $\Delta f = \frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}$ .

exercice  
de maths**Exercice 3.27** pour s'entraîner**Calcul d'un laplacien en coordonnées cylindriques**

1) Donner l'expression de  $\Delta f$  pour  $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$ .

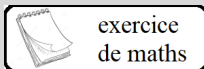
1) On calcule les dérivées partielles de  $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2 \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{-4 \cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = -\frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0$$

d'où  $\Delta f = \frac{1}{r} \left( \frac{-4 \cos \theta}{r^3} - \frac{\cos \theta}{r^3} \right) = -\frac{5 \cos \theta}{r^4}$ .

exercice  
de maths**Exercice 3.28** pour s'entraîner**Calcul d'un laplacien en coordonnées sphériques**1) Donner l'expression de  $\Delta f$  pour  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$ .1) On calcule les dérivées partielles de  $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$  :

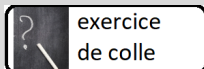
$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r} \right) = +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin^2 \theta \sin \varphi}{r^2} \right) = -2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{r^2 \tan \theta} \right) = -\frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta}$$

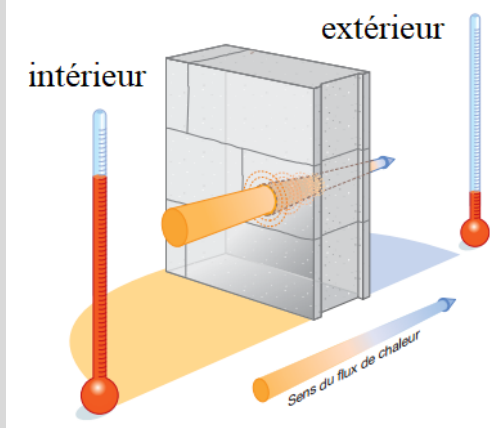
d'où

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} \right) - \frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta} = \frac{1}{r^4 \sin \theta} \left( 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \right)$$



exercice  
de colle

### Exercice 3.29 Modélisation électrique d'une paroi



On s'intéresse à une pièce à la température  $T_{int}$ , l'extérieur étant à  $T_{ext} < T_{int}$ . Pour modéliser les échanges par convection, pour l'air calme à la température  $T_a$ , on utilisera la loi de Newton :

$$\|\vec{j}_{th}\| = h |T(x, t) - T_a|$$

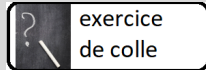
On prendra  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1) La paroi qui sépare la pièce de l'extérieur est formée d'un mur de section  $S = 5 \text{ m}^2$ , de conductivité thermique  $\kappa_m = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_m = 25 \text{ cm}$ , percé d'une fenêtre en verre de section  $S = 5 \text{ m}^2$ , de conductivité thermique  $\kappa_v = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$ .

- 1.a) Modéliser la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi par une association de résistances.
- 1.b) Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.
- 1.c) Calculer alors  $R_{th}$ .

2) On installe des doubles vitrage composés de deux verres de section  $S_v$ , de conductivité thermique  $\kappa_v$  et d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$ , entre lesquels se trouve de l'air de conductivité thermique  $\kappa_a = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et d'épaisseur  $e_a = 2,0 \text{ mm}$ .

- 2.a) Modéliser la résistance thermique  $R'_{th}$  de la nouvelle paroi par une association de résistances.
- 2.b) Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.
- 2.c) Pourquoi fait-on des économies d'énergie grâce au double vitrage ?



exercice  
de colle

### Exercice 3.30

#### Sensation de froid et de chaud



Les sensations ressenties en s'asseyant sur un banc en bois ou sur une chaise en fer sont très différentes alors que les températures sont identiques.

1) Premier modèle : Deux cylindres, isolés latéralement, de même section  $S$ , de même axe ( $Ox$ ), de conductivités thermiques  $K_1$  et  $K_2$ , de longueur  $L_1$  et  $L_2$ , sont mis bout à bout. On maintient les extrémités  $x = -L_1$  et  $x = L_2$  aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ . Le contact s'établit en  $x = 0$ . On se place en régime stationnaire.

Déterminer la température  $T_i$  à l'interface (en  $x = 0$ ).

AN :  $T_1 = 37,0^\circ\text{C}$  (main),  $T_2 = 20,0^\circ\text{C}$  (bois ou acier),  $L_1 = L_2$ ,  $K_1 = 10,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (main),  $K_2 = 1,00 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (bois) et  $K'_2 = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (acier).

Calculer  $T_i$  pour un contact main - bois puis pour un contact main - acier. Conclure.

Expliquer pourquoi en hiver, dans un jardin public, il vaut mieux s'asseoir sur un banc en bois que sur une chaise en métal.

2) Deuxième modèle : Les deux cylindres sont maintenant supposés illimités et en contact en  $x = 0$ . Le cylindre 1 s'étend de  $x = -\infty$  à  $x = 0$ , le cylindre 2 de  $x = 0$  à  $x = +\infty$ . Initialement, le cylindre 1 est à la température  $T_1$  et le cylindre 2 à la température  $T_2$ . On modélise la répartition de température à l'instant  $t$  par :

- $T = T_1$  pour  $x < -l_1(t)$  ;
- $T$  fonction affine de  $x$  pour  $-l_1(t) < x < 0$  ;
- $T$  fonction affine de  $x$  pour  $0 < x < l_2(t)$  ;
- $T = T_2$  pour  $x > l_2(t)$ .

Déterminer la température  $T_i$  à la jonction des deux barres, en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $E_1 = \sqrt{\mu_1 c_1 K_1}$  et  $E_2 = \sqrt{\mu_2 c_2 K_2}$ , ( $\mu$  est la masse volumique,  $c$  la chaleur massique et  $K$  la conductivité thermique de la barre considérée).

On donne  $E(\text{main}) = 1,80 \times 10^3 \text{ USI}$ ,  $E(\text{bois}) = 0,40 \times 10^3 \text{ USI}$  et  $E(\text{acier}) = 14,0 \times 10^3 \text{ USI}$ .

Calculer la température de jonction pour un contact main - bois puis pour un contact main - acier.

3) Troisième modèle : Les deux cylindres sont toujours illimités et en contact en  $x = 0$ . Le cylindre 1 s'étend de  $x = -\infty$  à  $x = 0$ , le cylindre 2 de  $x = 0$  à  $x = +\infty$ . Initialement, le cylindre 1 est à la température  $T_1$  et le cylindre 2 à la température  $T_2$ . On impose  $T(-\infty, t) = T_1$  et  $T(+\infty, t) = T_2$  pour tout  $t > 0$ .

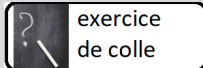
On admet que la fonction  $f_D(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-u^2) du$  avec  $D = \frac{K}{\mu c}$  (diffusivité thermique) est solution de l'équation de la diffusion thermique et vérifie  $f_D(0, t) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_D(x, t) = \pm 1$ .

En cherchant des solutions sous la forme  $T_1(x, t) = A_1 + B_1 f_{D1}(x, t)$  dans le premier cylindre et  $T_2(x, t) = A_2 + B_2 f_{D2}(x, t)$  dans le second cylindre, déterminer la température  $T_i$  à la jonction des deux barres, en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ , et des diffusivités thermiques des deux cylindres définies précédemment.

Déterminer la température  $T_i$  à la jonction. Calculer cette température pour un contact main - bois puis pour un contact main - acier.

4) Comparer les trois modèles étudiés. Justifier l'hypothèse selon laquelle il s'établit instantanément une température stationnaire  $T_i$  à la jonction.





exercice  
de colle

### Exercice 3.31

#### La sensation de chaud et de froid sous la main

Cet exercice se propose d'interpréter l'observation suivante : quand on pose sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température, on a l'impression que le bois est "plus chaud" que l'acier.



On donne :

	conductivité thermique	masse volumique	capacité thermique
bois de chêne	$\kappa = 0,16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\mu = 650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$c = 2500 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
acier	$\kappa = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\mu = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$c = 470 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
eau (main !)	$\kappa = 0,60 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$c = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

On adopte le modèle unidirectionnel suivant : pour  $t < 0$ ,

- le corps 1 du côté de  $x < 0$  (la table) est à la température uniforme  $T_1 = 20^\circ$
- et le corps 2 du côté des  $x > 0$  (la main) à la température uniforme  $T_2 = 37^\circ$ .

Le contact a lieu à l'instant  $t = 0$ , dans le plan  $x = 0$ ; on étudie la propagation thermique le long de l'axe  $Ox$  perpendiculaire aux surfaces en contact. Il s'agit d'établir la répartition de température  $T(x, t)$  pour  $t > 0$ .

1) Etablir l'équation de diffusion suivie par la température  $T(z, t)$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où  $D_i$  est la diffusivité thermique dans le corps  $i$ .

On cherche des solutions  $T_1(x, t)$  pour  $x < 0$  et sous la forme :

$$T_i(x, t) = a_i f(x, t) + b_i$$

où  $f(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4D_i t}}} e^{-u^2} du$  (c'est l'intégrale d'une gaussienne). On donne  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = 1$ .

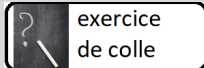
2) Vérifier qu'il s'agit bien de solutions de l'équation de diffusion.

L'expérience étant de courte durée devant les temps de propagation du flux thermique dans les corps, ces derniers peuvent être considérés comme illimités, auquel cas  $\forall t > 0$ ,  $T(-\infty, t) = T_1$  et  $T(\infty, t) = T_2$ . On admet qu'à l'interface, il s'établit instantanément une température stationnaire  $T_0$ .

3) Déterminer les constantes  $a_i$  et  $b_i$  en fonction de  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

4) En écrivant la continuité du flux thermique en  $x = 0$ , déterminer  $T_0$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et des propriétés des deux corps.

5) Calculer  $T_0$  pour un contact main-bois et un contact main-acier. Commenter.



exercice  
de colle

### Exercice 3.32 Isolation d'un studio

On s'intéresse à un studio en régime permanent.

On suppose que ce dernier (où la température est  $T_{int} = 22^\circ C$ ) n'échange de chaleur qu'à travers une paroi qui le sépare de la rue (l'extérieur est à a température  $T_{ext} = 2^\circ C$ ).

1) Pièce mal isolée :

En fait, cette paroi est séparée en deux partie :

- une fenêtre de surface  $S_f = 1,0 \text{ m}^2$ , en verre de de conductivité thermique  $\kappa_v = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$  ;
- un mur de surface  $S_m = 4,0 \text{ m}^2$ , en béton d'épaisseur  $e_b = 20 \text{ cm}$ , de conductivité thermique  $\kappa_b = 0,92 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Exprimer dans ce cas (en faisant une application numérique) :

1.a) la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi,

1.b) et la chaleur totale  $Q$  dépensée en une journée (en  $\text{kW} \cdot \text{h}$ ) nécessaire pour conserver à la pièce sa température.

2) Pièce bien isolée :

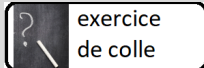
Pour remédier à tant de pertes thermiques :

- on change la fenêtre pour une fenêtre en double vitrage, composée de deux vitres de verre de conductivité thermique  $\kappa_v = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , d'épaisseur  $e_v = 2,0 \text{ mm}$  séparés par une epaisseur  $e_a = 2,0 \text{ mm}$  d'air de conductivité thermique  $\kappa_a = 0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- et on isole le mur en ajoutant devant celui-ci une épaisseur  $e_l = 10 \text{ cm}$  de laine de verre de conductivité thermique  $\kappa_l = 0,040 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , recouverte de briques d'épaisseur  $e_{br} = 5,0 \text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\kappa_{br} = 0,70 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Exprimer dans ce nouveau cas (en faisant une application numérique) :

2.a) la nouvelle résistance thermique  $R'_{th}$  de la paroi,

2.b) et la chaleur totale  $Q'$  dépensée désormais en une journée (en  $\text{kW} \cdot \text{h}$ ) pour conserver à la pièce sa température.



exercice  
de colle

### Exercice 3.33

#### Igloo

On assimile un igloo en régime permanent à une demi sphère de rayon  $R = 1,5 \text{ m}$  et d'épaisseur  $e = 20 \text{ cm}$  ( $e \ll R$ ), en glace.



Un être humain dans l'igloo dégage une puissance thermique  $P_{th} = 75 \text{ W}$ .

1) Seule la conduction thermique sera prise en compte. Quelle est la température à l'intérieur  $T_{int}$  si la température extérieure est :

1.a)  $T_{ext} = -5^\circ ?$

1.b)  $T_{ext} = -10^\circ ?$

1.c)  $T_{ext} = -15^\circ ?$

1.d)  $T_{ext} = -20^\circ ?$

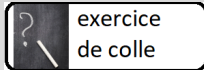
2) Même question si on prend en compte la convection.

On donne :

- la conductivité thermique de la neige  $\kappa = 0,25 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ;

- la loi de Newton :  $P_{th} = hS(T_{solide} - T_{fluide})$  ;

- la loi de Stefan-Boltzman :  $P_{th} = \sigma S T^4$ , où  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .



exercice  
de colle

### Exercice 3.34 Expérience d'Ingenhousz

On veut mesurer la conductivité thermique de l'étain, en connaissant celle du cuivre ( $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). Pour ce faire, on utilise le dispositif suivant : une cuve contient de l'huile portée à la température  $T_1$ , dans laquelle plongent deux fils identiques de rayon  $a$ . L'un est en cuivre, l'autre en étain.

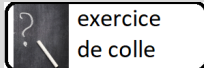
Chacun des deux fils est enduit de paraffine. La paraffine fond jusqu'à une longueur de 15,4 cm sur le cuivre à partir de la surface d'huile, 6,4 cm pour l'étain. La paraffine n'est présente que pour servir d'indicateur de température, aussi, on peut négliger sa présence et supposer que la température de la paraffine en un point est égale à la température du fil métallique en contact.



On modélise les deux fils métalliques par des tiges infinies cylindriques d'axe  $(Ox)$ . On suppose le rayon  $a$  suffisamment faible pour négliger la diffusion thermique radiale. On se place en régime permanent. Ainsi, la température des fils ne dépendent donc que de  $x$ .

On rappelle la loi de Newton qui donne le flux thermique surfacique entre le fil (à la température  $T_f$ ) et l'atmosphère (à la température  $T_a$ ) :  $j_{th} = h(T_f - T_a)$ .

- 1) Déterminer la conductivité thermique de l'étain.
- 2) Justifiez l'approximation de fil infini.



exercice  
de colle

### Exercice 3.35 Comment "péter les plombs"

"Un fusible moderne est constitué d'un fil ou d'une bande en métal ou alliage fusible, montée dans un corps isolant et reliée à deux pièces de connexion. Le corps peut contenir de l'air, ou un matériau destiné à absorber l'énergie thermique dégagée lors de la fusion : poudre de silice, liquide isolant... Le plus souvent, ce conditionnement impose l'utilisation d'un porte-fusible pour le raccordement du fusible au circuit électrique.

La nature du métal fusible varie selon les types de fusibles et les fabricants (zinc, argent, aluminium, alliage d'étain, etc.), et la technologie de ce matériau est particulièrement complexe. Les premiers fusibles se présentaient sous forme d'un fil nu, dont la couleur et la ductilité rappelait le plomb, et que l'utilisateur enroulait autour de bornes métalliques sur un support en céramique. Il en a résulté l'appellation familière (et erronée) de « plomb » pour désigner un fusible, ainsi que quelques dérivés argotiques (« péter les plombs », etc.)."

(article wikipédia)

Propriétés physiques du corps simple	
État ordinaire	solide
Masse volumique	11,35 g·cm <sup>-3</sup> (20 °C) <sup>1</sup>
Système cristallin	Cubique à faces centrées
Dureté	1,5
Couleur	blanc-gris
Point de fusion	327,46 °C <sup>1</sup>
Point d'ébullition	1 749 °C <sup>1</sup>
Énergie de fusion	4,799 kJ·mol <sup>-1</sup>
Énergie de vaporisation	179,5 kJ·mol <sup>-1</sup> (1 atm, 1 749 °C) <sup>1</sup>
Volume molaire	18,26×10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup> ·mol <sup>-1</sup>
Pression de vapeur	1,3 mbar (973 °C) <sup>4</sup>
Vitesse du son	1 260 m·s <sup>-1</sup> à 20 °C
Chaleur massique	129 J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
Conductivité électrique	4,81×10 <sup>6</sup> S·m <sup>-1</sup>
Conductivité thermique	35,3 W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>



On s'intéresse à un fil cylindrique de plomb, d'axe  $Oz$ , de rayon  $a$ , compris entre  $z = 0$  et  $z = \ell = 3,0$  cm, extrémités où la température vaut  $T_0 = 25^\circ$ . On supposera le problème unidimensionnel et les échanges thermiques nuls avec le gaz qui entoure le fil.

- 1) En utilisant l'analogie entre électricité et diffusion thermique en régime permanent, déterminer l'expression de la résistance électrique  $R$  du fil de plomb. En déduire la puissance volumique  $P_v$  échangée électriquement par le fil s'il est parcouru par un courant d'intensité électrique  $I$ .
- 2) Etablir l'équation différentielle suivie par la température  $T(z, t)$ .
- 3) Estimer le temps caractéristique  $\tau$  pour être en régime quasi-stationnaire. Par la suite on se place en régime quasi-stationnaire.
- 4) Déterminer la température dans le fil parcourue par un courant d'intensité électrique  $I$ . Où est-elle maximale ?
- 5) Déterminer le rayon du fil pour qu'il fonde pour une intensité égale à 5 A.

?  
exercice  
de colle

### Exercice 3.36 Echauffement d'un fil électrique



On s'intéresse à un fil électrique cylindrique en régime permanent, de rayon  $r_1$ , de résistance linéique  $R_l$ , entouré par une gaine d'isolant, de rayon extérieur  $r_2$ , de température de fusion  $T_f$  et de conductivité thermique  $\kappa$ .

1) Thermodynamique

1.a) Exprimer la densité  $\vec{j}_Q$  de flux de chaleur à travers la gaine isolante, en fonction de  $r$  et de  $I$ , l'intensité dans le fil.

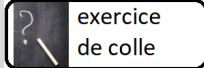
1.b) Calculer la température  $T(r)$ , sachant que la température extérieure est prise égale à  $T_e$ .

2) Application

2.a) Montrer que l'intensité ne doit pas dépasser un certain seuil  $I_{max}$ .

2.b) Expliquer pourquoi cette condition est très sensible à toute augmentation d'intensité.

2.c) Chercher toutes les possibilités pour optimiser le fil électrique.

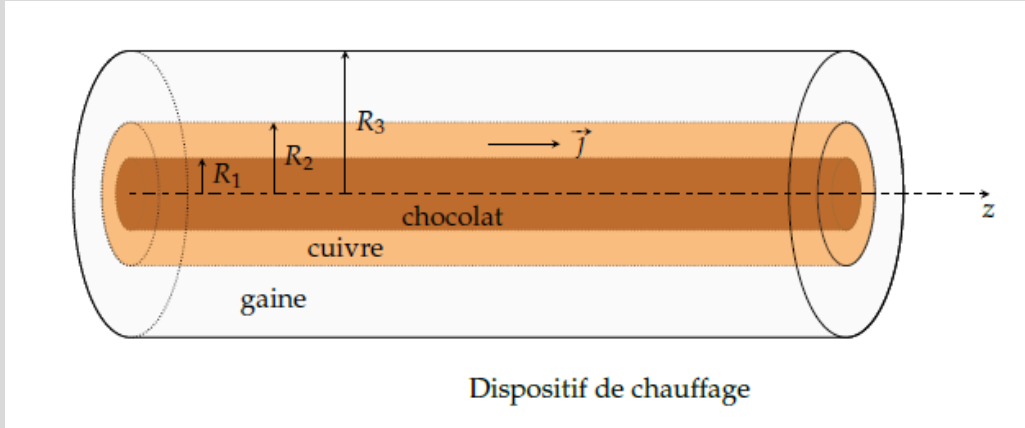


exercice  
de colle

### Exercice 3.37 Tempérage du chocolat

La première étape du tempérage du chocolat noir consiste à le faire fondre en l'amenant à une température de  $50^\circ\text{C}$  sans dépasser  $55^\circ\text{C}$ .

Un chocolatier-physicien imagine le dispositif suivant (cf. figure) : le chocolat est introduit sous forme d'un cylindre de rayon  $R_1$  dans un cylindre creux en cuivre d'axe  $zOz$  et de rayons intérieur  $R_2$  et extérieur  $R_3$ . Ce cylindre est lui-même protégé par une gaine de rayon extérieur  $R_3$ . Le cuivre est parcouru par un courant électrique axial d'intensité  $I$ , le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  étant supposé uniforme :  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ .

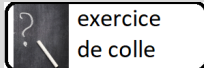


Toute l'étude sera effectuée en régime stationnaire de transferts thermiques et on négligera tout mouvement de convection dans le chocolat et tout effet de bord. L'air ambiant est à une température  $T_a$  égale à  $20^\circ\text{C}$ .

Données :

- Rayons  $R_3 = 2R_2 = 4R_1 = 4,0 \text{ cm}$
- Conductivité électrique du cuivre  $\gamma = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Conductivité thermique de la gaine  $\lambda = 1,0 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coefficient de transfert thermique de surface entre la gaine et l'air  $h = 2, \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

- 1) Une fois le régime stationnaire atteint, justifier que le chocolat est à une température uniforme, notée  $T_c$  par la suite .
- 2) En admettant que  $T_c - T_a = K I^\alpha$ , prévoir (sans calcul) la valeur de  $\alpha$ .
- 3) Démontrer l'expression précédente en explicitant notamment la constante  $K$ .
- 4) Quelle intensité de courant  $I$  permet de maintenir le chocolat à la température de  $50^\circ\text{C}$  ?
- 5) Discuter qualitativement puis quantitativement l'influence d'une modification de la valeur de  $I$ , de  $h$  ou de  $T_a$ . z



exercice  
de colle

### Exercice 3.38 Age de la Terre

#### 1) Equation de diffusion dans une sphère homogène

On assimile la Terre à une sphère solide homogène de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  qui se refroidit par conduction uniquement. Il n'y a pas de sources locales de chaleur. La masse volumique de la Terre est notée  $\mu$ , la capacité thermique massique  $c$  et la conductivité thermique  $\kappa$ . Selon l'hypothèse de Buffon, la Terre est initialement (à la date  $t = 0$ ) une sphère incandescente en fusion.

**1.a)** Expliquer pourquoi la température  $T(r, t)$  ne dépend que de  $r$  (dans un repère sphérique de centre  $O$ ) et de la date  $t$ .

**1.b)** En faisant un bilan énergétique pour le volume compris entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$ , montrer que  $T(r, t)$  vérifie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T \text{ (équation 1)}$$

où l'on donnera l'expression et l'unité de la constante  $D$  et l'expression du laplacien  $\Delta T$  de  $T(r, t)$ .

**1.c)** Que devient l'équation (1) dans le cas unidimensionnel, pour  $T(x, t)$  ?

#### 2) Estimation par Buffon de l'âge de la Terre par refroidissement

On ne cherche pas ici une solution de l'équation de diffusion précédente, mais plutôt à relier des ordres de grandeurs caractéristiques du problème :  $\tau$  la durée de refroidissement et  $R$  la taille caractéristique de la sphère.

**2.a)** Montrer que si  $R$  est multipliée par deux,  $\tau$  est multipliée par 4.

**2.b)** Expliquer pourquoi l'extrapolation linéaire menée par Buffon à partir de boulets de dimensions comprises entre 1/2 pouce et 5 pouces, jusqu'au rayon terrestre de 6 400 km, est fautive.

#### 3) Solution de l'équation de diffusion

On admet que les intégrales de gaussienne :

$$f(x, t) = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D \cdot t}}} e^{-z^2} dz$$

sont solutions à l'équation de diffusion. On donne par ailleurs la valeur de l'intégrale :  $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**3.a)** Tracer sur le même graphique l'allure de  $f(x, t)$  en fonction de  $x$ , pour  $x > 0$ , aux dates  $t = t_1$  et  $t = t_2 > t_1$ , ainsi que le cas où  $t \rightarrow 0$ .

**3.b)** Dédurre des propriétés de l'équation de diffusion que

$$T(x, t) = a f(x, t) + b \text{ (équation 2)}$$

est aussi solution de l'équation (1) dans le cas unidimensionnel, si  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles.

#### 4) Estimation par Kelvin de l'âge de la Terre

On va utiliser une fonction  $T(x, t) = a f(x, t) + b$  pour déterminer la température en fonction de  $x$  la profondeur ( $x = 0$  à la surface de la Terre) et de la date  $t$  ( $t = 0$  à la formation de la Terre), dans le cadre des hypothèses de Kelvin.

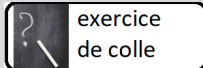
**4.a)** Montrer que l'hypothèse selon laquelle "au centre de la Terre, la température, par inertie thermique, conserve grosso modo sa valeur initiale" se caractérise par le fait que  $R_T$  peut être considéré comme quasi infini. Expliquer en quoi cela valide le choix d'un modèle unidimensionnel.

**4.b)** Déterminer les valeurs numériques des coefficients  $a$  et  $b$ .

**4.c)** Exprimer le gradient de température à la surface à la date  $t$ .

**4.d)** En utilisant le fait que "aujourd'hui lorsqu'on s'enfonce sous la Terre on gagne en moyenne de l'ordre de 3 °C tous les 100 mètres", déterminer l'âge de la Terre selon Kelvin. On estimera les caractéristiques physiques nécessaires au calcul.





exercice  
de colle

### Exercice 3.39 Le gel d'un lac

On s'intéresse à un lac en hiver.



"Les autorités québécoises déconseillent toute activité sur glace (pêche, marche, patinage, etc.) avec une épaisseur inférieure à 10 cm. Il faut attendre 12 cm en motoneige ou VTT, 20 cm en voiture et 30 cm en camion." (source : [www.francetvinfo.fr/meteo/trois-choses-a-savoir-avant-de-s-aventurer-sur-un-lac-gele\\_821073.html](http://www.francetvinfo.fr/meteo/trois-choses-a-savoir-avant-de-s-aventurer-sur-un-lac-gele_821073.html)).

Cet exercice se propose de modéliser la croissance d'une couche de glace d'épaisseur  $\ell(t)$  à la surface d'un lac gelé. Le problème est traité à une dimension, l'axe  $Oz$  étant vertical : la température de la glace est  $T(z, t)$ . La glace a

- une masse volumique  $\rho_g = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,
- une conductivité thermique  $\lambda_g = 2,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- une capacité thermique  $c_g = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,
- une chaleur latente de solidification  $L_g = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

L'air, au loin, est à la température constante  $T_a = 253 \text{ K}$ . A l'interface glace/air règne une température de surface  $T_s(t)$ , fonction du temps et donc différente de  $T_a$ . La convection y est gouvernée par la loi de Newton :

$$\|\vec{j}_{th}\| = h(T_s(t) - T_a)$$

où  $h = 50 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$  est le coefficient de transfert thermique de surface.

L'eau liquide du lac au contact de la glace est à la température de congélation  $T_c = 273 \text{ K}$ . La chaleur dégagée par la solidification de l'eau à l'interface eau/glace est transportée vers la surface où elle est libérée dans l'air.

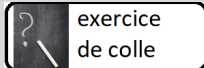
- 1) Démontrer l'équation de diffusion thermique suivie par la température dans la glace.
- 2) Démontrer par des ordres de grandeurs que l'on est en régime quasi-stationnaire. Quelles sont les deux conséquences que cela entraîne sur la température et le flux thermique dans la glace ?
- 3) Montrer que l'équation différentielle de croissance de l'épaisseur  $\ell(t)$  est

$$\frac{d\ell}{\ell_0} \left( 1 + \frac{\ell}{\ell_0} \right) = \frac{dt}{\tau}$$

Donner l'expression de  $\tau$  et  $\ell_0$ .

4) En supposant  $\ell(t=0) = 0$ , trouver l'expression du temps à attendre  $t$  pour que la glace ait une épaisseur  $\ell$ . Quelle est la valeur numérique du temps

- $t_1$  nécessaire à la formation du premier centimètre de glace ?
- $t_2$  nécessaire pour pouvoir marcher en sécurité sur la glace ?
- $t_3$  nécessaire pour pouvoir faire passer un camion en sécurité sur la glace ?



exercice  
de colle

### Exercice 3.40 Réfrigérant utilisé en chimie

On modélise le fonctionnement d'un réfrigérant utilisé en chimie par : un fluide (1) traversant un cylindre de longueur  $L$  et un fluide (2) qui refroidit le fluide (1) (cf schéma).

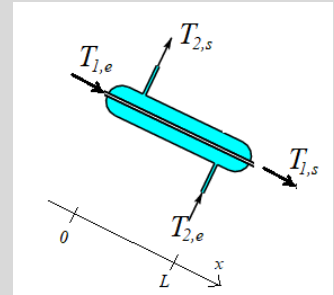
On se placera en régime permanent et on supposera que tous les échanges thermiques se font, du fait d'un isolant thermique extérieur, uniquement entre les deux fluides à travers la paroi les séparant.

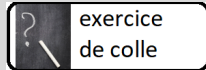
Les deux fluides ont une même capacité thermique  $c$  et sont supposés incompressibles. On néglige toute variation d'énergie cinétique/potentielle dans notre étude. La surface de contact entre le fluide (2) et le cylindre est  $S = L a$ . On notera  $D_1$  le débit massique du fluide (1) et  $D_2$  celui du fluide (2).

Le problème est unidimensionnel et en régime permanent, les températures des fluides ne dépendent que de  $x$ . Les parois extérieures sont calorifugées, le transfert thermique du fluide (1) vers le fluide (2) est donné par la loi de Newton :  $\delta Q = h \Delta T dS dt$  avec  $\Delta T(x) = T_1(x) - T_2(x)$ . pour une surface  $dS$  pendant  $dt$ .

1) Exprimer les variations d'enthalpie massique  $\Delta h_1$  et  $\Delta h_2$  pour les deux fluides. En déduire les expressions de  $P_{th1}$  et  $P_{th2}$ , les puissances thermiques échangées par les fluides. Quelle relation relie  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $T_{1,E}$ ,  $T_{1,S}$ ,  $T_{2,E}$  et  $T_{2,S}$  ?

2) Déterminer l'expression de  $\Delta T(x)$ .



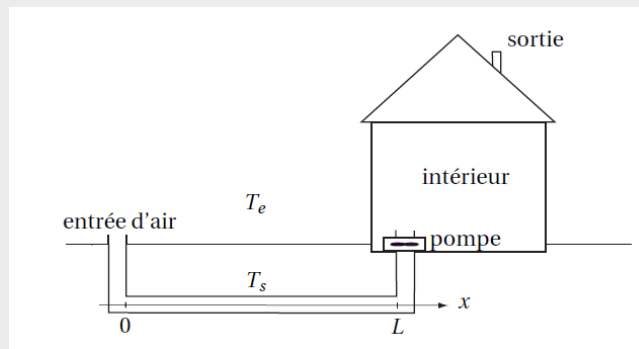


exercice  
de colle

### Exercice 3.41 Puits canadien ou puits provençal

Le puits canadien est un système de préchauffage passif de l'air utilisant les réserves d'énergie du sol entourant la maison. En faisant passer l'air dans une canalisation enterrée dans le sol, celui-ci se réchauffe, ce qui permet de réduire fortement la consommation électrique de chauffage en hiver, ainsi que les émissions de  $\text{CO}_2$  qui en résultent. Dans cette exercice, un modèle simple de ce dispositif est étudié.

Une entrée d'air est située à une distance  $L$  de la maison. Une pompe à l'intérieur de la maison permet de faire circuler l'air dans un tuyau de section  $S$  enterré à une profondeur  $h$  dans le sol, la température du sol étant  $T_s = 10^\circ\text{C}$ .



On suppose que les échanges thermiques ne se font que dans la partie horizontale de la canalisation (cylindre de rayon  $R$ ), comprise entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . La température du sol autour de la canalisation est uniforme et constante et vaut  $T_s$ . L'air est considéré comme un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante  $c_P$ , de masse volumique  $\mu$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On suppose que la température  $T(x)$  est uniforme sur une section droite du tube. L'air se déplace à la vitesse  $v$  constante et uniforme. Il entre dans la canalisation, en  $x = 0$ , à la température  $T_e$ .

Les échanges thermiques le long de la paroi entre l'air et le sol sont décrites par le flux thermique surfacique :  $\phi = h(T(x) - T_s)$  où  $h = 6,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1) En vous référant au dernier exemple traité dans le cours, expliquer pourquoi on peut considérer que la température dans le sol est peu sensible aux variations de température de l'air extérieur au cours de la journée.

2) En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système fermé constitué de l'air contenu dans la portion de canalisation comprise entre les plans d'abscisse  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$ , montrer que la température  $T(x)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{c_P \mu v}{\lambda} \frac{dT}{dx} - \frac{2h}{\lambda R} (T(x) - T_s) = 0$$

3) À quelle condition sur  $\lambda$ ,  $L$ ,  $\mu$ ,  $c_P$  et  $v$  peut-on négliger le transfert thermique par diffusion devant le transfert thermique par convection ? Donner un ordre de grandeur de la vitesse minimale de l'air dans le tuyau pour que cette approximation soit valable.

Simplifier alors l'équation vérifiée par la température  $T(x)$ .

4) Résoudre cette équation en faisant apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  à exprimer en fonction des paramètres du problème.

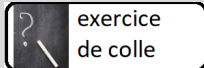
5) Établir l'expression littérale de la longueur  $L$  de canalisation nécessaire à l'obtention d'une température d'entrée de l'air dans la maison égale à  $T_L$  donnée. Pourquoi le puits permet de réduire fortement la consommation électrique de chauffage ? Quelle peut être l'utilité du puits en été (il est appelé également « puits provençal ») ?

6) Le volume de la maison est  $V = 800 \text{ m}^3$ , le rayon de la canalisation est  $R = 10 \text{ cm}$ , l'air extérieur est à la température  $T_e = 30^\circ\text{C}$ . On veut renouveler l'air de la maison en 2 heures.

6.a) Quelle doit être la valeur de la vitesse  $v$  ?

6.b) Quelle doit être la longueur de la canalisation pour que la température d'entrée de l'air dans la maison soit de  $20^\circ\text{C}$  ?

6.c) La diffusion thermique le long de la canalisation est-elle bien négligeable ? A-t-on intérêt à augmenter ou à diminuer la vitesse ? la section de la canalisation ?



exercice  
de colle

### Exercice 3.42

#### Pourquoi les avions ne sont-ils pas noirs ?

La surface externe du Soleil est assimilée à un corps noir sphérique, de rayon  $R_s = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$ , maintenu à la température  $T_s = 5800 \text{ K}$  et situé à la distance  $a = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$  de la Terre. On adopte les valeurs numériques suivantes :

la valeur adoptée de la célérité de la lumière dans le vide est toujours :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

constante de Planck :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  ;

constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Dans tout le problème, le milieu de propagation des ondes électromagnétiques est assimilé au vide.

La puissance  $P$  rayonnée par unité de surface d'un corps noir est répartie sur l'ensemble des longueurs d'onde  $\lambda$  possibles, avec, pour répartition selon la fréquence  $\nu$ , ou selon la longueur d'onde  $\lambda$ , la loi de Planck :

$$\frac{dP_u}{d\nu} = C^{te} \cdot T^3 \cdot g(u) \quad \text{où } g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1} \quad \text{et } u = \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T}$$

La fonction  $g(u)$  vérifie  $\int_{u=0}^{+\infty} g(u) \, du = \frac{\pi^4}{15}$ .

On pose aussi  $\frac{dP_u}{d\lambda} = h(u)$ .

**I) Étude générale du rayonnement thermique solaire**

La constante  $C^{te}$  de la loi de Planck n'est fonction que des constantes universelles  $h$ ,  $c$  et  $k_B$ , sous la forme :

$$\kappa (c^\alpha) (h^\beta) (k_B^\gamma) = C^{te}$$

où  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes sans dimension.

**I.1)** Déterminer les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

L'étude expérimentale du rayonnement du corps noir porté à la température  $T$  montre que la puissance rayonnée par unité de surface de ce dernier, sommée pour toutes les fréquences, est donnée par la loi de Stefan :  $P = \sigma \cdot T^4$  où  $\sigma = 5,69 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

**I.2)** Déterminer la valeur numérique de la constante sans dimension  $\kappa$ . Sachant que la valeur théorique est  $\kappa = 2\pi$ , commenter la précision de la mesure.

**I.3)** Déterminer la fonction  $h(u)$ . On admettra dans la suite que cette fonction présente, en fonction de  $u$ , un maximum unique atteint pour la valeur  $u_m = 4,97$ .

**I.4)** Établir la loi de déplacement de Wien, liant la longueur d'onde  $\lambda_m$  du maximum d'émission thermique d'un corps noir, à la température  $T$  à laquelle celui-ci est chauffé. Application numérique : comparer les valeurs de la longueur d'onde  $\lambda_m$  pour le rayonnement thermique de l'ensemble de l'atmosphère terrestre en été (assimilée à un corps noir à la température de  $20^\circ \text{C}$ ) et pour le rayonnement thermique solaire. Votre résultat est-il conforme à la couleur apparente du Soleil ? Discuter votre réponse, quelle qu'elle soit.

**I.5)** Calculer la valeur numérique de la puissance rayonnée par le Soleil par unité de surface au niveau du sommet de l'atmosphère terrestre,  $\phi_s^\circ$  (on ne tient pas compte de l'obliquité, la surface considérée est normale au rayonnement) ; comparer cette valeur à la puissance effectivement reçue au niveau du sol, qui est en moyenne de l'ordre de  $\phi_s = 700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Commenter.

**I.6)** Un satellite GPS situé en haute atmosphère, passe deux fois par jour, de la nuit (pendant laquelle le rayonnement est négligeable) au plein soleil. En admettant qu'il atteigne à chaque fois l'équilibre thermique, et qu'il se comporte, en émission comme en absorption, comme un corps noir, estimer dans chaque cas sa température d'équilibre ; commenter ce résultat et les conditions de son obtention (influence de la forme du satellite, de sa position.)

**II) Étude de l'échauffement d'un aéronef**

Un avion garé au sol est assimilé, pour l'étude de la seule cellule de transport des passagers, à un long cylindre métallique de longueur  $L$  et de rayon  $r$ , pour lequel on négligera tout effet de bord. On étudie son comportement thermique par une journée d'été, la température de l'atmosphère ambiante étant prise égale à  $T_{aa} = 303 \text{ K}$ .

Du fait de l'absorption du rayonnement solaire d'une part, et de celui envoyé par l'atmosphère toute entière d'autre part, l'avion adopte, en régime permanent, une température  $T$  supérieure à celle  $T_{aa}$  de l'air ambiant.

Le rayonnement solaire direct correspond au niveau du sol à une puissance thermique par unité de surface ensoleillée égale à  $\phi_s = 700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ; la puissance absorbée par l'avion (qui n'est certainement pas un corps noir) est égale à  $\varepsilon \cdot S_d \cdot \phi_s$ , où  $S_d$  est la surface de la partie de l'avion exposée au rayonnement solaire direct (on convient que ce sera la moitié de la surface totale) et  $\varepsilon$  un coefficient qui varie, selon la couleur de la peinture de l'avion, entre 0,25 (avion blanc) et 0,9 (avion sombre).

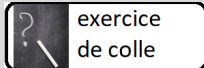
L'avion reçoit aussi, sur toute sa surface latérale  $S$ , le rayonnement thermique de l'ensemble de l'atmosphère (Soleil exclu), assimilé à celui d'un corps noir de température égale à la température moyenne de l'atmosphère,

notée  $T_{ma}$  ; on posera  $\phi_a = \sigma.T_{ma}^4$  et la puissance absorbée par la surface  $S$  de l'avion sera  $S.\phi_a$ . Pour les applications numériques, on prendra  $T_{ma} = 290K$ .

On néglige les échanges thermiques de l'avion avec le sol ; l'avion ne se refroidit donc que par l'effet de la convection de l'air ambiant, à travers toute sa surface  $S$ . Le flux thermique correspondant est décrit par le coefficient de transfert thermique de surface  $h$ , de sorte que la puissance échangée avec l'air par l'avion s'écrit, au signe près,  $S.h.|T - T_{aa}|$ . En l'absence de toute convection forcée, la convection naturelle est bien décrite par la relation empirique :  $h = g.|T - T_{aa}|^{1,25}$  avec la valeur  $g = 2,4$  dans le système international d'unités.

**II.1)** Établir l'équation vérifiée par la température  $T$  de l'avion en régime permanent, en fonction de  $\varepsilon$ ,  $g$ ,  $\sigma$ ,  $T_{aa}$ ,  $T_{ma}$  et  $\phi_s$ . Résoudre (par une méthode numérique ou graphique) cette équation pour un avion blanc puis pour un avion sombre. Conclure.

**II.2)** L'avion en vol en altitude est-il plus chaud que lorsqu'il est garé, au sol ? Expliquer qualitativement le sens de variation des différents termes intervenant dans le bilan thermique. De quel phénomène supplémentaire faudrait-il tenir compte pour évaluer la température de l'avion dans ce cas ?



exercice  
de colle

### Exercice 3.43 Lampes à sucre

Les pâtisseries réalisent des décors en sucre en modelant du sucre maintenu à une température entre  $70^\circ\text{C}$  et  $80^\circ\text{C}$  sous une ou des lampes éclairant le plan de travail (cf. figure). On considèrera la lampe de faible dimension et émettant un rayonnement isotrope de puissance totale  $P = 375\text{ W}$  et de répartition spectrale identique à celle d'un corps noir de température  $T_L = 2000\text{ K}$ .

La lampe est située à une distance  $h$  du plan de travail. En plus de la puissance envoyée par la (ou les) lampe(s), le sucre de température  $T_s$  cède au milieu extérieur la puissance surfacique  $\varphi_{s \rightarrow a}$  égale à  $h_0(T_s - T_a)$  où  $T_a$  est la température de l'air de la pièce. On prendra  $h_0 = 10\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $T_a = 20^\circ\text{C}$ .



(a) Une lampe



(b) Deux lampes

## Lampes à sucre

### 1) Dispositif à une lampe

**1.a)** Dans quel domaine du spectre électromagnétique se trouve le rayonnement émis par la lampe ?

Quels sont les phénomènes physiques modélisés par la loi  $\varphi_{s \rightarrow a} = h_0(T_s - T_a)$  ?

**1.b)** Exprimer la puissance surfacique rayonnée par la lampe au point  $O_1$  du plan de travail situé à la verticale de la lampe. En admettant que le sucre se comporte comme un corps noir pour le domaine spectral précédent, à quelle hauteur  $h_1$  doit-on placer la lampe pour que le sucre situé en  $O_1$  soit maintenu à  $80^\circ\text{C}$  ?

**1.c)** Exprimer la puissance surfacique rayonnée par la lampe en un point  $M$  du plan de travail situé à une distance  $r$  du point  $O_1$ . Quelle surface du sucre sera à une température comprise entre  $70^\circ\text{C}$  et  $80^\circ\text{C}$  permettant de le travailler ?

### 2) Dispositif à deux lampes

On note  $O_1$  et  $O_2$  les points respectifs du plan de travail situé à la verticale de la lampe 1 et à la verticale de la lampe 2 et on note  $O$  le milieu de  $[O_1O_2]$ . La distance  $O_1O_2$  est notée  $D$ .

**2.a)** Calculer le rapport  $D/h$  pour que la température du sucre soit la même en  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O$ .

**2.b)** Calculer la hauteur  $h_2$  des lampes par rapport au plan de travail pour que cette température soit  $80^\circ\text{C}$ .

### 3) Comparer les deux dispositifs.