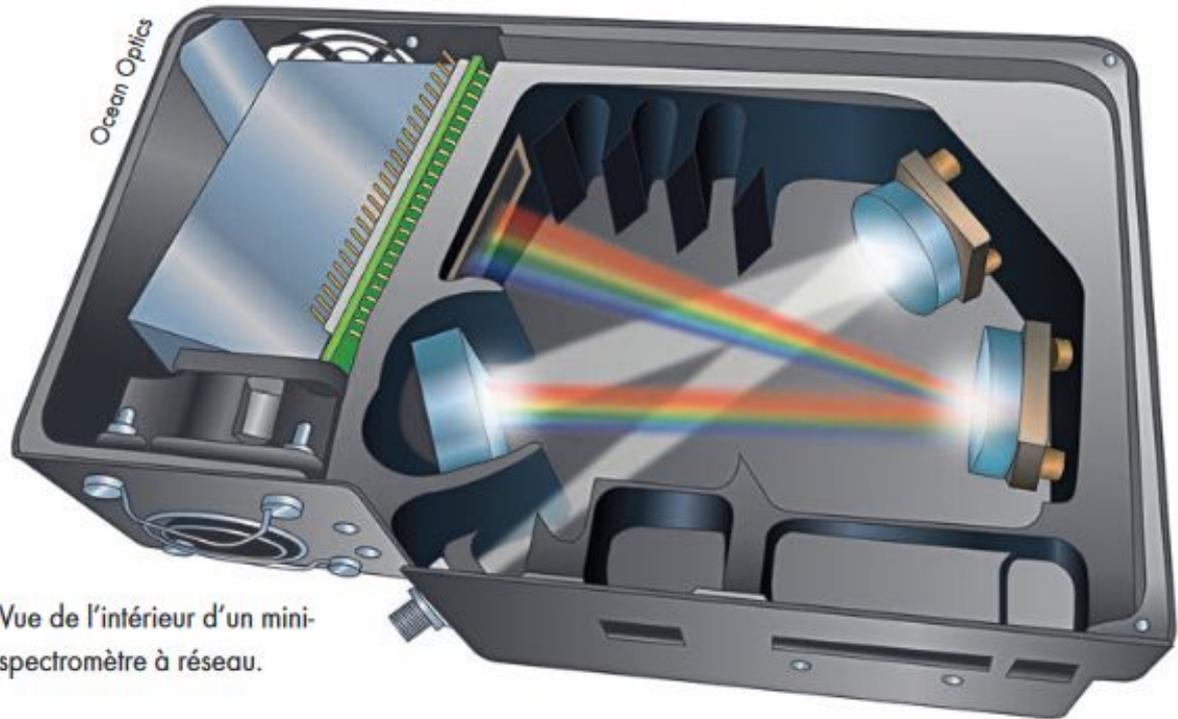
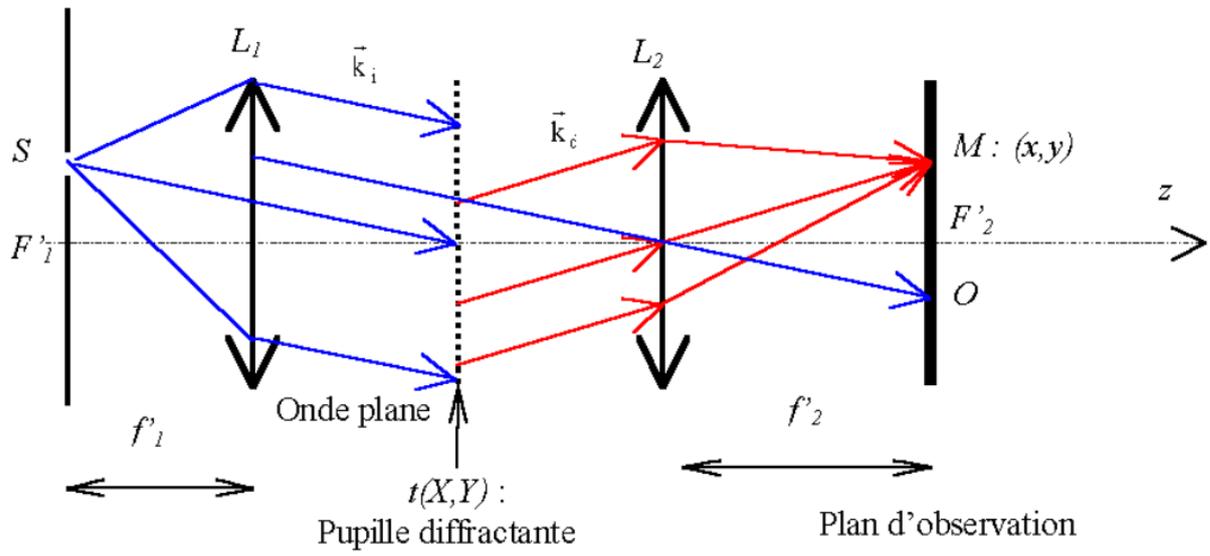


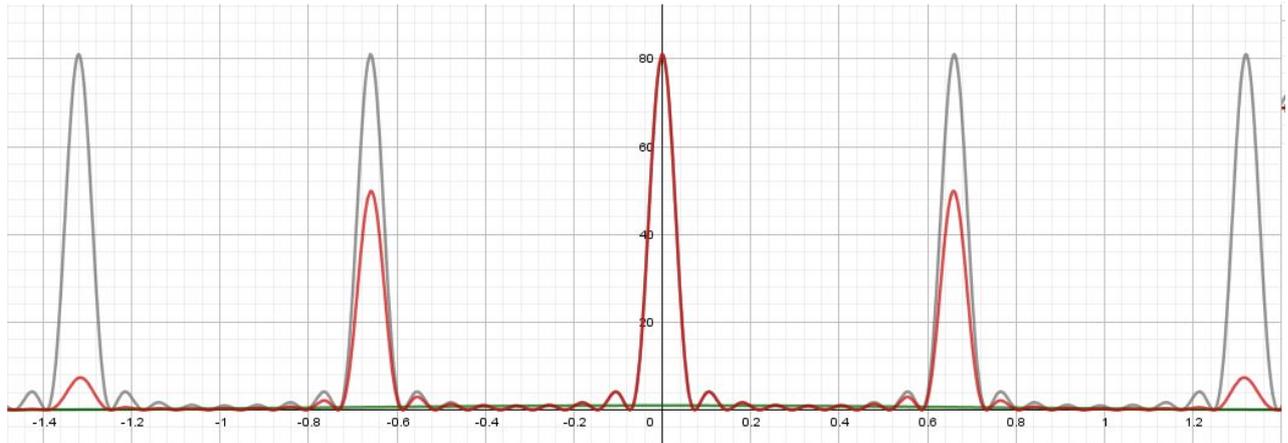
# Comprendre le principe d'un spectromètre à réseau



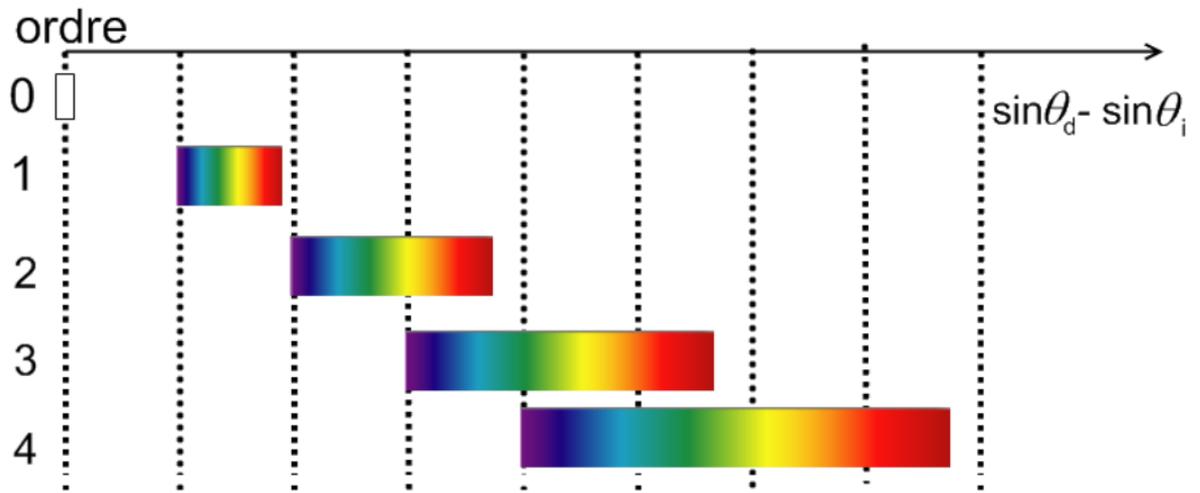
## I - Le cadre de la diffraction de Fraunhofer



## II - de 2 fentes de Young à N fentes



### III - Le fonctionnement des réseaux



# Diffraction

## Les points du cours à connaître

### I- Diffraction de Fraunhofer

#### 1. Cadre de la diffraction de Fraunhofer



##### Phénomène de diffraction *vidéo*

La diffraction est un écart à la propagation rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par la réflexion, ni par la réfraction.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



##### Transmission d'une pupille diffractante *définition*

La transmission est complexe, telle que  $|\tilde{t}| \in [0; 1]$  :

- $\tilde{t}(P) = 0 \Rightarrow$  la pupille est opaque en  $P$  ;
- $\tilde{t}(P) = 1 \Rightarrow$  la pupille est transparente en  $P$  ;
- $\tilde{t}(P) = e^{j\varphi(P)} \Rightarrow$  la pupille est un "objet de phase" en  $P$ .



##### remarque

dans le cadre de l'optique géométrique, les rayons émergents de la pupille devraient être dans la même direction que ceux qui sont incidents ( $\vec{k}_i = \vec{k}_d$ ), du fait de la propagation rectiligne de la lumière. Mais dans le cadre de la diffraction, ce n'est pas nécessairement le cas :  $\vec{k}_i \neq \vec{k}_d$ .



##### Montage académique *animation*

La figure 1 représente les conditions de la diffraction de Fraunhofer : on éclaire la pupille diffractante avec une onde incidente plane monochromatique (de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ ), c'est à dire par un faisceau laser parallèle ou par une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente  $L_1$ , et on observe en  $M$  à l'infini (dans la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}_d$ ) c'est à dire dans le plan focal d'une lentille convergente  $L_2$ .

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



##### Montage simplifié *schéma*

La figure 2 représente pour simplifier, on peut utiliser une unique lentille juste avant la pupille diffractante et regarder l'image de diffraction dans le plan image de la source ponctuelle par cette lentille.

#### 2. Limitation de la résolution à cause de la diffraction

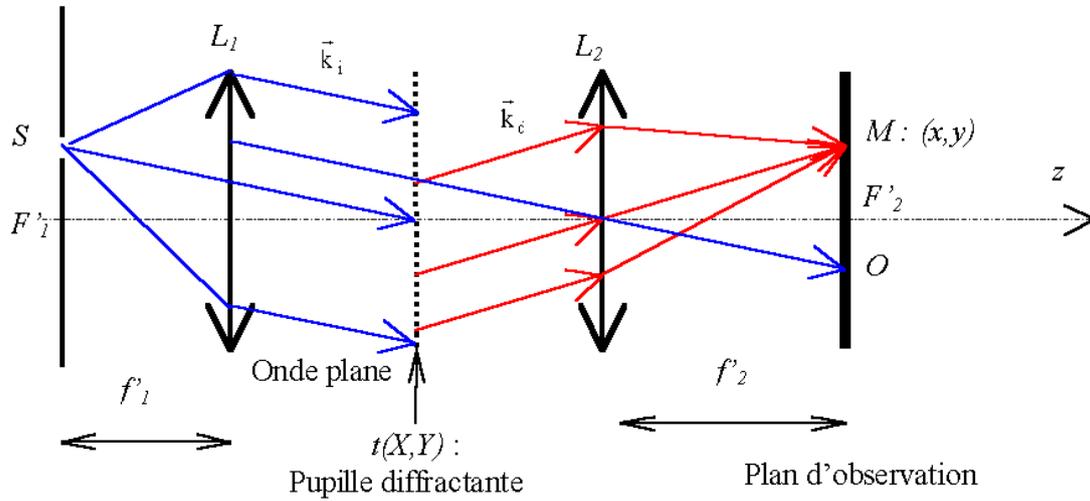


FIGURE 1 – Montage académique

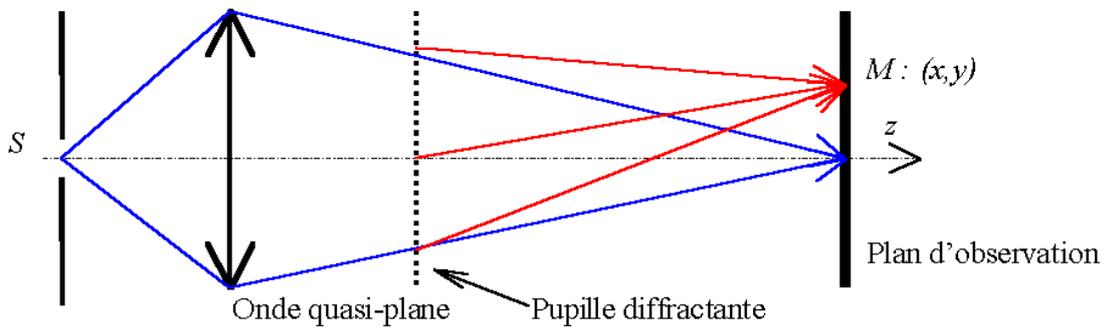
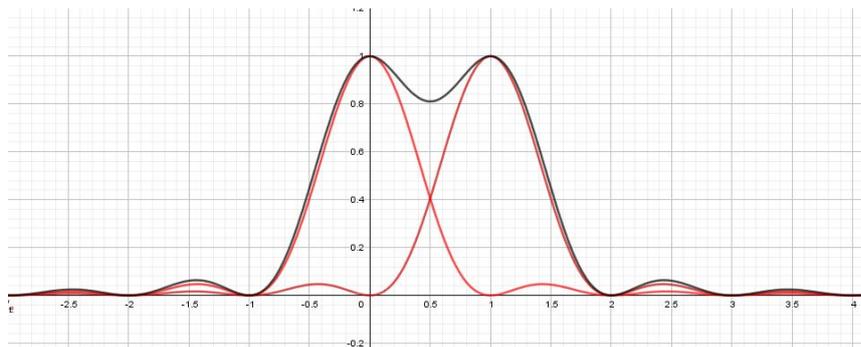


FIGURE 2 – Montage simplifié

 **Illustration du critère de Rayleigh** *animation*



On peut discerner deux taches lumineuses dès que le minimum de l'une correspond au maximum de l'autre.

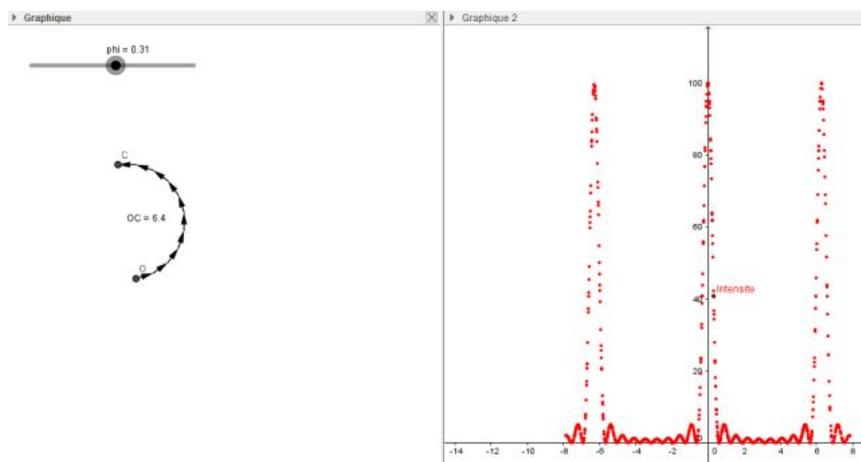
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

 **Limitation de la résolution d'un instrument optique par la diffraction** *à retenir*  
 La diffraction par l'ouverture d'un instrument d'optique limite la résolution de ce dernier.

## II- Interférences à $N$ ondes

### 1. Interférences créées par $N$ fentes infiniment fines

 **Utilisation des vecteurs de Fresnel** *animation*



On peut trouver les minima et maxima d'intensité.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

 **Effet du nombre de fentes sur la courbe de l'intensité lumineuse** *animation*

La courbe de l'intensité en fonction de la direction présente des pics. En augmentant le nombre de fentes, la position des pics ne change pas, leur intensité augmente et leur largeur diminue.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

 **Effet du nombre de fentes sur l'image de diffraction** *animation*

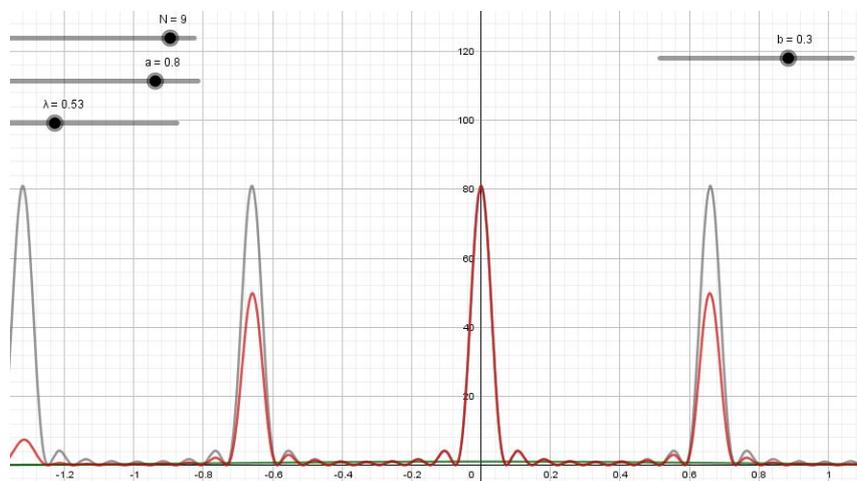
La largeur des taches de diffraction diminue à mesure que le nombre de fentes augmente. On ne visualise de la lumière diffractée que dans certaines directions appelées ordres du réseau. L'ordre nul correspond à l'optique géométrique (pas de déviation des rayons incidents). Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

 **Effet du nombre de fentes sur la courbe de l'intensité lumineuse** *à retenir*

L'intensité diffractée par  $N$  fentes présente des pics. En augmentant le nombre de fentes, la position des pics ne change pas, leur intensité augmente et leur largeur diminue.

**2. Interférences créées par  $N$  fentes fines**

 **Diffraction par  $N$  fentes de largeur non nulle** *animation*



L'intensité diffractée est le produit :  
 des pics trouvés pour  $N$  fentes infiniment fines (distants de  $\frac{\lambda}{a}$ )  
 par l'intensité diffractée par une fente de largeur  $b$ , de taille  $\frac{\lambda}{b}$ .  
 Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

 **Diffraction par  $N$  fentes de largeur non nulle** *à retenir*

L'intensité diffractée par  $N$  fentes infiniment fines est modulée par l'intensité diffractée par une fente de largeur non nulle.

**III- Réseaux**

**1. Formule des réseaux**

 **Caractéristiques d'un réseau par transmission** *s'y retrouver*

Un réseau par transmission est un ensemble de  $N$  pupilles identiques ( $N \gg 1$ ) régulièrement espacées (de  $a$  suivant  $x$ ).

- $a$  est la période spatiale du réseau (en m);

- $n = \frac{1}{a}$  est le nombre de traits par millimètres (en  $\text{m}^{-1}$ ).

### Réseaux par réflexion *s'y retrouver*

un réseau par réflexion peut être compris comme un réseau par transmission accolé à un miroir plan.

### Réseaux holographiques *s'y retrouver*

un réseau holographique est la photographie de franges d'interférences (l'interfrange  $i$  est alors la période  $a$  du réseau).

## 1 Formule des réseaux *théorème*

On cherche pour quelles directions il y a interférence constructive :  $\Delta = a \cdot \sin \theta_d - a \cdot \sin \theta_i = p \cdot \lambda$ , où  $p$  est entier.  $\Rightarrow$

Si on éclaire un réseau de période spatiale  $a$  avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) qui fait un angle  $\theta_i$  avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions repérées par les angles  $\theta_p$  par rapport à la normale au plan du réseau, telles que

$$\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$$

( $p$ , l'ordre de diffraction, est entier).

## Utilisation d'un réseau *vidéo*

on visualise de la lumière monochromatique à la sortie d'un réseau par transmission uniquement dans certaines directions : les ordres. Eclairé en lumière blanche, le réseau disperse la lumière et permet d'en visualiser le spectre.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## 2. Déviation par un réseau

### Angle de déviation *définition*

L'angle de déviation pour l'ordre  $p$  est

$$D = \theta_p - \theta_i$$

où le rayon incident fait un angle  $\theta_i$  avec la normale au réseau, et le rayon diffracté dans l'ordre  $p$  un angle  $\theta_p$ .

## 2 Minimum de déviation dans le cas du réseau *théorème*

$$dD = 0 = d\theta_p - d\theta_i, \text{ soit } d\theta_p = d\theta_i$$

Or la dérivation de la formule des réseaux donne :  $\cos \theta_p d\theta_p - \cos \theta_i d\theta_i = 0$ , soit  $\cos \theta_p = \cos \theta_i$ .

Il y a deux solutions : soit  $\theta_p = \theta_i$  (et la déviation est nulle : c'est l'ordre nul, qui ne nous intéresse pas), soit  $\theta_p = -\theta_i$ .  $\Rightarrow$

Si on éclaire un réseau de période spatiale  $a$

avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ )

et que la déviation est minimale ( $D = D_{\min} \Leftrightarrow \theta_p = -\theta_i$ )

on a alors la formule

$$2 \sin \left( \frac{D_{\min}}{2} \right) = \frac{p \lambda}{a}$$

## 3. Applications des réseaux

### 👁 Spectre visible *photo*



le spectre visible s'étale de 400nm à 750nm.

### 👁 Phénomène de recouvrement des ordres *animation*

La figure 3 représente Les spectres des ordres 2 et supérieurs se recouvrent. Seul l'ordre 1 est exempt de ce défaut..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

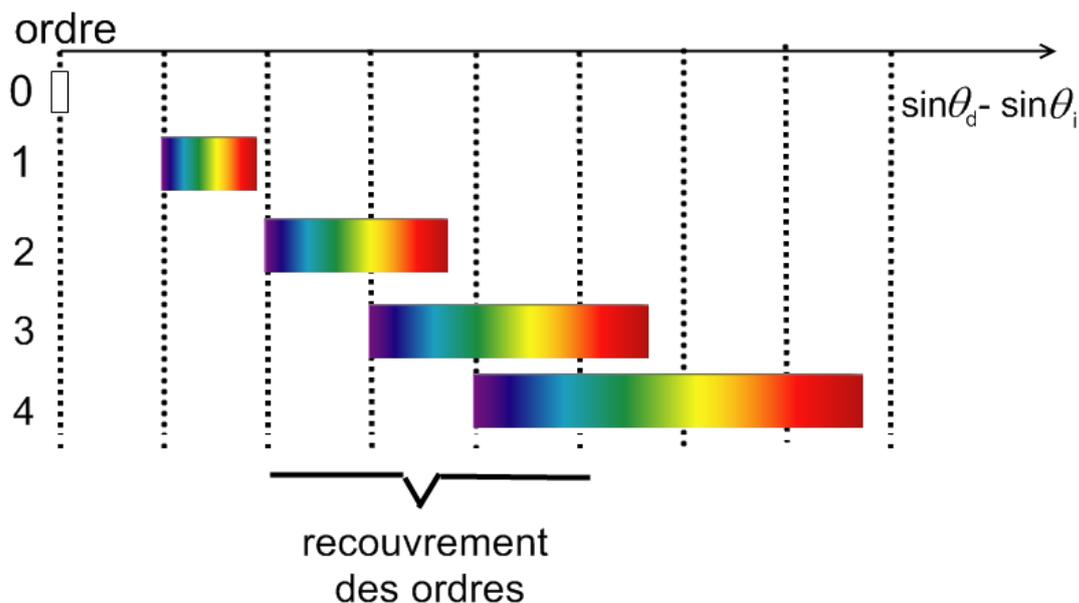


FIGURE 3 – Phénomène de recouvrement des ordres

**Caractère dispersif des réseaux** *s'y retrouver*

| sauf pour l'ordre 0, la direction de diffraction dépend de la longueur d'onde.

**Spectromètres et spectroscopes** *s'y retrouver*

| on peut analyser la lumière en créant une onde plane qui est diffractée par un réseau. On réalise ainsi un spectromètre (une seule longueur d'onde en sort) ou bien un spectroscopie (toutes les longueurs d'onde sortent dispersées).

**Goniomètre** *s'y retrouver*

| le goniomètre permet d'observer (sur un réticule) une onde plane qui est diffractée par un réseau, et de mesurer très précisément (avec un vernier angulaire) la déviation du faisceau.



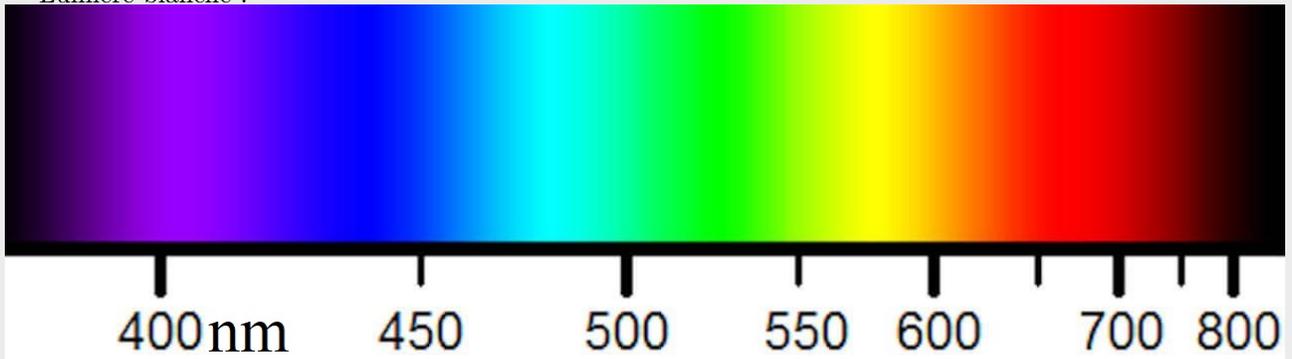
## Valeurs numériques (compléments) Diffraction

### Réseaux optique

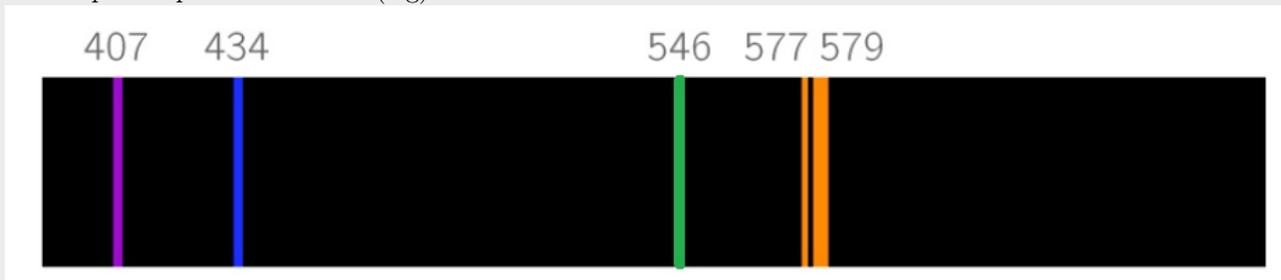
Les réseaux usuellement utilisés ont entre 150 et 1000 traits / mm.

### Spectres

Lumière blanche :

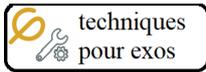


Lampe à vapeur de mercure (Hg) :



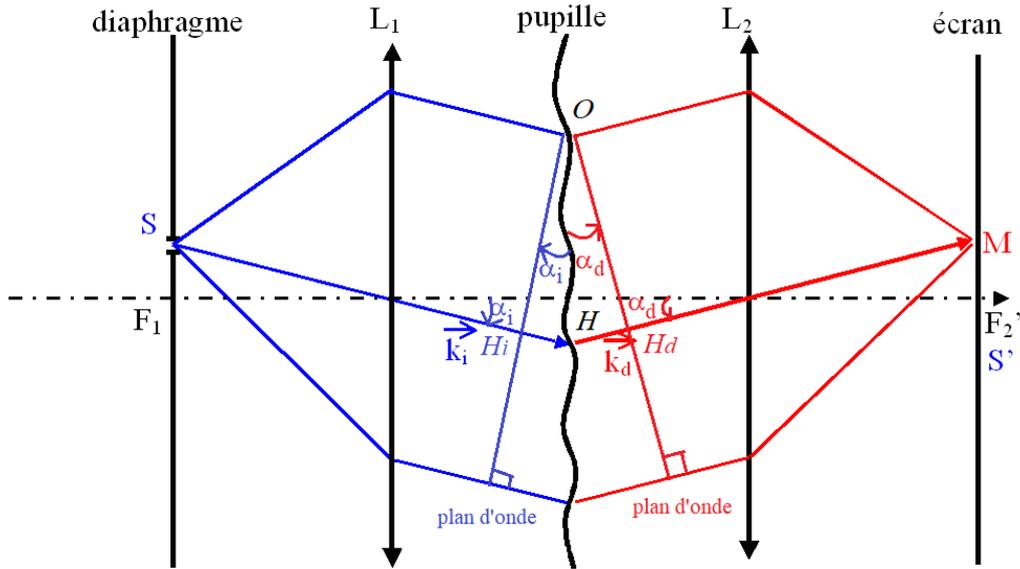
Lampe à vapeur de sodium (Na) :

Doublet orange à 589,0 et 589,6 nm.



**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

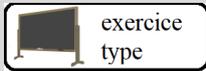
**Diffraction de Fraunhofer**



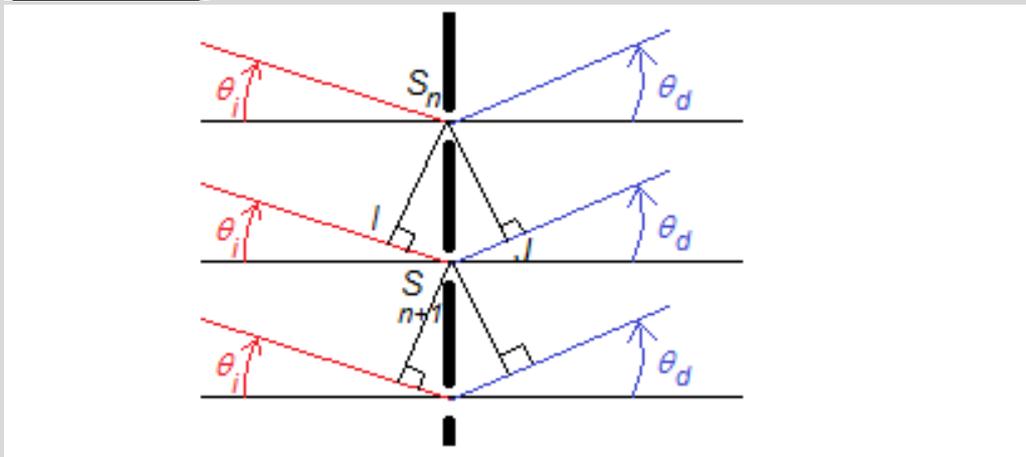
Différence de marche entre 2 ondes :  $\delta = (SH_iHH_dM) - (SOM) = (H_iHH_d)$  grâce au théorème de Malus. Soit  $\delta = OH(\alpha_d - \alpha_i)$  dans le cadre de l'approximation de Gauss. Ainsi  $\underline{s}(H) = \underline{s}(O) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \delta}$ .

Toutes les ondes sont cohérentes : il faut sommer les amplitudes (ou les vibrations).

- Dans le cas de la diffraction discrète de  $N$  ondes (la  $n^{\circ}k$  passant par  $H$ ) :  $s = \sum_{i=1}^N s_k$  (ou bien  $\underline{s} = \sum_{i=1}^N \underline{s}_k$ ).
  - Dans le cas de la diffraction continue par une infinité d'ondes :  $s = \iint s(P) d^2S$  (ou bien  $\underline{s} = \iint \underline{s}(H) d^2S$ ).
- Il faut ensuite calculer l'intensité :  $I = \langle s^2 \rangle$  (ou bien  $I = \frac{1}{2} |\underline{s}|^2$ ).



**Exercice 6.1** (le prof fait cet exercice type jeudi)  
**Diffraction d'un réseau**



$N$  trous alignés équidistants (de distance  $a$ ) sont éclairés par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  faisant un angle  $\theta_i$  avec la normale au plan des trous. On observe la lumière diffractée à l'infini dans la direction  $\theta_d$  avec la normale au plan des trous.

- 1) Exprimer le déphasage  $\varphi$  entre deux ondes passant par deux trous successifs.
- 2) En utilisant les vecteurs de Fresnel :
  - 2.a) déterminer la position des ordres par condition d'interférence constructive.
  - 2.b) déterminer la demi-largeur angulaire  $\Delta\theta$  des franges brillantes par condition d'interférence destructive.
- 3) Démontrer les deux résultats précédents en faisant le calcul de l'intensité.
- 4) Interpréter la dépendance de  $\Delta\theta$  avec  $N$ .

1) Le déphasage entre deux ondes passant par deux trous successifs est

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (IS_{n+1} + S_{n+1}J) = \frac{2\pi}{\lambda} a (-\sin \theta_i + \sin \theta_d)$$

2) Avec les vecteurs de Fresnel :

2.a) La condition d'interférence constructive est  $\varphi = p2\pi$  avec  $p$  entier, soit :

$$p2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a (-\sin \theta_i + \sin \theta_d) \Leftrightarrow \sin \theta_d - \sin \theta_i = \frac{p\lambda}{a}$$

2.b) La condition d'interférence destructive autour de  $\varphi = 0$  est  $N\Delta\varphi = \pm 2\pi$ , la largeur du pic est donc  $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{N}$ .

Or, en différentiant le déphasage on trouve

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \Delta(\sin \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} a \Delta\theta$$

autour de  $\varphi = 0$ . Soit :

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \Delta\theta = \frac{4\pi}{N} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Na}$$

3) On peut utiliser les complexes associés aux ondes :

- $a_1(t) = \text{Re}(\tilde{a}_1)$ , avec  $\tilde{a}_1 = a_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ ,
- $a_2(t) = \text{Re}(\tilde{a}_2)$ , avec  $\tilde{a}_2 = a_0 e^{j2\varphi} e^{j\omega t}$ , etc...

pour calculer l'intensité :  $I = \frac{1}{2} |\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots|^2$ .

Utilisation des séries géométriques

$$I = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{n=N} a_0 e^{jn\varphi} e^{j\omega t} \right|^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 \left| \sum_{n=1}^{n=N} e^{jn\varphi} \right|^2$$

on est ramené au calcul de la série géométrique  $S = \sum_{n=1}^{n=N} q^n = \frac{q^1 - q^{N+1}}{1 - q}$  de raison  $q = e^{j\varphi}$ .

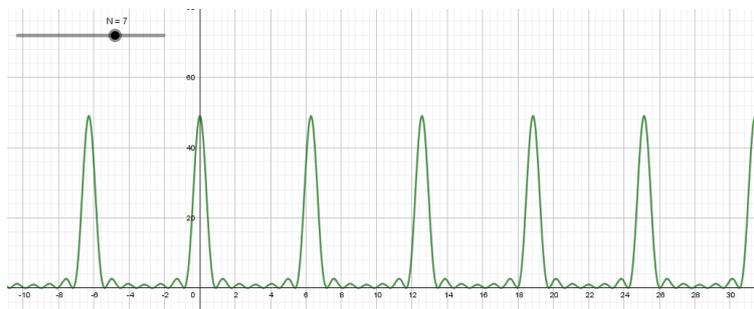
Il est bon d'utiliser l'angle moitié :

$$S = \frac{e^{j\varphi} - e^{j(N+1)\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = e^{j\varphi} \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = e^{j\varphi} \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} e^{-j\frac{N}{2}\varphi} - e^{j\frac{N}{2}\varphi} e^{-j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}}} = e^{j\varphi} \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} \sin(-\frac{N}{2}\varphi)}{e^{j\frac{\varphi}{2}} \sin(-\frac{\varphi}{2})}$$

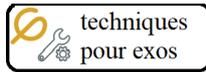
ainsi

$$I = \frac{1}{2} |a_0|^2 |S|^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 \frac{\sin^2(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})}$$

dont la courbe est :



4) Donc plus le nombre de fentes éclairées  $N$  est grand, plus la largeur du pic  $\Delta\theta$  est petite.



## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Appliquer la formule des réseaux

Si on éclaire un réseau de période spatiale  $a$  avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) qui fait un angle  $\theta_i$  avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions (les ordres  $p \in \mathbb{Z}$ ) repérées par les angles  $\theta_p$  par rapport à la normale au plan du réseau, telles que

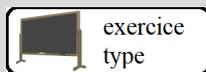
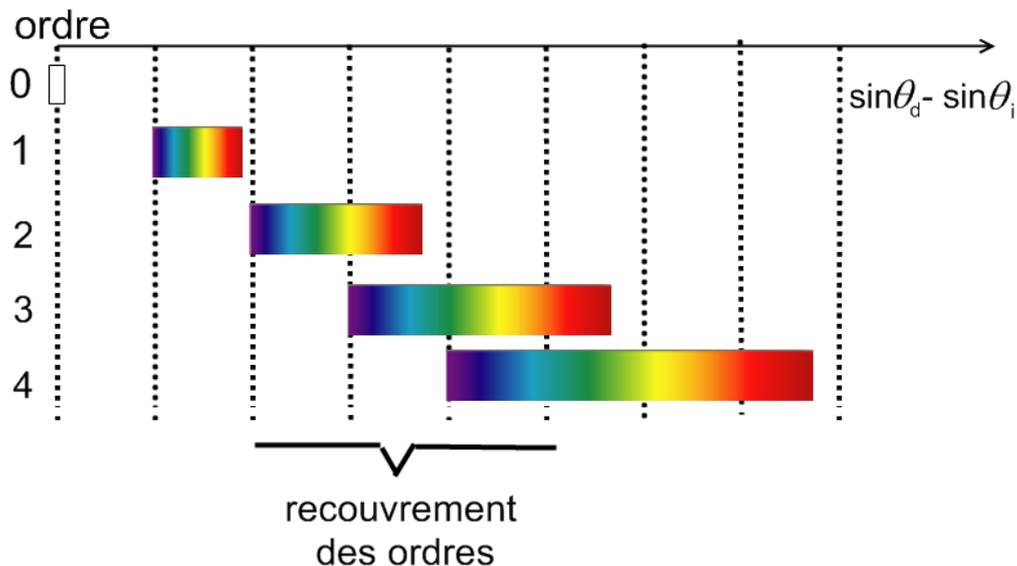
$$\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$$

### Minimum de déviation

Si la déviation  $D = \theta_p - \theta_i$  est minimale ( $D = D_{\min}$ ),

$$\sin \left( \frac{D_{\min}}{2} \right) = \frac{pn\lambda}{2}$$

### Phénomène de recouvrement des ordres



**Exercice 6.2** (le prof fait cet exercice type jeudi)

### Détermination d'une longueur d'onde grâce à un réseau

On éclaire un réseau de  $n = 547$  traits /mm en incidence quasi-normale par une raie de longueur d'onde  $\lambda$  inconnue et on observe les déviations suivantes :  $\theta_{-2} = -3234'$ ,  $\theta_{+2} = 3231'$ .

1) Déterminer  $\lambda$ .

En fait, on n'est pas sûr que l'incidence soit normale. Si on éclaire un réseau de période spatiale  $a$  avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) qui fait un angle  $\theta_i$  avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions repérées par les angles  $\theta_p$  par rapport à la normale au plan du réseau.

On définit l'angle de déviation pour l'ordre  $p$  par  $D = \theta_p - \theta_i$ .

2) Si la déviation est minimale ( $D = D_{\min}$ ), qu'est-ce que cela impose sur  $\theta_i$  et  $\theta_p$ ? Exprimer  $\sin \left( \frac{D_{\min}}{2} \right)$ , en fonction de  $p$ ,  $a$  et  $\lambda$ .

3) On éclaire maintenant un réseau de  $n = 500$  traits/mm en incidence quasi-normale par une lumière blanche (dont les longueurs d'ondes sont dans le domaine  $\lambda \in [400nm; 750nm]$ ).

3.a) Pour chaque ordre  $k$ , déterminer en degré les déviations minimale  $\theta_{\min_k}$  et maximale  $\theta_{\max_k}$ .

3.b) En déduire le nombre de spectres complets observables et les ordres des spectres sans recouvrement.

1)  $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = n.p.\lambda$ . Soit  $\sin \theta_{+2} - \sin \theta_{-2} = 4.n.\lambda$

$$\lambda = \frac{\sin \theta_{+2} - \sin \theta_{-2}}{4.n} = 492 \text{ nm}$$

2)  $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$  ( $p$  est entier).

$$D = D_{\min} \Leftrightarrow \theta_p = -\theta_i.$$

$$\sin \left( \frac{D_{\min}}{2} \right) = \frac{p.\lambda}{2.a}.$$

3)

3.a) Ordre 1 :  $\theta_{\min_1} = 11,55$  et  $\theta_{\max_1} = 22,02$  ;

ordre 2 :  $\theta_{\min_2} = 23,62$  et  $\theta_{\max_2} = 48,59$  ;

ordre 3 :  $\theta_{\min_3} = 36,96$  et  $\theta_{\max_3}$  : pas de solution.

3.b) On en déduit :

- nombre de spectres complets observables : 4 (ordres -2,-1,+1,+2) ;

- ordres des spectres sans recouvrement : -1 et +1.



### Exercice 6.3 pour s'entraîner Positions des ordres d'un réseau

Soit un réseau à 8 000 LPI (traits par pouce, où  $1 \text{ in} = 2,5 \text{ cm}$ ).

1) Situer les positions angulaires  $\theta_p$  (en  $^\circ$ ) des maxima principaux pour un faisceau en incidence normale et de longueur d'onde  $\lambda = 546 \text{ nm}$ .

1)  $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p.n.\lambda$ , avec  $\theta_i = 0$  et  $n = 320$  traits/mm. Soit :  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = 9,9$ ,  $\theta_2 = 20,1$ ,  $\theta_3 = 31,1$ ,  $\theta_4 = 43,5$ ,  $\theta_5 = 59,3$ .



### Exercice 6.4 pour s'entraîner Réseau éclairé par une lampe à vapeur de mercure

On éclaire un réseau de pas  $a$  par la raie verte du mercure ( $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ ), et on observe les déviations suivantes :  $\theta_{-3} = -6340'$ ,  $\theta_{-2} = -3641'$ ,  $\theta_{-1} = -1724'$ ,  $\theta_{+1} = 1722'$ ,  $\theta_{+2} = 3622'$ ,  $\theta_{+3} = 6337'$ .

1) Déterminer :

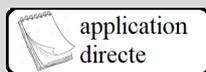
1.a)  $a$ , le pas du réseau ;

1.b)  $n$ , le nombre de traits par  $\text{mm}$  du réseau.

1)  $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \frac{p.\lambda}{a}$ . Une modélisation donne :

1.a)  $a = 1,828 \mu\text{m}$  ;

1.b)  $n = 547$  traits /mm.



### Exercice 6.5 pour s'entraîner Recouvrement des ordres

On éclaire un réseau par transmission qui possède  $n = 130$  traits/mm de façon normale, avec de la lumière blanche ( $\lambda \in [\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}; \lambda_{\max} = 750 \text{ nm}]$ ).

On observe sur un écran placé parallèlement au réseau, dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale  $d = 2,5 \text{ m}$ , et repéré par un axe  $(Ox)$ , l'axe  $(Oy)$  étant confondu avec l'ordre nul.

1) Calculer la position des bords des spectres :

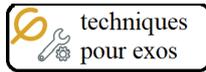
1.a)  $x_1(\lambda_{\min})$  et  $x_1(\lambda_{\max})$  pour l'ordre 1 ;

1.b)  $x_2(\lambda_{\min})$  et  $x_2(\lambda_{\max})$  pour l'ordre 2 ;

1.c)  $x_3(\lambda_{\min})$  et  $x_3(\lambda_{\max})$  pour l'ordre 3.

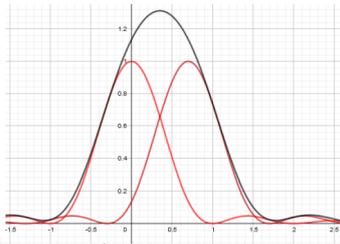
2) Quels sont les ordres qui se recouvrent ?

- 1) Si les angles sont petits :  $x \approx d.n.p.\lambda$ 
  - 1.a)  $x_1(\lambda_{min}) = 13cm$  et  $x_1(\lambda_{max}) = 24cm$  pour l'ordre 1 ;
  - 1.b)  $x_2(\lambda_{min}) = 26cm$  et  $x_2(\lambda_{max}) = 49cm$  pour l'ordre 2 ;
  - 1.c)  $x_3(\lambda_{min}) = 39cm$  et  $x_3(\lambda_{max}) = 73cm$  pour l'ordre 3.
- 2) Tous les ordres sauf l'ordre  $\pm 1$  se recouvrent.

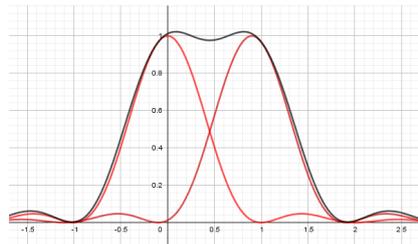


## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

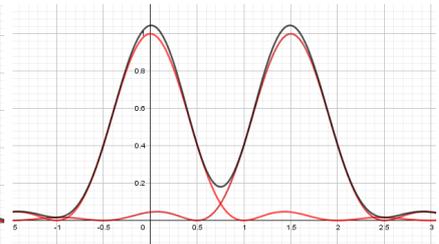
### Critère de Rayleigh



on ne distingue pas les 2 raies



limite de résolution



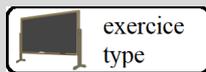
on distingue les 2 raies

Le cas limite de résolution est le cas où le minimum d'intensité d'une raie correspond au maximum d'intensité de l'autre raie.

### Déterminer la résolution d'un spectroscopie

La limitation de la résolution  $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  (soit l'inverse de l'incertitude relative sur la longueur d'onde) est donnée :

- par la largeur  $a' = |\gamma| a$  de l'image géométrique de la fente (de largeur  $a$ ) : il faut alors fermer la fente ( $a \searrow$ );
- soit par la diffraction et la finesse des pics du réseau :  $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\theta}{\Delta\theta} = |p| N$  aux petits angles, où  $p$  est l'ordre et  $N$  le nombre de traits éclairés.



#### Exercice 6.6 (le prof fait cet exercice type jeudi)

#### Pouvoir de séparation d'un spectroscopie à réseau



Un réseau comporte  $n = 130$  traits/mm et est éclairé par un faisceau en incidence normale d'extension spatiale  $L = 5$  mm dans la direction perpendiculaire aux traits. On se placera aux petits angles.

1) Rappeler :

- 1.a) l'angle  $\theta$  sous lequel est envoyée la lumière à l'ordre  $p$  pour la longueur d'onde  $\lambda$ ;
- 1.b) la largeur angulaire  $\Delta\theta$  de ce faisceau.

2) On s'intéresse au doublet du sodium :  $\lambda = 590$  nm, et  $\Delta\lambda = 0,6$  nm. Le critère de Rayleigh stipule que deux images sont séparées si la distance entre les deux images est supérieure au diamètre de la tache de chacune des images.

2.a) Quel est le plus petit intervalle de longueur d'onde séparable  $\Delta\lambda_{min}$  dans l'ordre  $p$  autour de  $\lambda = 590$  nm ?

2.b) Application numérique dans l'ordre 1. Sépare-t-on le doublet du sodium ?

2.c) Application numérique dans l'ordre 2. Sépare-t-on le doublet du sodium ?

1)

$$1.a) \quad \sin \theta = p.n.\lambda \text{ soit}$$

$$\theta = p.n.\lambda$$

$$1.b) \quad \Delta\theta = \frac{n.\lambda}{N} \text{ où } N = n.L \text{ est le nombre de traits éclairés, soit :}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{L}$$

2) Critère de Rayleigh :

$$2.a) \quad p.n.(\lambda_1 - \lambda_2) > \frac{\lambda}{L}. \text{ Soit}$$

$$\Delta\lambda > \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p n L}$$

1. 2.b)  $p = 1 : \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p.n.L} = 0,9nm > \Delta\lambda$ . On ne sépare pas le doublet du sodium dans l'ordre 1.
- 2.c)  $p = 2 : \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p.n.L} = 0,45 \text{ nm} < \Delta\lambda$ . On sépare le doublet du sodium dans l'ordre 2.

application  
directe**Exercice 6.7** pour s'entraîner**Réalisation d'un monochromateur**

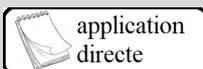
Un réseau 15 000 LPI (traits par pouce, où  $1in = 2,5cm$ ) est éclairé en incidence normale par une lumière blanche. Un spectre se forme sur un écran parallèle au réseau, situé à  $d = 50cm$  du réseau.

1) Si on perce un trou de  $\Delta x = 5mm$  de côté dans l'écran et dont le centre est placé à  $x = 20cm$  de l'image géométrique parallèlement aux traits du réseau, quel sera le domaine de longueurs d'onde sélectionné par le trou ?

1)  $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p.n.\lambda$ , avec  $\theta_i = 0$  et  $n = 600 \text{ traits/mm}$ . Soit :  $\lambda = \frac{\sin \theta}{p.n}$  avec  $\tan \theta = \frac{x}{d}$ . On est dans l'ordre  $p = 1$ . On trouve :

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \frac{1}{n} \sin \left( \arctan \left( \frac{x - \frac{\Delta x}{2}}{d} \right) \right) = 622nm \\ \lambda_{max} = \frac{1}{n} \sin \left( \arctan \left( \frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{d} \right) \right) = 635nm \end{cases}$$

(C'est du rouge).

application  
directe**Exercice 6.8** pour s'entraîner**Doublet du sodium résolu grâce à un réseau**

On éclaire un réseau par transmission qui possède  $n = 130,0 \text{ traits/mm}$  de façon normale, avec une lampe au sodium (de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 589,0nm$  et  $\lambda_2 = 589,6nm$ ).

On observe sur un écran placé parallèlement au réseau, dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale  $d = 2,500m$ , et repéré par un axe  $(Ox)$ , l'axe  $(Oy)$  étant confondu avec l'ordre nul.

1) Calculer la position des raies dans l'ordre 1 pour :

1.a)  $\lambda_1 (x_1)$

1.b) et  $\lambda_2 (x_2)$ .

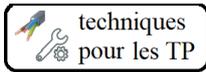
La largeur de la fente d'éclairage est  $l$ , le grandissement du montage optique est  $\gamma = \frac{1}{10}$  (on négligera l'élargissement de l'image de la fente d'éclairage par diffraction).

2) Exprimer une condition sur  $l$  pour que le doublet du sodium soit résolu.1) Si les angles sont petits :  $x \approx d.n.p.\lambda$ 

1.a)  $\lambda_1 \Rightarrow x_1 = 191,4mm$

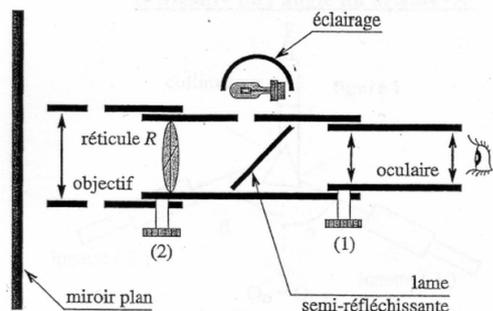
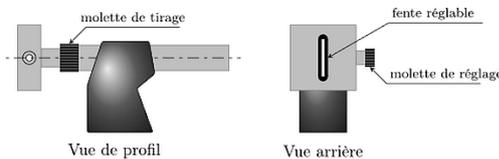
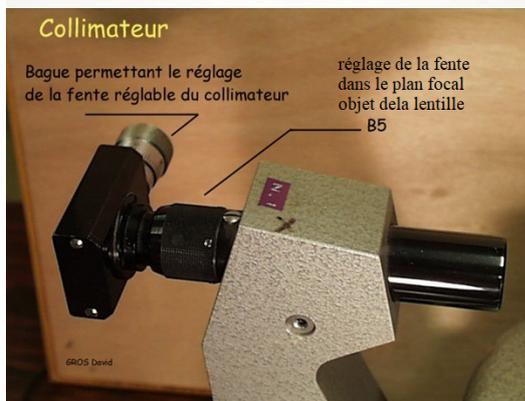
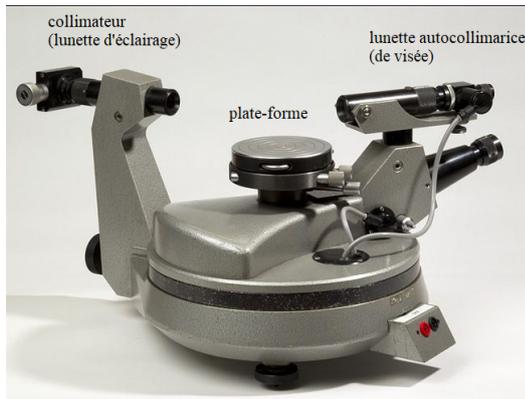
1.b) et  $\lambda_2 \Rightarrow x_2 = 191,6mm$ .

2)  $l < \frac{n.d.(\lambda_2 - \lambda_1)}{\gamma} = 1,9mm$ .



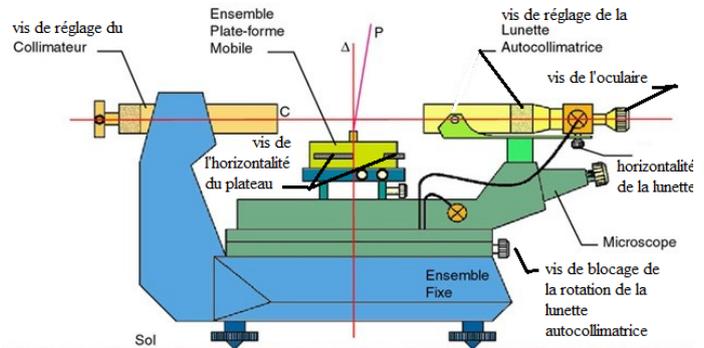
# Techniques pour les travaux pratiques (à maîtriser)

## Les éléments du goniomètre



## Les vis de réglage du goniomètre

Chaque personne règle l'oculaire de façon à ce que le réticule du dépoli soit net pour sa vision.



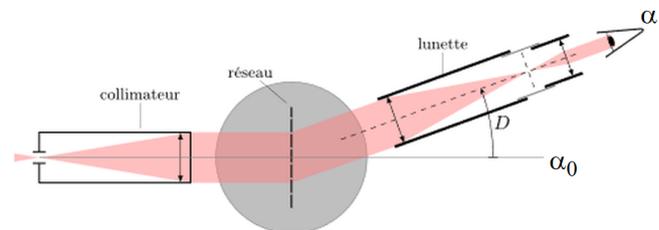
Une fois l'horizontalité de la lunette et du plateau réglée, il faut :

- positionner le réticule du dépoli dans le plan focal image de la lunette de visée (par autocollimation)
- positionner la fente d'éclairage dans le plan focal objet de la lunette d'éclairage (en formant l'image nette de cette fente sur le réticule du dépoli).

Le goniomètre est désormais réglé.

## Les mesures avec le goniomètre

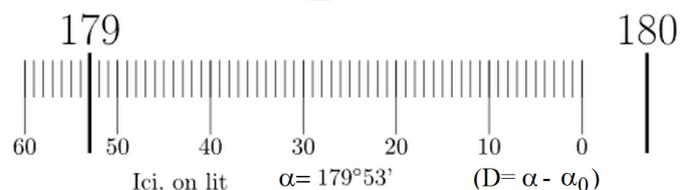
On mesure toujours une déviation, c'est-à-dire une différence de position angulaire sur le vernier.

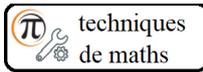


Pour mesurer une position angulaire, il faut positionner l'image de la fente sur le trait vertical du réticule. Pour ce faire, il faut :

- bloquer la lunette autocollimatrice
- puis la positionner précisément grâce à la vis de déplacement latéral.

## Le vernier du goniomètre





## Techniques mathématiques à maîtriser

### Séries géométriques

#### Position du problème physique

On s'intéresse à l'interférence de plusieurs ondes d'amplitudes :

- $a_1(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ,
- $a_2(t) = a_0 \cos(\omega t + 2\varphi)$ , etc...

#### Utilisation des complexes

On a vu que si  $s_1(t) = \text{Re}(\tilde{s}_1)$  et  $s_2(t) = \text{Re}(\tilde{s}_2)$ , alors  $\langle s_1 s_2 \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2^*)$ , où  $\tilde{s}_2^*$  est le complexe conjugué de  $\tilde{s}_2$ . Aussi, on peut utiliser les complexes associés aux ondes :

- $a_1(t) = \text{Re}(\tilde{a}_1)$ , avec  $\tilde{a}_1 = a_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ ,
- $a_2(t) = \text{Re}(\tilde{a}_2)$ , avec  $\tilde{a}_2 = a_0 e^{j2\varphi} e^{j\omega t}$ , etc...

pour calculer l'intensité :  $I = \frac{1}{2} |\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots|^2$ .

#### Utilisation des séries géométriques

$$I = \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{n=N} a_0 e^{jn\varphi} e^{j\omega t} \right|^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 \left| \sum_{n=1}^{n=N} e^{jn\varphi} \right|^2$$

on est ramené au calcul de la série géométrique  $S = \sum_{n=1}^{n=N} q^n = \frac{q^1 - q^{N+1}}{1-q}$  de raison  $q = e^{j\varphi}$ .

#### Méthode de l'angle moitié

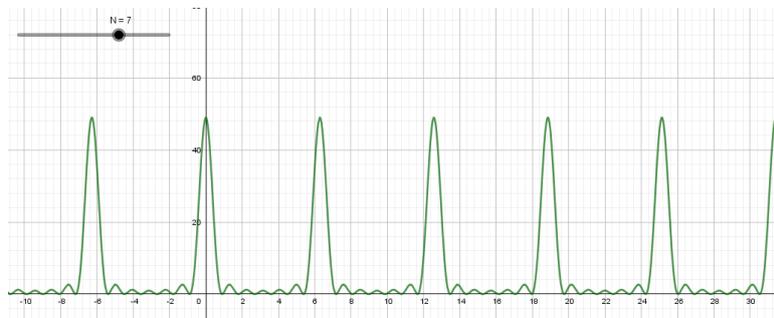
Il est bon d'utiliser l'angle moitié :

$$S = \frac{e^{j\varphi} - e^{j(N+1)\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = e^{j\varphi} \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = e^{j\varphi} \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} e^{-j\frac{N}{2}\varphi} - e^{j\frac{N}{2}\varphi} e^{-j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}}} = e^{j\varphi} \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} \sin(-\frac{N}{2}\varphi)}{e^{j\frac{\varphi}{2}} \sin(-\frac{\varphi}{2})}$$

ainsi

$$I = \frac{1}{2} |a_0|^2 |S|^2 = \frac{1}{2} |a_0|^2 \frac{\sin^2(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})}$$

dont la courbe est :



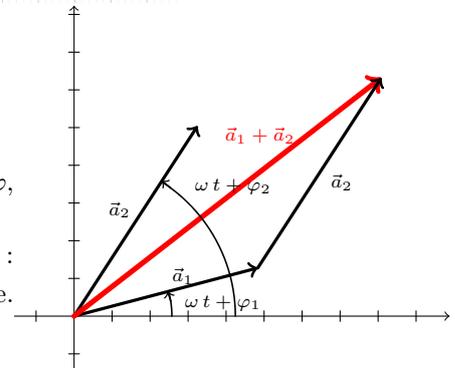
#### Utilisation des vecteurs de Fresnel

On peut utiliser des vecteurs tournants (de Fresnel) :

- $\vec{a}_1$  associé à  $a_0 \cos(\omega t + \varphi)$  de norme  $a_1$  et d'argument  $\omega t + \varphi$ ,
- $\vec{a}_2$  associé à  $a_0 \cos(\omega t + 2\varphi)$  de norme  $a_2$  et d'argument  $\omega t + 2\varphi$ , etc...

Le vecteur  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots$  permet de calculer l'intensité :

$I = \|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots\|^2$  et de déterminer en particulier quand  $I$  s'annule.



exercice  
de maths**Exercice 6.10** pour s'entraîner**Calcul grâce aux complexes de l'intensité dans le cas de  $N$  ondes de même amplitude ayant un même déphasage**1) Calculer, en utilisant les complexes associés, l'intensité dans le cas de  $N$  ondes d'amplitudes respectives :

$$a_1(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi), a_2(t) = a_0 \cos(\omega t + 2\varphi), \dots, a_N(t) = a_0 \cos(\omega t + N\varphi)$$

1) On pose :

- $a_1(t) = \text{Re}(\tilde{a}_1)$ , avec  $\tilde{a}_1 = a_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ ,
- $a_2(t) = \text{Re}(\tilde{a}_2)$ , avec  $\tilde{a}_2 = a_0 e^{j2\varphi} e^{j\omega t}$ ,
- ...

La somme des amplitudes complexes est :

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots + \tilde{a}_N = a_0 e^{j\omega t} [e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + \dots + e^{jN\varphi}]$$

On reconnaît une série géométrique de raison  $q = e^{j\varphi}$  :

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots + \tilde{a}_N = a_0 e^{j\omega t} \frac{q - q^{N+1}}{1 - q} = a_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}}$$

L'intensité est :

$$I = \frac{1}{2} |\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \dots + \tilde{a}_N|^2 = \frac{1}{2} a_0^2 \left| \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \right|^2 = \frac{1}{2} a_0^2 \left| \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} e^{-j\frac{N}{2}\varphi} - e^{j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}}} \right|^2$$

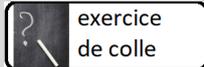
Donc

$$I = \frac{1}{2} a_0^2 \left| \frac{e^{-j\frac{N}{2}\varphi} - e^{j\frac{N}{2}\varphi}}{2j} \frac{2j}{e^{-j\frac{\varphi}{2}} - e^{j\frac{\varphi}{2}}} \right|^2 = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

exercice  
de maths**Exercice 6.11** pour s'entraîner**Calcul d'une série géométrique**1) Calculer  $1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \dots$ 1) C'est  $\frac{10}{11}$ .exercice  
de maths**Exercice 6.12** pour s'entraîner**Annulations d'une intensité diffractée par  $N$  fentes**1) Déterminer  $\varphi$  tel que

$$I = \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 0$$

1) Il faut que  $\sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right) = 0$  sans que  $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ .Soit  $\frac{N}{2}\varphi = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{1}{2}\varphi \neq k'\pi$  avec  $k' \in \mathbb{Z}$ .Donc  $\varphi = \frac{2k\pi}{N}$  avec  $k \in [\dots; -2; -1; 1; 2; \dots; N-1; N+1; \dots]$ .



exercice  
de colle

### Exercice 6.13

#### Modélisation du VLTI (téléscope interférentiel)

On assimile deux télescopes distants de  $a$  à deux trous  $T_1$  et  $T_2$  de taille négligeable et à une lentille d'axe optique  $Oz$ , de centre  $O$ , de distance focale  $f'$ . Le foyer image de la lentille est noté  $F'$  et le plan focal est le plan d'observation.  $T_1$  et  $T_2$  sont à une distance  $\frac{a}{2}$  de l'axe optique.

1) Un unique objet ponctuel à l'infini  $A$  est observé dans la direction de l'axe optique.

Pour simplifier, on supposera que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,0 \mu\text{m}$ .

1.a) Où se trouve l'image géométrique  $A'$  de  $A$  ?

1.b) Calculer la différence de marche  $\delta_0$  entre les ondes provenant de  $A$  et se recombinant en  $A'$ , passant par les deux trous  $T_1$  et  $T_2$ .

1.c) Dans quelle mesure peut-on considérer que le contraste des interférences vaut 1 ? Dans la suite on supposera effectivement que le contraste vaut 1.

1.d) Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_A(x)$  d'un point d'abscisse  $x$  dans le plan focal.

1.e) En déduire l'expression de l'interfrange.

1.f) Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan  $(xOy)$  telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

2) Un unique objet ponctuel à l'infini  $B$  est observé dans la direction  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOz$ , avec les mêmes caractéristiques que  $A$ .

2.a) A quelle distance  $x_B$  de  $F'$  se trouve l'image géométrique de  $B$  ?

2.b) Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_B(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .

2.c) L'interfrange est-elle différente de celle trouvée précédemment ?

3) Deux objets ponctuels à l'infini  $A$  et  $B$  sont observés dans les directions  $i_A = 0$  et  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOz$ .

Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,0 \mu\text{m}$  et la même puissance lumineuse.

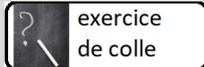
3.a) Ces deux sources sont-elles cohérentes ?

3.b) En déduire l'intensité lumineuse  $I_{A \cup B}(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .

3.c) Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de  $i_B$ .

3.d) Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.

3.e) Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire  $i_{min}$  du VLTI ?



exercice  
de colle

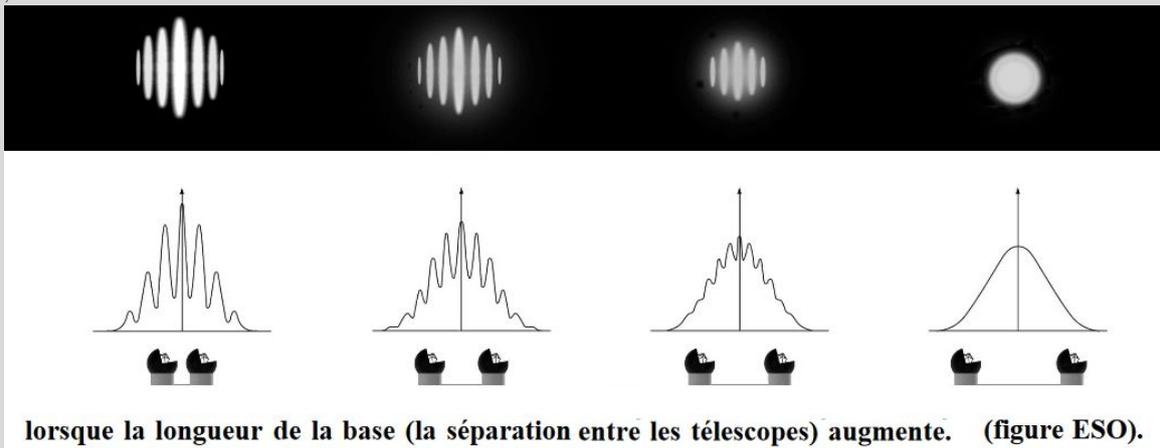
### Exercice 6.14 Résolution interférométrique d'une étoile double

Cet exercice rend compte d'une méthode expérimentale permettant de montrer qu'une étoile est double et de mesurer la distance angulaire entre ses composantes.

On observe des étoiles grâce à une lentille convergente de centre optique  $C$ , de distance focale  $f'$  et de foyer image  $F'$ . On place devant la lentille d'une part un filtre qui ne laisse passer que les radiations de longueur d'onde  $\lambda$  et d'autre part un écran placé de deux trous  $T_1$  et  $T_2$  de taille négligeable (ils se comportent comme des sources ponctuelles) distants de  $a$ . On repère les points du plan focal par un repère  $F'xy$  où  $F'x$  est parallèle à  $T_1T_2$ .

- 1) Une étoile  $E$  se trouve dans la direction de l'axe optique.
  - 1.a) Déterminer l'intensité  $I$  dans le plan focal.
  - 1.b) Calculer l'interfrange pour  $f' = 1,0$  m,  $\lambda = 600$  nm et  $a = 6,0$  mm.
  - 1.c) Que se passe-t-il si  $a$  varie ?
- 2) En réalité, l'étoile est double, constituée de deux étoiles distantes angulairement de  $\theta$ , supposées de même intensité.
  - 2.a) Où se formerait l'image géométrique de la seconde étoile ?
  - 2.b) Quel système d'interférences observerait-on s'il n'y avait que la seconde étoile ?
  - 2.c) Quel éclairement  $I_{tot}$  observe-t-on avec l'étoile double ?
  - 2.d) Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  les franges disparaissent-elles ?
- 3) Application :

Le protocole expérimental est le suivant : on réalise l'expérience avec une petite valeur de  $a$  et l'on visualise les franges d'interférences ; puis on fait croître  $a$  lentement. Le contraste des franges diminue (si l'étoile est double) et l'on continue jusqu'à la disparition des franges (contraste nul) qui a lieu expérimentalement pour  $a = 0,52$  mm.

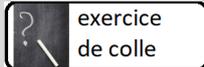


lorsque la longueur de la base (la séparation entre les télescopes) augmente. (figure ESO).

- 3.a) Calculer  $\theta$  en minutes d'angle.

En réalité, les franges ne disparaissent pas totalement en  $a = 0,52$  mm, mais leur contraste est minimal et vaut alors  $C_{min} = 0,1$ . Cela est dû au fait que  $I_0 > I'_0$ .

- 3.b) Que vaut  $\frac{I_0}{I'_0}$  ?



exercice  
de colle

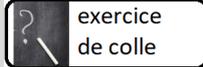
### Exercice 6.15 Modélisation d'un spectroscopie à réseau

Dans le plan  $xOy$  est placé un réseau de  $N$  fentes de largeur  $b$  selon  $Ox$ , de longueur  $L$  selon  $Oy$  grande devant la longueur d'onde et dont les centres sont équidistants de  $a$ . Il est éclairé par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , dont le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  appartient au plan  $xOz$  et fait l'angle  $i$  avec  $Oz$ .

- .1) On s'intéresse à la lumière diffractée dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$ .  
On note  $\theta$  l'angle de  $\vec{u}$  avec  $Oz$  et on posera

$$u = \frac{\sin(i) - \sin(\theta)}{\lambda}$$

- .1.a) Calculer l'amplitude complexe  $\underline{s}_1(\theta)$  diffractée par une seule fente de largeur  $b$ .  
.1.b) Exprimer l'amplitude  $\underline{s}(\theta)$  diffractée par le réseau de  $N$  fentes. En déduire l'intensité  $I$  diffractée dans la direction  $\theta$ .  
.1.c) Que devient cette expression si  $b \ll \lambda$ ?  
.2) On se place désormais dans ce cas.  
.2.a) Montrer que  $I$  passe par des maxima lorsque :  $\sin(i) - \sin(\theta) = p \frac{\lambda}{a}$  où  $p \in \mathbb{Z}$ .  
.2.b) Montrer qu'entre deux maxima principaux précédents,  $I$  s'annule  $N - 1$  fois.  
.2.c) Calculer la largeur  $\Delta(\sin(\theta))$  des pics principaux entre deux minima.  
.2.d) Si  $N$  est suffisamment grand, on peut montrer que  $I$  est pratiquement nulle pour tout  $\theta$  sauf pour les maxima principaux précédents. Montrer que l'étude des positions des maxima permet de déterminer le pas du réseau,  $a$ .  
.2.e) Le réseau est éclairé sous incidence normale par une lampe à vapeur de mercure et on obtient pour la raie verte de longueur d'onde  $\lambda = 0,55\mu m$  les maxima pour l'ordre  $p_1$ ,  $\sin(\theta) = x_1 = 0,15$  et pour l'ordre  $p_2$ ,  $\sin(\theta) = x_2 = 0,30$ . En déduire le pas du réseau,  $a$ , et le nombre de traits par unité de longueur,  $n$ .  
.3) La largeur des pics principaux limite la possibilité de distinguer deux raies de longueur d'onde trop proches. On considère que des raies sont séparées si les maxima de même ordre des deux longueurs d'onde sont au moins séparés de la demi-largeur d'un pic principal.  
.3.a) En déduire la valeur minimale de  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  pour que les raies soient séparées par le réseau précédent. Cette valeur dépend-elle de l'ordre  $p$ ?  
.3.b) La lampe au mercure possède un raie double telle que  $\lambda_1 = 0,5770\mu m$  et  $\lambda_2 = 0,5791\mu m$ . A quelle couleur correspondent ces longueurs d'onde? Dans quel ordre  $p$  sont-elles séparées par le réseau si  $N = 1000$ ?



exercice  
de colle

### Exercice 6.16 Calcul de la diffraction de $N$ pupilles identiques

#### 1) Question préliminaire

On éclaire un plan par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , qui fait un angle  $\alpha_i$  avec l'axe optique  $Oz$  dans le plan  $(xOz)$  (et un angle  $\beta_i$  avec l'axe optique  $Oz$  dans le plan  $(yOz)$ ). On observe l'onde diffractée à l'infini dans les directions respectives  $\alpha$  et  $\beta$  avec l'axe optique  $Oz$  respectivement dans le plan  $(xOz)$  et dans le plan  $(yOz)$ . Ce plan diffractant est constitué de  $N$  pupilles identiques. Chaque pupille, numérotée  $m$ , centrée sur  $(x_m, y_m)$ , a une transparence  $t_0$  identique et la transmission du plan diffractant est  $t(x, y) = \sum_m t_0(x - x_m, y - y_m)$ .

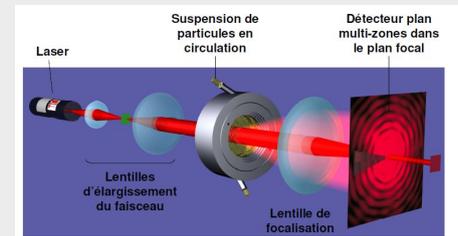
**1.a)** Montrer que l'amplitude de l'onde diffractée par la pupille  $m$ , à l'infini dans la direction  $(\alpha, \beta)$ , est de la forme :  $\tilde{s}_m(\alpha, \beta, t) = K \cdot s_0 \cdot F_D(\alpha, \beta) \cdot e^{i(\varphi_m(\alpha, \beta))}$  où  $F_D(\alpha, \beta)$  est la fonction de diffraction d'une seule pupille que l'on exprimera.

**1.b)** Montrer que l'amplitude de l'onde diffractée par le plan diffractant entier, à l'infini dans la direction  $(\alpha, \beta)$ , est de la forme :  $\tilde{s}(\alpha, \beta, t) = K \cdot s_0 \cdot F_D(\alpha, \beta) \cdot F_I(\alpha, \beta) e^{i(\varphi_0(\alpha, \beta))}$  où  $F_I(\alpha, \beta)$  est un terme d'interférence que l'on exprimera.

Le granulomètre laser mesure l'intensité  $I$  en fonction de l'angle  $\theta$ .

- La position angulaire des extrema permet de déterminer le diamètre des particules.
- L'intensité dépend du volume des particules diffusantes, elle donne le volume cumulé des particules pour chaque classe granulométrique.

[www.coulomb.univ-montp2.fr](http://www.coulomb.univ-montp2.fr)



#### 2) Diffraction par une répartition aléatoire

**2.a)** Montrer que, dans le cas d'une répartition aléatoire, le terme d'interférence est  $|F_I(\alpha, \beta)|^2 = N$  partout en dehors de la direction de l'onde incidente.

**2.b)** Que vaut  $F_I(\alpha, \beta)$  dans la direction de l'onde incidente ?

**2.c)** Application : quelle est la figure de diffraction d'une pupille constituée de petits grains sphériques de même dimension ?

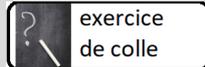
#### 3) Diffraction par un réseau plan

On considère un réseau plan de  $N$  fentes, de largeur  $e$ . Ce réseau a une période spatiale  $a$ . Il est éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  et d'incidence  $\theta_i$  par rapport à sa normale.

**3.a)** Montrer que, dans le cas d'un réseau plan de  $N$  fentes de période spatiale  $a$ , le terme d'interférence est  $|F_I|^2 = \left( \frac{\sin(\frac{N\psi}{2})}{\sin(\frac{\psi}{2})} \right)^2$  où  $\psi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_i)$ .

**3.b)** Tracer  $|F_I|^2$ . Retrouver la loi des réseaux.

**3.c)** Prendre en compte le terme de diffraction et tracer l'intensité en fonction de  $\theta$ .



exercice  
de colle

### Exercice 6.17

#### Etude d'un spectrographe à réseau (d'après CCP 2006)

Considérons un réseau plan constitué de  $N$  fentes identiques, fines et parallèles. On pose  $p$  le " pas " de ce réseau utilisé par transmission.

#### 1) Généralités

**1.a)** Citer un autre type de réseau.

**1.b)** Quel est le phénomène physique qui explique le fonctionnement des réseaux ?

#### 2) Relation fondamentale des réseaux

Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle, monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , sous une incidence  $i$ . Le faisceau est diffracté à l'infini dans la direction  $\theta$ . Les angles  $i$  et  $\theta$  mentionnés sont positifs.

**2.a)** Exprimer la différence de marche  $\Delta$  entre deux rayons homologues séparés d'une distance  $p$  dans le plan du réseau.

**2.b)** Déterminer les directions  $\theta_k$  des maximums principaux d'ordre  $k$ .

#### 3) Dénombrement des maximums principaux

On suppose que le spectre de raies des radiations du mercure est limité par les radiations violette ( $\lambda_v = 400nm$ ) et rouge ( $\lambda_r = 700nm$ ).

**3.a)** Déterminer les ordres observables (en  $^\circ$ ), sous une incidence de  $30^\circ$ , pour ces deux radiations et avec un réseau de " pas "  $p = 2,0\mu m$ .

**3.b)** A partir de quel ordre se produit le recouvrement des spectres ? Justifier votre réponse.

On éclaire un réseau de " pas "  $p = 2,0\mu m$  par un faisceau sortant d'un collimateur qui éclaire complètement le réseau par transmission sous une incidence  $i$ . Ce réseau peut tourner autour d'un axe parallèle aux fentes et le spectre obtenu est projeté à l'aide d'une lentille ( $L'$ ) de focale  $f' = 100cm$  sur une plaque photographique ou un écran situé dans le plan focal image de ( $L'$ ).

#### 4) Minimum de déviation

Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée et un ordre  $k$  fixé, on désigne par  $D = \theta_k - i$ , la déviation entre la direction du faisceau incident reçu par le réseau et la direction du faisceau diffracté.

En faisant tourner le réseau autour d'un axe parallèle à ses traits, la déviation  $D$  passe par une valeur minimale  $D_m$  pour une valeur particulière  $i_m$  de l'angle d'incidence  $i$ .

**4.a)** Déterminer  $i_m$  en fonction de  $\theta_{km}$ .

**4.b)** Exprimer la relation fondamentale des réseaux (définie précédemment) en fonction de la déviation minimale  $D_m$ .

**4.c)** En déduire la valeur de  $i_m$  à l'ordre 1, pour la radiation jaune de longueur d'onde moyenne  $\lambda = 578,05nm$  du doublet du mercure.

#### 5) Dispersion angulaire, dispersion linéaire

Le réseau est maintenant orthogonal au faisceau incident issu du collimateur.

**5.a)** Pour deux radiations de longueurs d'onde voisines  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  qui tombent sur le réseau, exprimer la dispersion angulaire  $\frac{d\theta_k}{d\lambda}$  en fonction de  $k$ ,  $p$  et  $\theta_k$ .

**5.b)** En déduire la dispersion linéaire  $\frac{dX_k}{d\lambda}$  sur la plaque photographique perpendiculaire à la direction moyenne des rayons diffractés dans l'ordre  $k$ .

**5.c)** Calculer la valeur de  $\frac{dX_k}{d\lambda}$  exprimée en  $mm.nm^{-1}$ , à l'ordre 1, pour la longueur d'onde moyenne  $\lambda = 578,05nm$ .

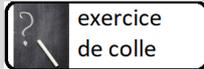
#### 6) Résolution des doublets du sodium et du mercure dans les spectres d'ordre 1.

On obtient un faisceau quasi parallèle en positionnant une fente (F) dans le plan focal objet d'une lentille convergente (L) de distance focale  $f$ . La fente (F), de largeur  $a$ , est assez large pour négliger tout phénomène de diffraction quand elle est uniformément éclairée en lumière monochromatique. Son image géométrique, sur la plaque photographique, a une largeur  $a'$ . On admettra que la limite de résolution du spectrographe à réseau est surtout imposée par la largeur de la fente source.

**6.a)** Déterminer  $a'$  en fonction de  $a$ ,  $f$  et  $f'$ . Application numérique pour :  $a = 40\mu m$ ,  $f = 20cm$ ,  $f' = 100cm$ .

**6.b)** Déterminer, dans les spectres d'ordre 1, les distances  $\Delta X_{Na}$  et  $\Delta X_{Hg}$  sur la plaque photographique, entre chacune des images de la fente source données par le doublet du sodium ( $\lambda_1 = 589,0nm$  et  $\lambda_2 = 589,6nm$ ) et le doublet du mercure ( $\lambda'_1 = 577,0nm$  et  $\lambda'_2 = 579,1nm$ ).

**6.c)** Le spectrographe à réseau permet-il de résoudre ces doublets ?



exercice  
de colle

### Exercice 6.18 Résolution d'un spectrographe à réseau

Dans le plan  $xOy$  est placé un réseau de  $N$  fentes de largeur  $b$  selon  $Ox$ , de longueur  $L$  selon  $Oy$  grande devant la longueur d'onde et dont les centres sont équidistants de  $a$ . Il est éclairé par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , dont le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  appartient au plan  $xOz$  et fait l'angle  $i$  avec  $Oz$ .

1) On s'intéresse à la lumière diffractée dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$ .

1.a) Montrer que  $\vec{u}$  appartient au plan  $xOz$ .

On note  $\theta$  l'angle de  $\vec{u}$  avec  $Oz$  et on posera

$$u = \frac{\sin(i) - \sin(\theta)}{\lambda}$$

1.b) Calculer l'amplitude complexe  $\underline{s}_1(\theta)$  diffractée par une seule fente de largeur  $b$ .

1.c) Exprimer l'amplitude  $\underline{s}(\theta)$  diffractée par le réseau de  $N$  fentes. En déduire l'intensité  $I$  diffractée dans la direction  $\theta$ .

1.d) Que devient cette expression si  $b \ll \lambda$  ?

2) On se place désormais dans ce cas.

2.a) Montrer que  $I$  passe par des maxima lorsque :  $\sin(i) - \sin(\theta) = p \frac{\lambda}{a}$  où  $p \in Z$ .

2.b) Montrer qu'entre deux maxima principaux précédents,  $I$  s'annule  $N - 1$  fois.

2.c) Calculer la largeur  $\Delta(\sin(\theta))$  des pics principaux entre deux minima.

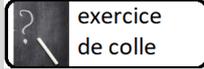
2.d) Si  $N$  est suffisamment grand, on peut montrer que  $I$  est pratiquement nulle pour tout  $\theta$  sauf pour les maxima principaux précédents. Montrer que l'étude des positions des maxima permet de déterminer le pas du réseau,  $a$ .

2.e) Le réseau est éclairé sous incidence normale par une lampe à vapeur de mercure et on obtient pour la raie verte de longueur d'onde  $\lambda = 0,55\mu m$  les maxima pour l'ordre  $p_1$ ,  $\sin(\theta) = x_1 = 0,15$  et pour l'ordre  $p_2$ ,  $\sin(\theta) = x_2 = 0,30$ . En déduire le pas du réseau,  $a$ , et le nombre de traits par unité de longueur,  $n$ .

3) La largeur des pics principaux limite la possibilité de distinguer deux raies de longueur d'onde trop proches. On considère que des raies sont séparées si les maxima de même ordre des deux longueurs d'onde sont au moins séparés de la demi-largeur d'un pic principal.

3.a) En déduire la valeur minimale de  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  pour que les raies soient séparées par le réseau précédent. Cette valeur dépend-elle de l'ordre  $p$  ?

3.b) La lampe au mercure possède un raie double telle que  $\lambda_1 = 0,5770\mu m$  et  $\lambda_2 = 0,5791\mu m$ . A quelle couleur correspondent ces longueurs d'onde ? Dans quel ordre  $p$  sont-elles séparées par le réseau si  $N = 1000$  ?



exercice  
de colle

### Exercice 6.19 Diffraction par une fente

En 1678, Huygens suggère que chaque point atteint par une onde lumineuse devient la source d'une onde sphérique. La somme de ces ondes secondaires détermine la forme de l'onde à n'importe quel moment. Il était capable de fournir une explication qualitative sur la propagation des ondes sphériques et planes, et de dériver les lois de la réflexion et de la réfraction en utilisant ce principe.

En 1818, Fresnel démontre que son propre principe d'interférences et que le principe de Huygens sont tous les deux en mesure d'expliquer la propagation linéaire de la lumière mais également les effets de la diffraction.

Formulé par Fresnel en 1815, ce principe peut s'énoncer comme suit :

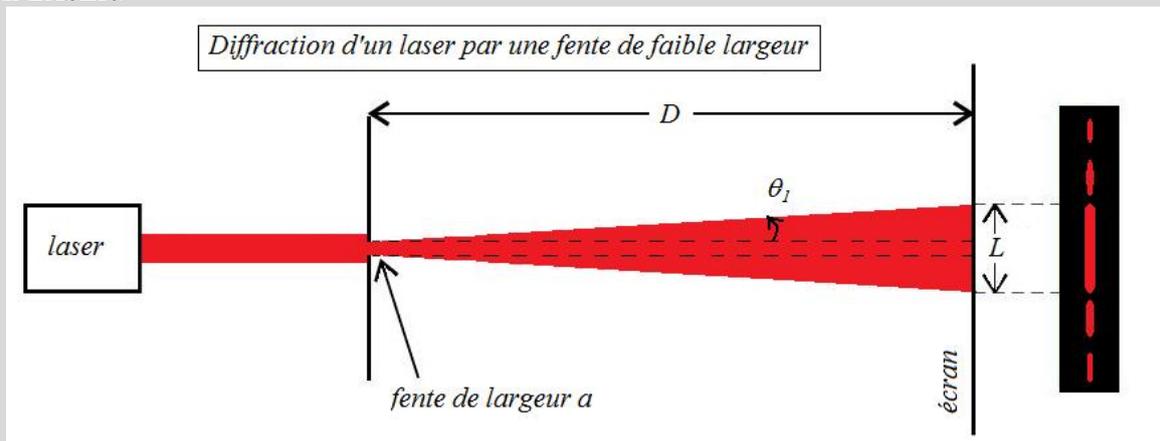
Soit une surface  $\Sigma$  et une source lumineuse  $S$ . On découpe  $\Sigma$  en surfaces élémentaires  $d^2\Sigma$  centrées autour d'un point  $P$ . Chaque point  $P$  de  $\Sigma$  atteint par la lumière émise par la source  $S$  se comporte comme une source secondaire fictive émettant une ondelette sphérique.

De plus :

- l'amplitude de l'ondelette émise est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente et à l'aire  $d^2\Sigma$  ;
- sa phase est prise égale à la phase de l'onde incidente ;
- les vibrations issues des différentes sources secondaires sont cohérentes entre elles.

D'après l'article wikipédia [https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe\\_de\\_Huygens-Fresnel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_Huygens-Fresnel).

On va essayer, dans cet exercice, de déterminer l'intensité lumineuse diffractée à l'infini par une fente éclairée par un LASER.



1) On suppose que le LASER (de longueur d'onde  $\lambda$ ) est incident normalement (suivant  $Oz$ ) sur une pupille formée de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  éloignés de  $a$ .

1.a) Déterminer la différence de marche entre les deux rayons lumineux dans la direction faisant un angle  $\theta$  par rapport à la direction du faisceau LASER. En déduire l'intensité lumineuse dans cette direction.

1.b) Le calcul précédent est-il cohérent avec le principe de Huygens-Fresnel? (On note  $\underline{A}_0$ , l'amplitude complexe de la radiation lumineuse du LASER qui arrive sur la pupille.)

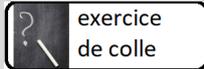
2) On suppose maintenant que le LASER est incident (toujours normalement) sur une fente centrée sur  $O$ , de largeur  $a$ . On note  $\underline{A}_0$ , l'amplitude complexe de la radiation lumineuse du LASER qui arrive sur la fente.

2.a) Déterminer la différence de marche entre deux rayons lumineux (l'un passant par  $O$ , l'autre par  $P$ , situé à l'abscisse  $x$  sur la pupille) dans la direction faisant un angle  $\theta$  par rapport à la direction du faisceau LASER.

2.b) En déduire, grâce au principe de Huygens-Fresnel, l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{A}(\theta)$  de la radiation lumineuse dans cette direction.

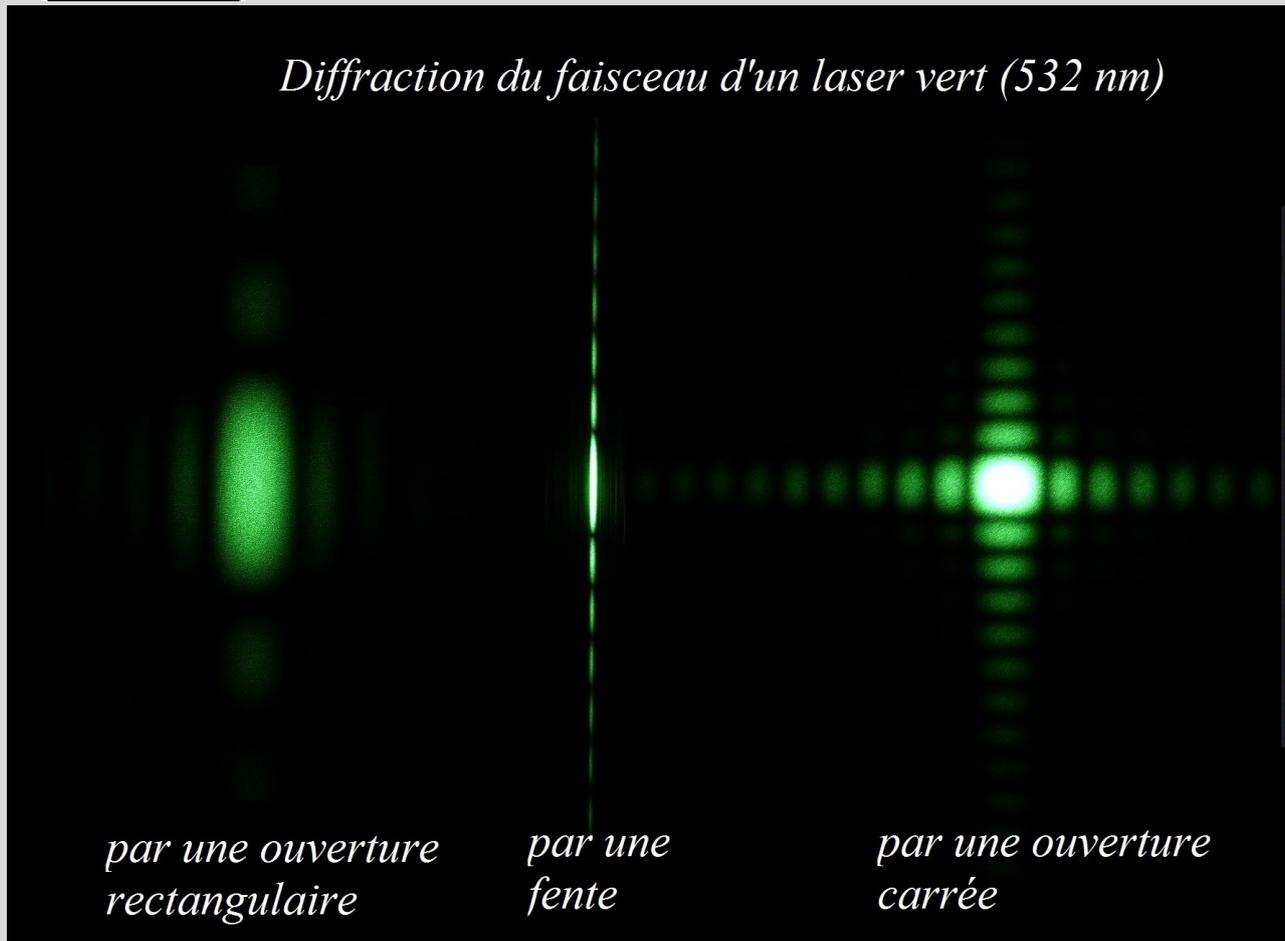
2.c) En déduire l'expression de l'intensité lumineuse  $I(\theta)$  dans cette direction. Tracer l'allure de  $I(\theta)$ .

2.d) Décrire l'image de diffraction obtenue et comparer à ce que l'on aurait pu prévoir en appliquant les résultats du cours sur les fréquences spatiales.



exercice  
de colle

Exercice 6.20  
Diffraction de Fraunhofer d'une fente



1) Généralités

On s'intéresse à une pupille diffractante de transmittance  $\tilde{t}(X, Y)$  éclairée par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer.

On note :

le vecteur d'onde incident  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_z$ ,

- $\alpha_d$  l'angle que fait le vecteur d'onde diffracté  $\vec{k}_d$  avec  $\vec{u}_z$  dans le plan  $XZ$ ,
- $\beta_d$  l'angle que fait  $\vec{k}_d$  avec  $\vec{u}_z$  dans le plan  $YZ$ .

1.a) Exprimer le vecteur d'onde  $\vec{k}_d$  dans le repère  $Oxyz$ .

1.b) Exprimer, en fonction de  $\alpha_d$  et  $\beta_d$ ,  $x_M$  et  $y_M$  les coordonnées de  $M$ , un point de l'image de diffraction, par rapport à  $F'_2$ , le foyer image de la lentille convergente dans le plan focal de laquelle on observe la figure de diffraction.

1.c) En déduire que l'amplitude complexe de l'onde au point d'observation  $M$ , c'est à dire diffractée dans la direction donnée par les angles  $\alpha_d, \beta_d$ , est

$$\tilde{A}(\alpha_d, \beta_d) = \tilde{A}_0 \int_X \int_Y \tilde{t}(X, Y) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha_d X + \beta_d Y)} dX dY$$

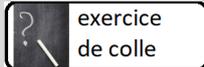
2) Applications

La pupille diffractante est une fente de largeur  $a$  suivant  $x$ , et infinie suivant  $y$ .

2.a) Déterminer  $I(x, y)$ .

2.b) Montrer que  $I(x, y) = 0$ , dès que  $y \neq 0$ .

2.c) Montrer que l'ouverture angulaire de la tache principale est  $\Delta\theta = \frac{2\lambda}{a}$ .



exercice  
de colle

### Exercice 6.21 Fabry-Pérot

1) Rappelez succinctement :

1.a) le modèle scalaire de la lumière utilisé en optique ondulatoire,

1.b) l'expression mathématique d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ ,

1.c) la façon dont on en déduit l'intensité lumineuse.

On modélise le dispositif interférométrique de Fabry-Pérot de la façon suivante : deux miroirs semi réfléchissants identiques, de coefficient de réflexion en amplitude  $r$  et de transmission en amplitude  $t$ , séparés d'air sur une distance  $e$ . Du fait de la conservation de l'énergie,  $r^2 + t^2 = 1$ .

Le dispositif de Fabry-Pérot est éclairé par un rayon lumineux incident monochromatique d'amplitude  $A_0$  à l'entrée et d'angle d'incidence  $\theta$ .

On note  $A_i$  l'amplitude du  $i^{\text{ème}}$  rayon émergeant à la sortie du dispositif et  $T_i$  son amplitude lors de l'observation à l'infini.

2) Exprimez à l'aide des grandeurs relatives au problème :

2.a) la première amplitude de sortie  $A_1$ , en fonction de  $A_0$  ;

2.b) l'amplitude  $A_{i+1}$  en fonction de l'amplitude  $A_i$  ;

2.c) l'amplitude  $A_i$  en fonction de l'amplitude  $A_0$ .

3) De même, si on note  $T_1 = A_1 e^{+j \Delta \varphi}$ , exprimez à l'aide des grandeurs relatives au problème :

3.a) l'amplitude  $T_i$  en fonction de l'amplitude  $A_i$  ;

3.b) l'amplitude  $T_i$  en fonction de l'amplitude  $A_0$ .

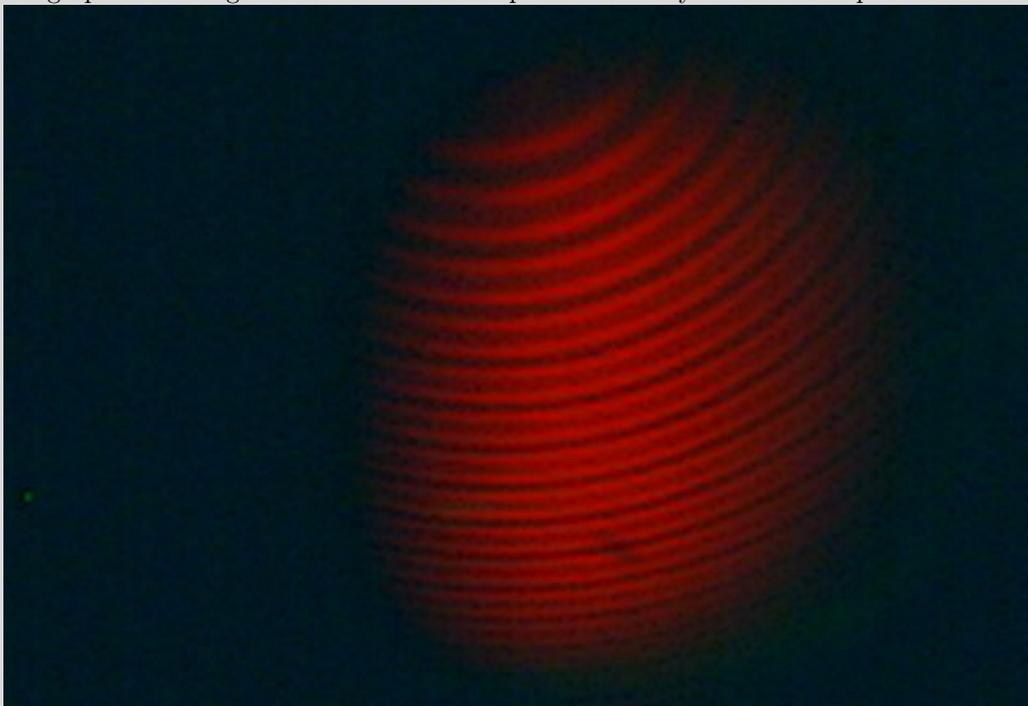
4) En déduire que l'intensité totale à l'infini se met sous la forme

$$I_{tot} = \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \left( \frac{2\pi e}{\lambda} \cos \theta \right)}$$

où  $F$  est la finesse de la cavité, à exprimer en fonction du coefficient de réflexion en amplitude des miroirs  $r$ . Interpréter la formule obtenue en discutant de la valeur de  $F$ .

5) Interprétation

On a photographié les franges obtenues avec un dispositif de Fabry-Pérot éclairé par une source lumineuse :



5.a) Quelle est la forme des franges à l'infini ? Est-ce cohérent avec la photographie ?

5.b) Que peut-on dire du spectre de la source lumineuse utilisée pour éclairer le dispositif de Fabry-Pérot ?