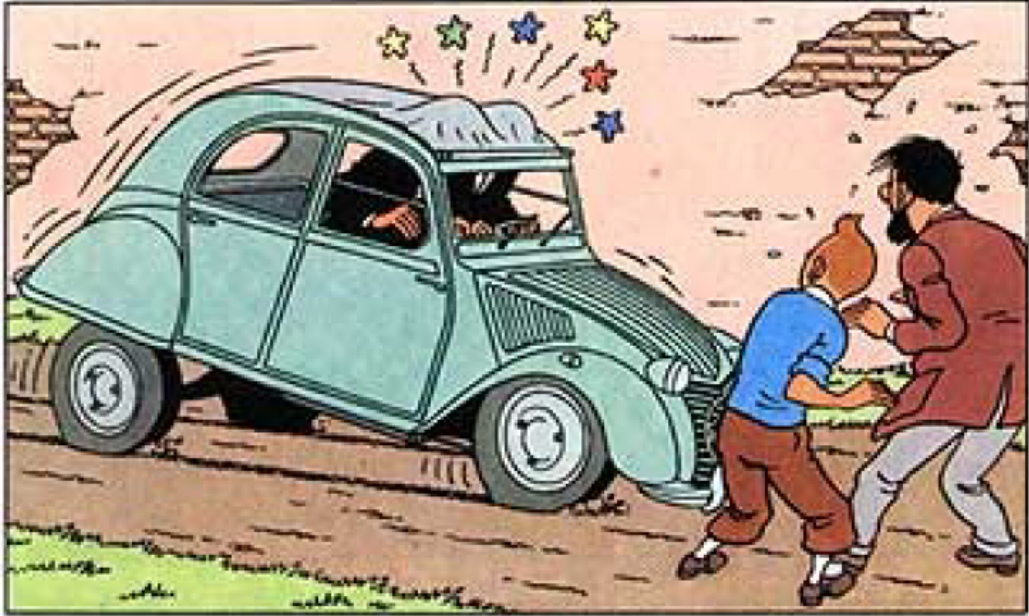


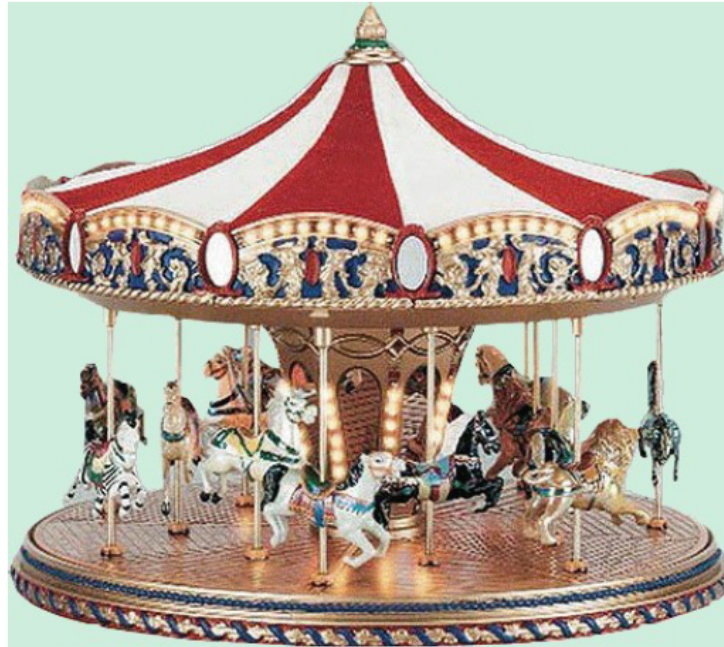
Comment créer une gravité artificielle dans un vaisseau spatial ?



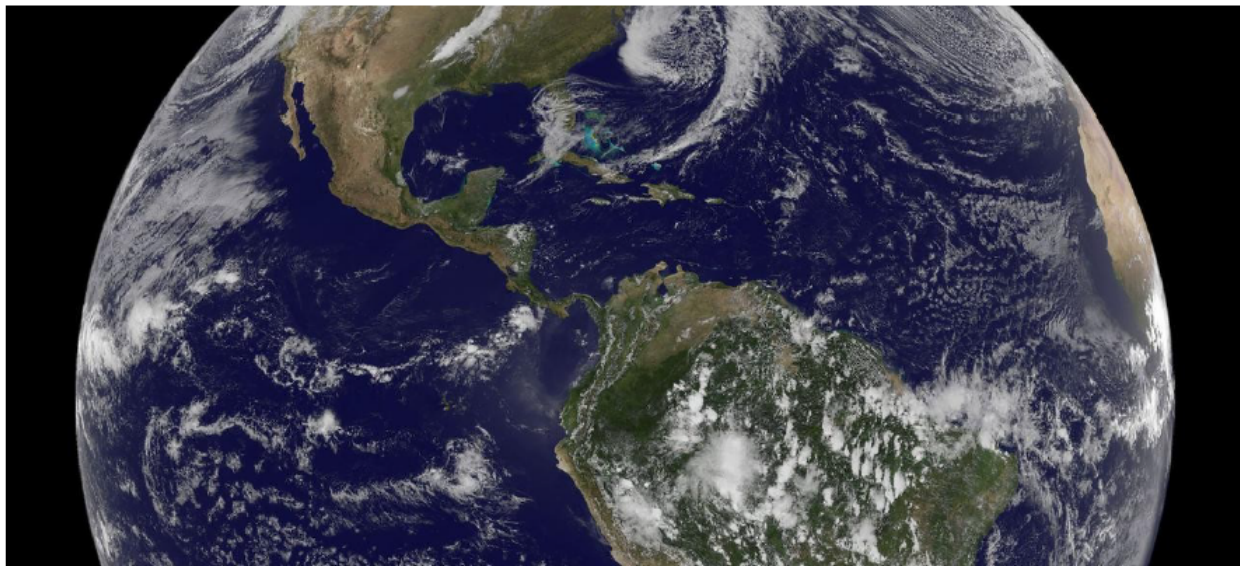
**► passer à un référentiel
en translation accélérée
par rapport à un référentiel galiléen**



► **passer à un référentiel
en rotation uniforme
par rapport à un référentiel galiléen**



► **étudier les effets propres
au référentiel terrestre**



Référentiels non galiléens

Les points du cours à connaître

I- Référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

✳ Référentiel galiléen *s'y retrouver*

un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique : un objet isolé (c'est à dire ne subissant aucune force) suit un mouvement rectiligne uniforme. Dans un référentiel galiléen R , le principe fondamental de la dynamique s'applique :

$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\rightarrow M}$$

✳ Exemples de référentiels *s'y retrouver*

Le référentiel de Copernic : dans lequel le centre du système solaire et trois étoiles lointaines sont fixes

Galiléen avec une excellente approximation.

Le référentiel héliocentrique a pour point fixe le centre du Soleil.

Galiléen avec une excellente approximation.

Le référentiel géocentrique : dans lequel le centre de la Terre et trois étoiles lointaines sont fixes.

Il est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic.

Galiléen pour des expériences de durées courtes devant 1 an.

Le référentiel terrestre : lié à la Terre.

Il est en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique.

Galiléen pour des expériences de durées courtes devant 24 h.

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations

👁 Deux référentiels en translation *schéma*

La figure ?? représente

- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ et d'une autre horloge.

✳ Position du problème *s'y retrouver*

Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en translation par rapport à R . Aussi, on peut choisir

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \vec{u}_x \\ \vec{u}_{y'} = \vec{u}_y \\ \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z \end{cases}$$

Un point matériel en M est repéré par

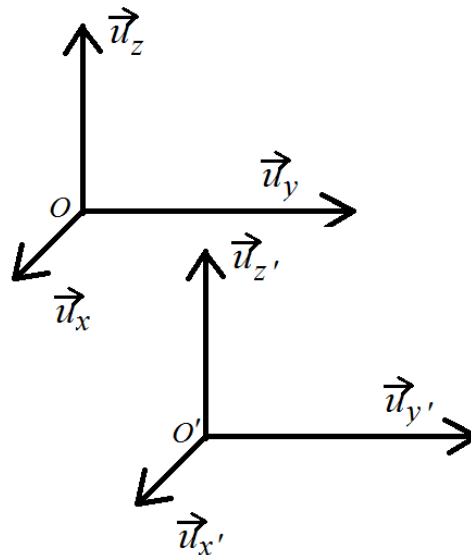


FIGURE 1 – Deux référentiels en translation

- $\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t) \vec{u}_x + y'(t) \vec{u}_y + z'(t) \vec{u}_z$ dans R' .

1 Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation *théorème*

La vitesse du point matériel en M est

- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right)_{/R} = \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R'} = \dot{x}'(t) \vec{u}_x + \dot{y}'(t) \vec{u}_y + \dot{z}'(t) \vec{u}_z$ dans R' .

Aussi,

$$\begin{aligned} \vec{v}_{/R}(M) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R} \\ \Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) &= \vec{v}_{/R}(O') + \left(\frac{d(x'(t) \vec{u}_x + y'(t) \vec{u}_y + z'(t) \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R} \\ \Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) &= \vec{v}_{/R}(O') + (\dot{x}'(t) \vec{u}_x + \dot{y}'(t) \vec{u}_y + \dot{z}'(t) \vec{u}_z) \end{aligned}$$

\Rightarrow

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement du référentiel R' par rapport à R .

\vec{v}_e est la vitesse, dans R , du point coïncident P , qui se trouve au même endroit que M mais qui est fixe dans R' .

✳ Exemple de point coïncident *s'y retrouver*

si un train (assimilé au référentiel R' se déplace par rapport au sol (le référentiel R) et qu'on y lance une balle (le point matériel M), la trace laissée sur le sol à l'instant t est le point coïncident P .



remarque

Le point coïncident change : à un instant t' ultérieur, le point P est différent du point M .
On peut alors définir un nouveau point coïncident P' .



2 Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en translation

théorème

L'accélération du point matériel en M est

- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R}(M)(t)}{dt} \right)_{/R} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x + \ddot{y}(t) \vec{u}_y + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R'} = \ddot{x}'(t) \vec{u}_x + \ddot{y}'(t) \vec{u}_y + \ddot{z}'(t) \vec{u}_z$ dans R' .

Or $\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{/R}(M) &= \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{/R} \\ \Rightarrow \vec{a}_{/R}(M) &= \left(\frac{d(\dot{x}'(t) \vec{u}_x + \dot{y}'(t) \vec{u}_y + \dot{z}'(t) \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R} + \vec{a}_e \\ \Rightarrow \vec{a}_{/R}(M) &= (\ddot{x}'(t) \vec{u}_x + \ddot{y}'(t) \vec{u}_y + \ddot{z}'(t) \vec{u}_z) + \vec{a}_e \end{aligned}$$

\Rightarrow

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est liée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_e$$

où \vec{a}_e est l'accélération d'entraînement du référentiel R' par rapport à R .

\vec{a}_e est l'accélération, dans R , du point coïncident P , qui se trouve au même endroit que M mais qui est fixe dans R' .

2. Force d'inertie d'entraînement



3 Expression de la force d'inertie d'entraînement : théorème

En partant du principe fondamental de la dynamique dans R

$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} = m\vec{a}_{/R'}(M) + m\vec{a}_e$$

\Rightarrow

dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces \vec{F} la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e$$

3. Exemples de translations



Loi galiléenne de composition des vitesses *s'y retrouver*

Si R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R , la vitesse d'entraînement est partout la même et constante au cours du temps : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cste}$

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_0$$



4 Ensemble des référentiels galiléens *théorème*

Si R' est en translation rectiligne uniforme dans R galiléen alors il n'y a pas de forces d'inertie à considérer dans R' . En effet, $\vec{v}_e = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0}$. \Rightarrow

Tout référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen R est lui-même galiléen.



5 Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une translation uniformément accélérée *théorème*

Si $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors

$$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e = -m \cdot a_0 \vec{u}_x = \overrightarrow{-grad} (m \cdot a_0 x)$$

\Rightarrow

Dans le cas d'une translation uniformément accélérée $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = m a_0 x$.



Voiture qui freine *schéma*

La figure ?? représente une voiture (le référentiel R') qui est en translation rectiligne dans le référentiel (R) du sol ($\vec{v}_e = +v(t) \vec{u}_x$), mais qui freine : $\vec{a}_e = -a \vec{u}_x$. La force d'inertie d'entraînement "pousse" les passagers vers l'avant du véhicule.



Grande roue *schéma*

La figure ?? représente une cabine (le référentiel R') de grande-roue (de rayon R_0) qui est en translation circulaire uniforme dans le référentiel (R) du sol ($\vec{v}_e = +v_0 \vec{u}_\theta$) : $\vec{a}_e = -\frac{v_0^2}{R_0} \vec{u}_r$.



référentiel géocentrique *schéma*

La figure ?? représente le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel héliocentrique

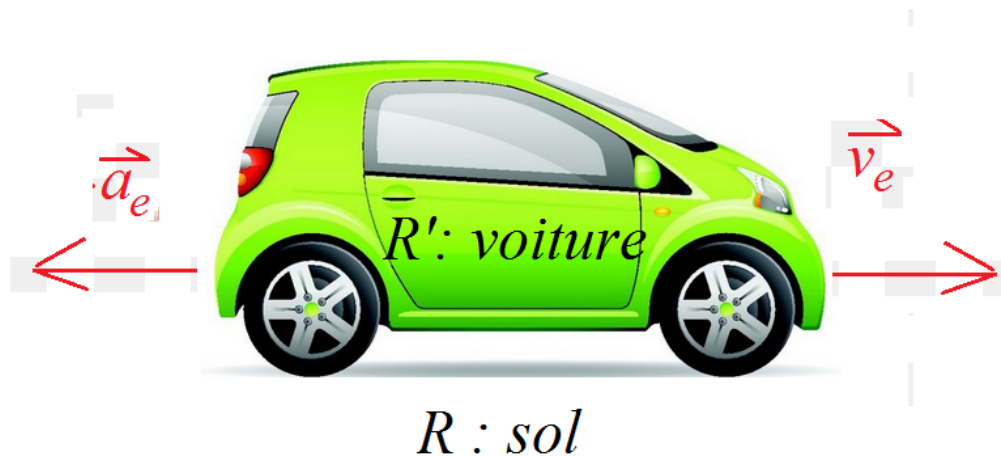


FIGURE 2 – Voiture qui freine

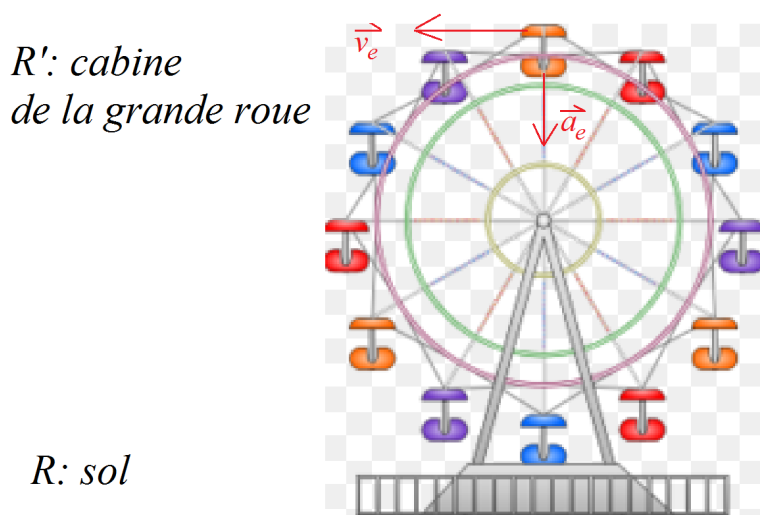


FIGURE 3 – Grande roue

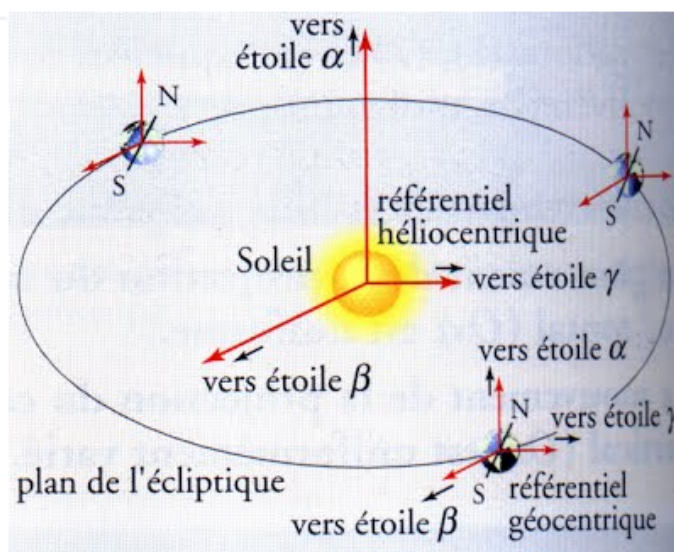


FIGURE 4 – référentiel géocentrique

II- Référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

1. Lois de composition des vitesses et des accélérations



Deux référentiels en rotation *schéma*

La figure ?? représente

- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}'_{x'}, \vec{u}'_{y'}, \vec{u}'_{z'})$ et d'une autre horloge.

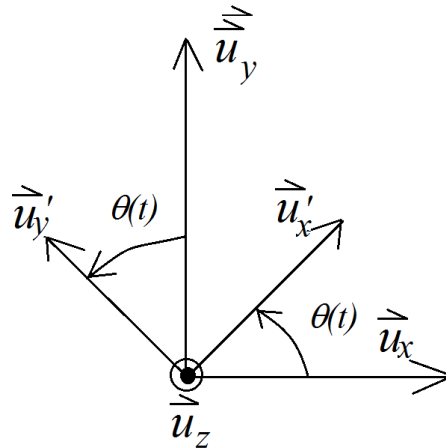


FIGURE 5 – Deux référentiels en rotation



Position du problème *s'y retrouver*

Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en rotation par rapport à un axe fixe dans R . Aussi, on peut choisir :

$$\begin{cases} O' \text{ en } O \text{ et } \vec{u}'_{z'} = \vec{u}_z \\ \vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z \text{ avec } \Omega_z = \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Un point matériel en M est repéré par

- $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{O'M} = x' \vec{u}'_{x'} + y' \vec{u}'_{y'} + z \vec{u}_z$ dans R' .



6 Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en rotation *théorème*

La vitesse du point matériel en M est

- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/R} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{O'M}(t)}{dt} \right)_{/R'} = \dot{x}' \vec{u}'_{x'} + \dot{y}' \vec{u}'_{y'} + \dot{z} \vec{u}_z$ dans R' .

Aussi,

$$\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d(x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_z)}{dt} \right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = (\dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_z) + \left(x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right)$$

or

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \Omega_z (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) = \Omega_z \vec{u}_{y'} \\ \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \Omega_z (-\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y) = -\Omega_z \vec{u}_{x'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \Omega_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

\Rightarrow

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du point coïncident.

7 Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en rotation

théorème

L'accélération du point matériel en M est

- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R}(M)}{dt} \right)_{/R} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} \right)_{/R'} = \ddot{x}' \vec{u}_{x'} + \ddot{y}' \vec{u}_{y'} + \ddot{z} \vec{u}_z$ dans R' .

Or $\vec{v}_{/R}(M) = (\dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_z) + \Omega_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{/R}(M) &= (\ddot{x}' \vec{u}_{x'} + \ddot{y}' \vec{u}_{y'} + \ddot{z} \vec{u}_z) + \left(\dot{x}' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \dot{y}' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right) \\ &\quad + \dot{\Omega}_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) \\ &\quad + \Omega_z (\dot{x}' \vec{u}_{y'} - \dot{y}' \vec{u}_{x'}) + \Omega_z \left(x' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} - y' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{/R}(M) &= \vec{a}_{/R'}(M) + (\dot{x}' \Omega_z \vec{u}_{y'} - \dot{y}' \Omega_z \vec{u}_{x'}) \\ &\quad + \dot{\Omega}_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'}) \\ &\quad + \Omega_z (\dot{x}' \vec{u}_{y'} - \dot{y}' \vec{u}_{x'}) + \Omega_z (-x' \Omega_z \vec{u}_{x'} - y' \Omega_z \vec{u}_{y'}) \end{aligned}$$

Si on pose

$$\vec{a}_C = 2 \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2 \Omega_z (x' \vec{u}_{y'} - y' \vec{u}_{x'})$$

\Rightarrow

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_C(M)$$

où l'accélération de Coriolis est

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M)$$

et l'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{/R}(P)$$

8 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen en rotation : *théorème*

Puisque dans R galiléen

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_e(M) = \frac{1}{m} \sum \vec{f}_{\rightarrow M}$$

donc

$$m\vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} - m\vec{a}_C(M) - m\vec{a}_e(M)$$

\Rightarrow

dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces $\vec{f}_{\rightarrow M}$ la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{/R}(P)$$

et la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = -m\vec{a}_C = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

Tige tournant par rapport au sol *schéma*

La figure ?? représente On s'intéresse à une tige (le référentiel R'), qui fait à l'instant t un angle $\theta(t)$ avec l'axe Ox fixe dans le référentiel R du sol supposé galiléen. Cette tige tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Une perle est assimilée à un point matériel M sur cette tige à une distance $r(t)$ de O à l'instant t .

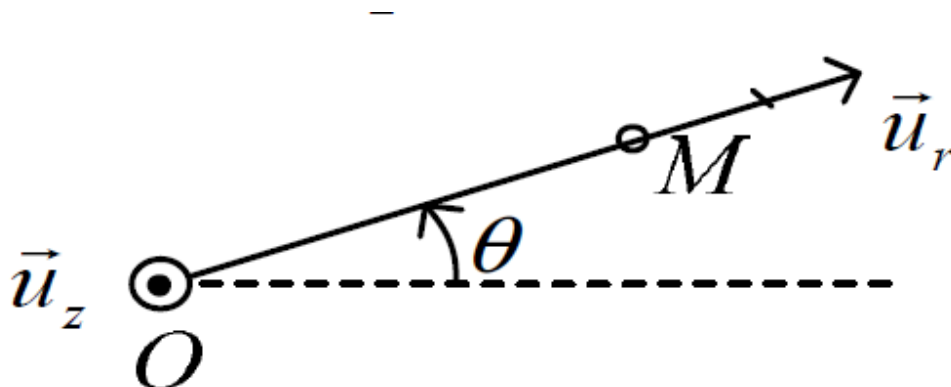


FIGURE 6 – Tige tournant par rapport au sol

2. Force d'inertie d'entraînement axifuge

9 Force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante *théorème*

On reprend les calculs précédents avec $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$. On trouve

$$\vec{a}_{/R}(P) = +r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

soit $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$. \Rightarrow

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz , la force d'inertie est axifuge (H est le projeté de M sur l'axe de rotation) :

$$\vec{f}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m r \omega^2 \vec{u}_r$$

en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

10 Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante *théorème*

Si $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow dE_p = -m r \omega^2 dr$ qu'on peut intégrer en

$$E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

\Rightarrow

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz , la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz .

3. Force d'inertie de Coriolis

Propriétés de la force d'inertie de Coriolis *s'y retrouver*

La force de Coriolis s'appliquant toujours orthogonalement à la vitesse, cette force ne travaille pas.

La force d'inertie de Coriolis n'existe que :

- si le référentiel non galiléen R' est en rotation par rapport à R galiléen
- et si le point matériel M se déplace dans le référentiel non galiléen R' .

III- Effets des forces d'inertie dans le référentiel terrestre

1. Effets de la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre

👁 Référentiels terrestre et géocentrique *schéma*

La figure ?? représente Le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe dans le référentiel géocentrique.

Le référentiel terrestre tourne autour de l'axe polaire Oz avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$.

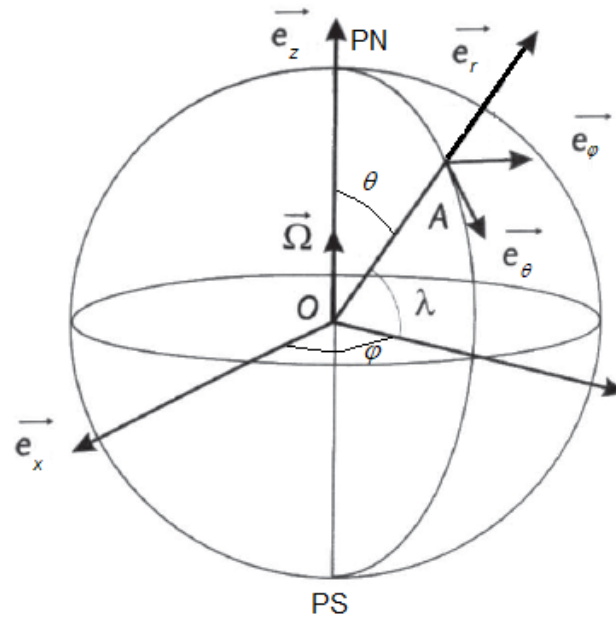


FIGURE 7 – Référentiels terrestre et géocentrique



Le poids : définition

On définit le poids comme la somme de deux forces :

- l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet \vec{f}_G ;
- la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre \vec{f}_{ie} .



Direction du poids *schéma*

La figure ?? représente $\vec{f}_G = -G \frac{m M_T}{R_T^3} \vec{OP}$ et $\vec{f}_{ie} = m \Omega^2 \vec{HP}$. La direction indiquée par un fil à plomb est celle de \vec{g} . Elle ne passe pas *a priori* par O .



Inhomogénéités du champ de pesanteur à la surface de la Terre : *s'y retrouver*

La force d'inertie d'entraînement est la plus grande à l'équateur, là où l'on est le plus éloigné de l'axe de rotation. C'est donc à l'équateur que le poids d'un objet est le plus petit, et aux pôles qu'il est le plus grand.

De la même façon, plus l'altitude est élevée, plus l'attraction gravitationnelle est faible, et plus la force d'inertie est forte : un objet est moins lourd en altitude.

2. Effets de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel terrestre

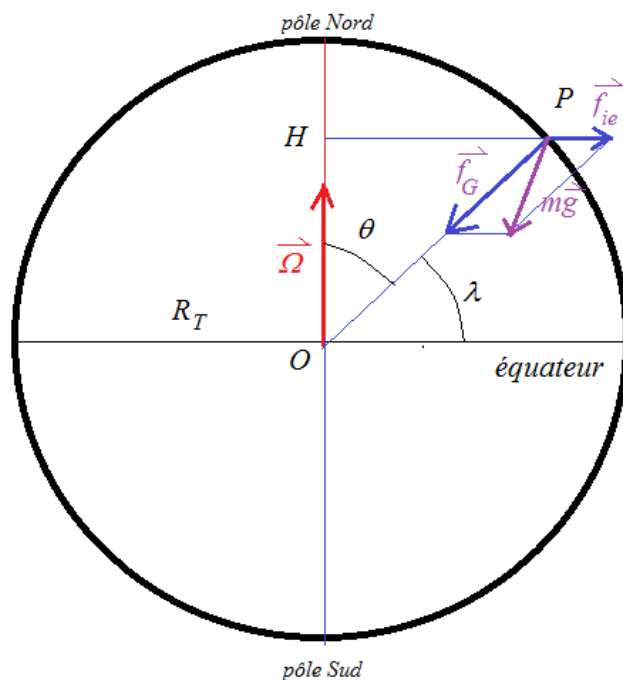


FIGURE 8 – Direction du poids

Le pendule de Foucault *photo*



Foucault met au point au XIX^{ème} siècle un pendule qui oscille suffisamment longtemps pour qu'on ait le temps de voir son plan d'oscillation tourner dans le référentiel terrestre.



Effets de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel terrestre *à retenir*

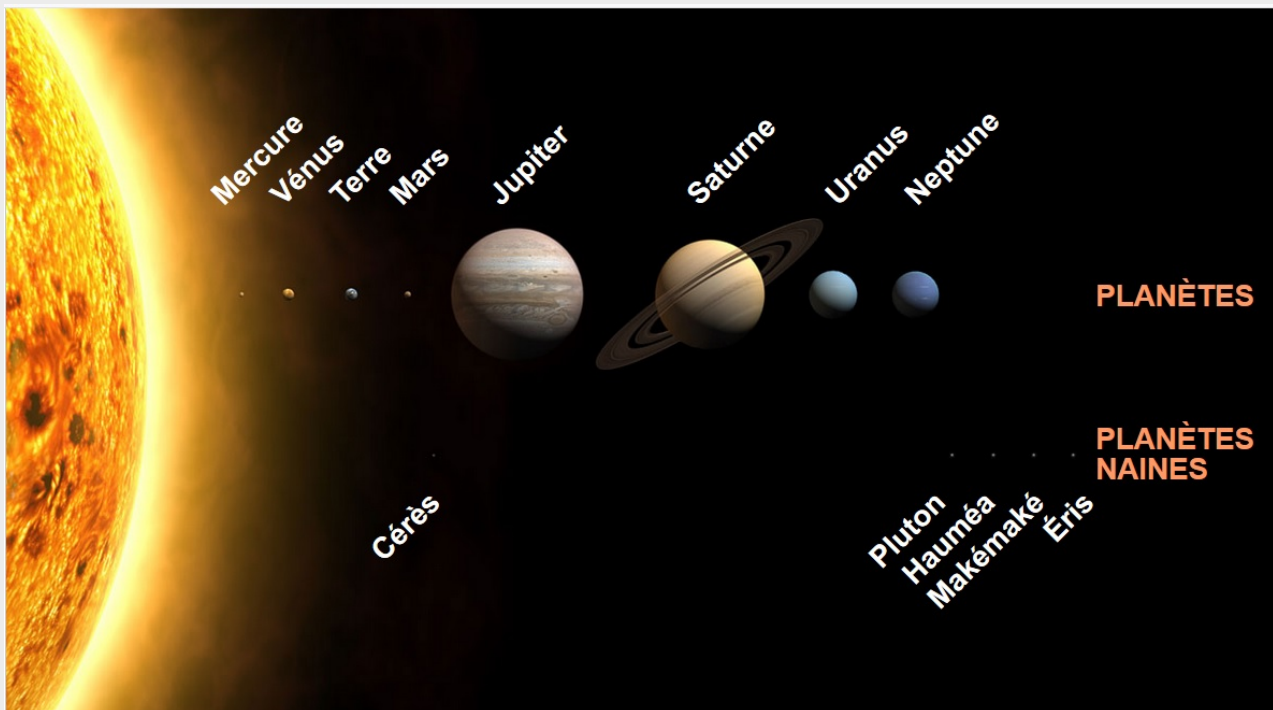
La force d'inertie de Coriolis :

- dévie vers la droite un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère nord ;
- dévie vers la gauche un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère sud ;
- dévie vers l'est un objet qui se déplace verticalement vers le bas.



Valeurs numériques (compléments) Référentiels non galiléens

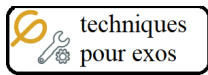
- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Masse de la Terre : $6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$.
- Rayon de la Terre : $6,4 \times 10^6 \text{ m}$.
Le rayon équatorial est de 6 378 km, alors que le rayon polaire est de 6 356 km : la Terre est aplatie aux pôles.
- Jour sidéral terrestre : 23 h 56 min 4 s (période de rotation de la Terre autour de son axe).
C'est en raison de la révolution de la Terre autour du Soleil en même temps qu'elle tourne sur elle-même que le jour solaire dure 24 heures en moyenne.
- Année : 365,242 jours (durée de la révolution de la Terre autour du Soleil).
Dans le calendrier grégorien, l'année sera bissextile (elle aura 366 jours) si l'année est divisible par 4 et non divisible par 100, ou si l'année est divisible par 400. Sinon, l'année n'est pas bissextile : elle a 365 jours.
- Distance Terre-Soleil : $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$.
soit 8 minutes - lumière environ.
- Distance Terre-Lune : $3,8 \times 10^8 \text{ m}$.
soit 1 seconde - lumière environ.



Planètes et planètes naines du Système solaire.

Les tailles sont à l'échelle mais les distances sont extrêmement compressées. Les plans orbitaux ont été modifiés avec la licence artistique d'aligner les planètes et les planètes naines sur deux lignes différentes. L'ordre est respecté pour les distances moyennes au Soleil. (Pluton peut se trouver plus près du Soleil que Neptune mais sa distance moyenne est plus grande).

Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_System_size_to_scale_fr.svg.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Cinématique du solide

Relation de Varignon

Quel que soit le couple de point M et N d'un solide, les vitesses de ces points \vec{v}_M et \vec{v}_N dans un référentiel R suivent la relation :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}$$

Contact entre solides

Contact

Si contact : \vec{N} est orthogonale au plan de contact, du support vers le système.

Si perte de contact : $\vec{N} = \vec{0}$.

Non glissement

Condition cinématique de non glissement : $\vec{v}_{\text{gliss}} = \vec{0}$

Condition dynamique de non glissement : $\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|$

Glissement

Condition cinématique de glissement : $\vec{v}_{\text{gliss}} \neq \vec{0}$

Condition dynamique de glissement : $\vec{T} = -\mu_d N \frac{\vec{v}_{\text{gliss}}}{\|\vec{v}_{\text{gliss}}\|}$

Conseil : il vaut mieux utiliser des grandeurs algébriques qui sont les projections de \vec{T} (dont on ne connaît pas toujours le sens).

Solide en rotation autour d'un axe fixe

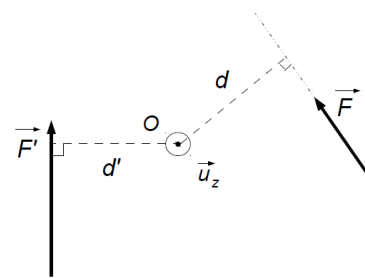
Loi dynamique :

Le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation Oz tout comme le théorème de la puissance cinétique donne :

$$J_{Oz} \frac{d\Omega_z}{dt} = M_{Oz}(ext)$$

Rappel : la liaison pivot étant supposée parfaite, la puissance de cette action est nulle.

Méthode du bras de levier : $M_{Oz} = \pm F d$ ($M_{Oz} > 0$ si cela tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, négatif sinon).



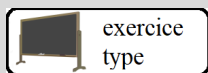
Statique du solide

Condition cinématique de staticité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists A \in \Sigma \text{ tel que } \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_\Sigma = \vec{0} \end{array} \right.$$

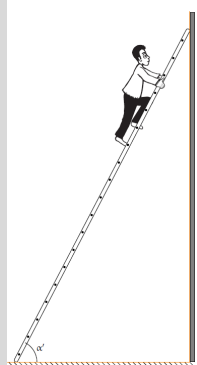
Condition dynamique de staticité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}(ext) = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O(ext) = \vec{0} \end{array} \right.$$



Exercice 8.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Révisions de mécanique du solide (l'échelle)



On considère une échelle de longueur l_0 , appuyée le long d'un mur vertical et posée sur un sol horizontal, faisant un angle α avec le sol.

On modélise un homme qui grimpe sur cette échelle par une masse ponctuelle m posée sur une marche à une distance $\ell \leq l_0$ de l'extrémité basse de l'échelle. On négligera le poids de l'échelle devant celle de l'homme.

On suppose que le sol a pour coefficient de frottement statique μ_s et le mur est glissant ($\mu_m = 0$).

1) Comment être sûr que l'échelle ne se mette pas à glisser si l'on décide de monter dessus ?

1) Théorème de la résultante cinétique et du moment cinétique au point de contact avec le sol :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) N_s - m.g = 0 \\ (2) N_m - T_s = 0 \\ (3) \ell.m.g.\cos(\alpha) - l_0.N_m.\sin(\alpha) = 0 \end{array} \right.$$

Conditions de non glissement :

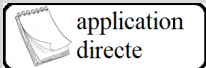
$$T_s < \mu \cdot N_s \Rightarrow N_m < \mu \cdot N_s = \mu \cdot m \cdot g$$

$$(3) \Rightarrow m \cdot g > \frac{\ell_0 \cdot N_s}{\ell_0 - \ell} (1 - \mu \cdot \tan(\alpha))$$

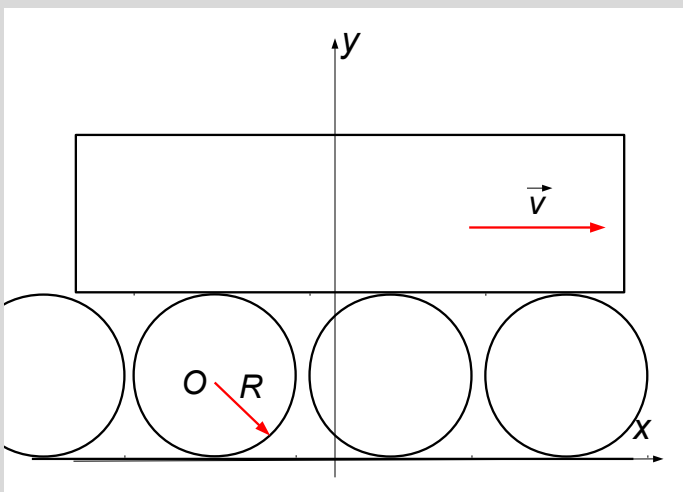
$$\Rightarrow \ell < \ell_{\max} = \ell_0 \cdot \mu \cdot \tan \alpha$$

Pour être sûr de ne pas glisser, il faut :

$$\ell_{\max} > \ell_0 \Rightarrow \tan \alpha > \frac{1}{\mu}$$



Exercice 8.2 pour s'entraîner Astérix et Cléopâtre



Obélix pousse à la vitesse v un bloc de pierre (assimilé à un parallélépipède rectangle) sur des rondins de bois (assimilés à des cylindres de rayon R) qui ne glissent ni sur le sol, ni sur la pierre.

- 1) Quelle est la vitesse du centre de gravité des rondins, v_O ?
- 2) Quelle est leur vitesse angulaire Ω ?

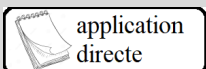
Soient I_1 , le point de contact du rondin avec le sol et I_2 , le point de contact du rondin avec la pierre. Dans le référentiel du sol, $\vec{v}(I_1) = \vec{0} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_1$ et $\vec{v}(I_2) = \vec{v} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_2$.

- 1) En sommant les deux : $\vec{v} = 2 \cdot \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{OI}_1 + \vec{OI}_2)$, soit :

$$v_O = \frac{v}{2}$$

- 2) On en déduit, par $\vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_1 = \vec{0}$, que

$$\Omega = \frac{v_O}{R} = \frac{v}{2 \cdot R}$$



Exercice 8.3 pour s'entraîner Frottements d'une voiture

Expliquer pourquoi, dans une voiture, il faut :

- 1) limiter les frottements entre les pièces du moteur (en les lubrifiant),
- 2) mais augmenter les frottements entre les roues et la route (grâce aux pneus).

Car :

- les actions de contact entre les pièces du moteur sont internes,
- les actions entre les roues et la route sont externes (et peuvent être motrices !).



Exercice 8.4 pour s'entraîner
Porter un sac lourd

Un sac très lourd (de masse m) est accroché au même point O à deux poignées A et B . Deux personnes portent le sac, chacune prenant une poignée. Ces dernières font alors respectivement un angle α_A et α_B avec la verticale.

- 1) Pour quelle personne est-ce le plus lourd à porter ?
- 2) Comment faire de façon à rendre le portage égalitaire et le moins difficile ?

A l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées sur le système sac est nulle :

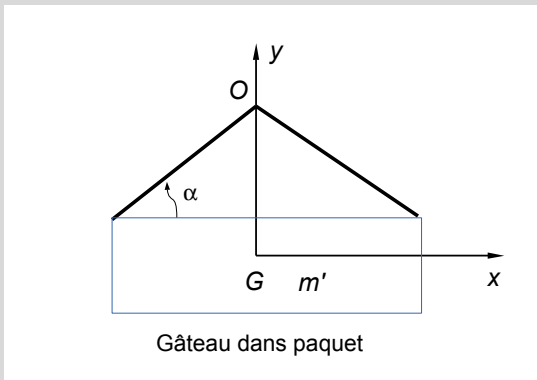
$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

qui donne projeté sur un axe vertical $F_A \cos \alpha_A + F_B \cos \alpha_B = m.g$ et sur un axe horizontal $F_A \sin \alpha_A = F_B \sin \alpha_B$.

- 1) Ainsi celui qui a l'angle le plus grand porte le moins.
- 2) Il faut des angles égaux pour porter de façon égalitaire et un angle le plus petit possible pour porter le moins possible.



Exercice 8.5 pour s'entraîner
Le gâteau



Un gâteau homogène (de masse m) cylindrique de rayon R est mis dans un carton parallélépipède rectangle de côté $2R$, de centre G . Quatre ficelles sont accrochées au paquet et reliées entre elles en O , à la verticale de G . Elles font alors un angle α avec le paquet horizontal.

- 1) Pourquoi ne faut-il pas que α soit trop petit ?

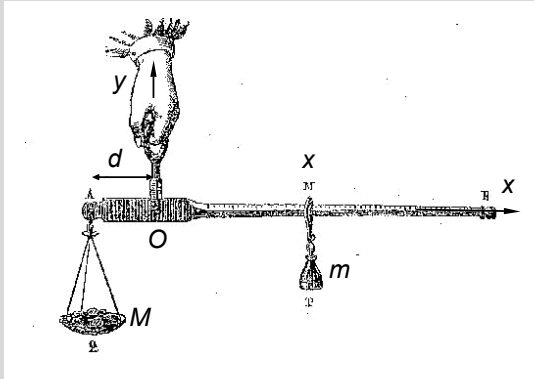
A l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées au système paquet est nulle :

$$m\vec{g} + \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{0}$$

Qui donne projeté sur un axe horizontal $\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$ et $\vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{0}$ sur un autre axe horizontal. Soit l'égalité des normes des tensions. La condition projetée sur un axe vertical donne $4.T \sin \alpha = m.g$. Aussi, $T = \frac{m.g}{4 \sin \alpha}$ qui tend vers l'infini (la ficelle casse!) si $\alpha \rightarrow 0$.



Exercice 8.6 pour s'entraîner
Balance romaine



On désire peser la masse inconnue M à l'aide d'une balance romaine (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . La masse M est suspendue à une distance d du point O , tandis qu'une autre masse m est suspendue de l'autre côté à une distance x variable.

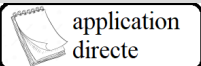
Pour $x = x_{eq}$ la balance voit son fléau rester horizontal.

1) Montrer que l'axe Ox du fléau peut être linéairement gradué en kilogrammes.

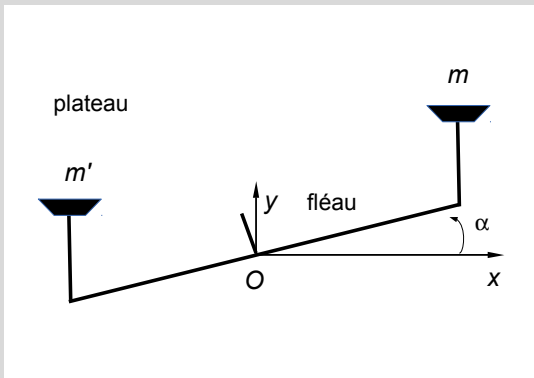
L'équilibre du système fléau \cup masses impose dans le référentiel du sol galiléen : $\sum \vec{M}_O(ext) = \vec{0}$ qui donne dans notre cas :

$$T \times 0 + Mgd - mgx_{eq} = 0$$

soit $x_{eq} = \frac{d}{m}M$. Il existe donc une relation de proportionnalité entre x_{eq} et M .



Exercice 8.7 pour s'entraîner
Balance Roberval



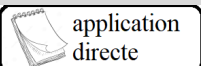
On désire peser la masse inconnue m à l'aide d'une balance Roberval (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz qui supporte deux plateaux accrochés à une distance d . Un dispositif articulé rend horizontaux les plateaux qui supportent respectivement les masses m et m' .

1) Quelle est la condition sur m' et m pour que la balance ait son fléau horizontal ?

L'équilibre du système fléau \cup masses impose dans le référentiel du sol galiléen : $\sum \vec{M}_O(ext) = \vec{0}$ qui donne dans notre cas :

$$m'gd - mgd = 0$$

soit $m' = m$.

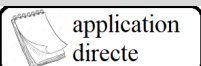


Exercice 8.8 pour s'entraîner
Effet d'une poulie parfaite

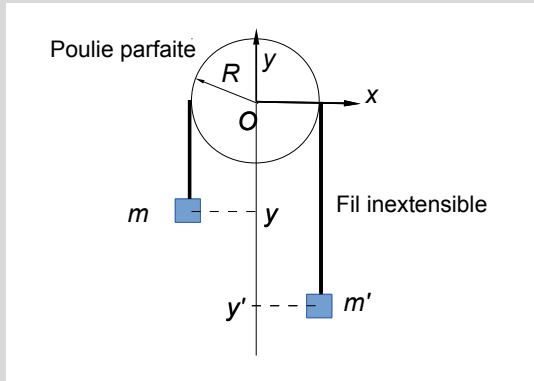
Comparer les forces exercées sur une corde de part et d'autre d'une poulie parfaite (c'est à dire de masse quasi nulle, et ayant une liaison parfaite sans frottement).

$$J\ddot{\theta} = R.(T_1 - T_2)$$

avec $J = 0$. Donc $T_1 = T_2$.



Exercice 8.9 pour s'entraîner
Machine d'Atwood



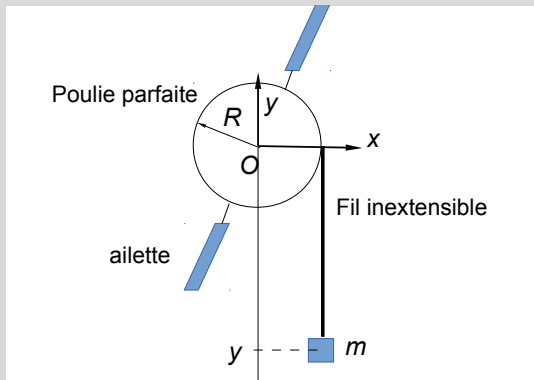
Une poulie parfaite sans masse peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Autour d'elle un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y) à la masse m' dont l'altitude est y' (cf. figure). $m' < m$.

1) Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.

Le fil est inextensible donc $dy = -dy'$ et les tensions auxquelles le fil soumet les masses sont égales ($T = T'$). Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ et à m' donne $m'\ddot{y}' = T' - m'g$.
La résolution amène à $\ddot{y} = -\frac{m-m'}{m+m'}g$.



Exercice 8.10 pour s'entraîner
Machine de Morin



Un cylindre de rayon R peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y). Des ailettes freinent la rotation du cylindre, lui imposant un moment projeté par rapport à l'axe Oz $-\alpha.\Omega_z$, où α est une constante positive et Ω_z la projection du vecteur rotation du cylindre selon Oz .

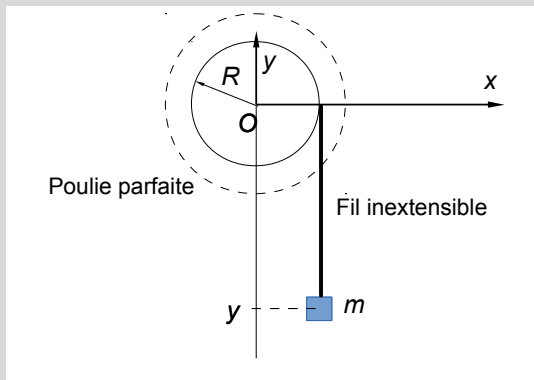
1) Montrer que Ω_z tend vers une constante quand la masse descend.

Le fil est inextensible donc $dy = -R.\omega_z.dt$ et les tensions auxquelles le fil soumet la masse et le cylindre sont égales en norme ($T = T'$) mais opposées. Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ tandis que le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre donne $J\dot{\Omega}_z = -R.T - \alpha.\Omega_z$.

Cela mène à l'équation différentielle $(J + m.R^2)\dot{\Omega}_z + \alpha.\Omega_z = -m.R.g$. Si $t \ll \frac{J+m.R^2}{\alpha}$, $\Omega_z \approx \frac{-m.R.g}{\alpha}$.



Exercice 8.11 pour s'entraîner
Ancien yoyo



Un cylindre peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui à une distance R de l'axe s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y).

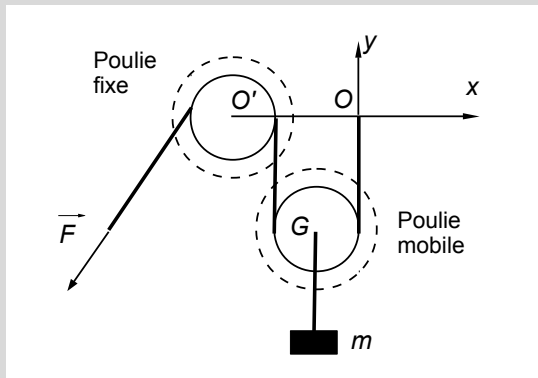
1) Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.

Le fil est inextensible donc $dy = -R.\omega_z.dt$ et les tensions auxquelles le fil soumet la masse et le cylindre sont égales en norme ($T = T'$) mais opposées. Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ tandis que le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre donne $J\dot{\Omega}_z = -R.T$.

Cela mène à l'équation différentielle $m\ddot{y} = \frac{-J}{R}\dot{\Omega}_z - mg = \frac{J}{R^2}\dot{y} - mg$. Soit $\ddot{y} = -\frac{m.R^2}{J+m.R^2}g$.



Exercice 8.12 pour s'entraîner
Palan

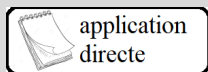


Un palan peut être constitué de deux poulies parfaites (sans masse), l'une d'axe $O'z$ fixe, l'autre d'axe Gz qui garde une direction fixe. A l'axe Gz est accroché un poids de masse m . Une corde inextensible de masse négligeable accrochée en un point fixe est enroulée dans la première poulie d'axe Gz , puis dans la seconde d'axe $O'z$, le brin libre étant tiré avec une force \vec{F} par un ouvrier.

1) Montrer que le palan permet de soulever une masse lourde avec une force réduite.

Les tensions le long du fil sont égales en norme (notée T) car le fil est inextensible et les poulies parfaites. Le TRC appliqué à la poulie mobile donne à l'équilibre $m\ddot{y} = 0 = 2T - mg$.

Ainsi l'ouvrier exerce une force de norme $F = T = \frac{mg}{2}$.



Exercice 8.13 pour s'entraîner
Oscillations d'un pendule pesant aux petits angles

On s'intéresse à un pendule de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, de masse m , dont le centre d'inertie G est une distance a sous l'axe de rotation Oz . Montrer que le pendule est synchrone aux petits angles et déterminer la période T des oscillations libres.

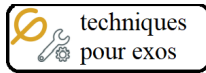
$$J\ddot{\theta} = -m.g.a \sin \theta$$

qui devient aux petits angles :

$$J\ddot{\theta} + m.g.a.\theta \approx 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{m.g.a}{J}} = \frac{2\pi}{T}$, donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m.g.a}}$$



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

On s'intéresse à une particule de masse μ soumise uniquement à une

$$\text{force newtonienne : } \vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ où } k = \text{cste} \begin{cases} k > 0 \text{ si force attractive} \\ k < 0 \text{ si force répulsive} \end{cases}$$

Utilisation du moment cinétique

En appliquant le théorème du moment cinétique on peut montrer que :

- la trajectoire est plane ;
- la norme de la vitesse aréolaire, est une constante : $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$.
(Il sera utile, par la suite de donner l'expression de C , appelée constante des aires, en fonction de r , θ et μ .)

Trajectoire conique

On peut utiliser trois méthodes différentes pour montrer que la trajectoire est une conique, d'équation :

$$\text{en polaire : } r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \text{ où } \begin{cases} p > 0 \text{ est le paramètre} \\ e \geq 0 \text{ est l'excentricité} \end{cases}$$

Vecteur excentricité

On pose le vecteur excentricité :

$$\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{\mu C}{k} \vec{v}$$

Il faut :

- montrer que \vec{e} est une constante du mouvement,
- montrer que la trajectoire est une conique en formant le produit scalaire $\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta$.

Vecteur de Runge-Lenz

On pose le vecteur de Runge-Lenz :

$$\vec{A} = \frac{1}{k} \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_0 - \vec{u}_r$$

Il faut :

- montrer que \vec{A} est une constante du mouvement,
- montrer que la trajectoire est une conique en formant le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{r}$.

Formules de Binet

On pose $\xi(\theta) = \frac{1}{r}$. Il faut :

- exprimer les dérivées successives ξ' et ξ'' de ξ ,
- montrer que le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$(\xi + \xi'') = \text{cste}$$

- vérifier que ξ pour une conique en est bien solution.

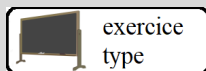
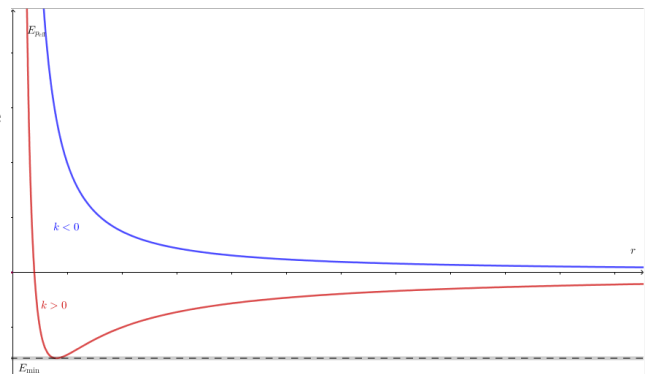
Etude énergétique

$E_m = E_{cr} + E_{peff}$ où :

- $E_{cr} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$ est l'énergie cinétique radiale,
- $E_{peff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$ est l'énergie potentielle effective.

Interprétation :

- $E_m = E_{\min} \Leftrightarrow e = 0$: cercle de centre O ,
- $E_m < 0 \Leftrightarrow e < 1$: ellipse de foyer O ;
- $E_m = 0 \Leftrightarrow e = 1$: parabole de foyer O ;
- $E_m > 0 \Leftrightarrow e > 1$: hyperbole de foyer O .



Exercice 8.14 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Révisions de mécanique du point matériel (mécanique céleste)

On s'intéresse à une particule de masse μ soumise uniquement à une force newtonienne

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

où k est une constante.

- 1) Discuter de la nature de la trajectoire suivant les valeurs des constantes.

1)

1.a) Le moment cinétique se conserve puisque le moment de la force (centrale) est nul. Donc $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge \mu \vec{v}$ est orthogonal à chaque instant à \vec{OM} et \vec{v} , et est constant : il définit un plan unique qui est le plan de la trajectoire.

1.b) La vitesse aréolaire est

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \vec{OM} \wedge \vec{v} \right\| = \frac{\|\vec{\sigma}_0\|}{2\mu}$$

C'est une constante :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \vec{OM} \wedge \vec{v} \right\| = \frac{\|\vec{\sigma}_0\|}{2\mu} = cste = \frac{C}{2} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$$

en cylindrique.

2) Méthode du vecteur excentricité

2.a) On pose le vecteur excentricité :

$$\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{\mu C}{k} \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r - \frac{C}{k} \vec{F} = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \frac{r^2 \dot{\theta}}{k} \frac{k}{r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$

\vec{e} est bien une constante du mouvement.

2.b) Si on prend l'axe x origine des angles θ tel que $\vec{e} = e \vec{u}_x$

$$\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta = e \cos(\theta) = 1 - \frac{\mu C}{k} v_\theta = 1 - \frac{\mu C}{k} r \dot{\theta} = 1 - \frac{\mu C^2}{k r} \Rightarrow \frac{\mu C^2}{k r} = 1 - e \cos(\theta) \Rightarrow r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

Ainsi, la trajectoire est une conique de paramètre $p = \frac{\mu C^2}{k}$.

3) Méthode de l'intégrale première de Runge-Lenz (ou de Laplace)

3.a) On pose le vecteur de Runge-Lenz :

$$\vec{A} = \frac{1}{k} \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_0 - \vec{u}_r \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{\sigma}_0 - \dot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{1}{k} \frac{k}{\mu r^2} \vec{u}_r \wedge \vec{\sigma}_0 - \dot{\theta} \vec{u}_\theta = +\frac{\dot{\theta}}{\mu C} \vec{u}_\theta \mu C - \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}$$

Il s'agit bien d'une constante du mouvement.

3.b) Si on prend l'axe x origine des angles θ tel que $\vec{A} = e \vec{u}_y$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{k} \left(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right) \wedge \mu C \vec{u}_z - \vec{u}_r = \frac{1}{k} \left(-\mu C \dot{r} \vec{u}_\theta + \mu C r \dot{\theta} \vec{u}_r \right) - \vec{u}_r \\ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{r} &= \frac{\mu C r \dot{\theta}}{k} r - r = \frac{\mu C^2}{k} - r = -e r \cos(\theta) \Rightarrow r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \end{aligned}$$

Ainsi, la trajectoire est une conique de paramètre $p = \frac{\mu C^2}{k}$.

4) Méthode des formules de Binet :

4.a) On pose $\xi(\theta) = \frac{1}{r}$. On exprime les dérivées successives

$$\xi' = \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{d\frac{1}{r}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{C}$$

et

$$\xi'' = \frac{d\xi'}{d\theta} = -\frac{1}{C} \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{C} \ddot{r} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{r^2}{C^2} \ddot{r}$$

Comme la projection suivant \vec{u}_r de l'accélération est :

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^2} \xi'' - r \frac{r^4 \dot{\theta}^2}{r^4} = -C^2 \xi^2 \xi'' - \xi^3 C^2 = -C^2 \xi^2 (\xi + \xi'')$$

Aussi, le principe fondamental de la dynamique projeté suivant \vec{u}_r donne :

$$-\mu C^2 \xi^2 (\xi + \xi'') = \frac{-k}{r^2} = -k \xi^2 \Rightarrow (\xi + \xi'') = \frac{k}{\mu C^2} = \frac{1}{p}$$

4.b) Si on prend

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \Rightarrow \xi = \frac{1 - e \cos \theta}{p} \Rightarrow \xi' = \frac{+e \sin \theta}{p} \Rightarrow \xi'' = \frac{+e \cos \theta}{p} \Rightarrow (\xi + \xi'') = \frac{1}{p}$$

L'équation d'une conique est bien solution.

5) Energie

5.a) La force dérive de l'énergie potentielle E_p telle que

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \Rightarrow dE_p = \frac{k}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -\frac{k}{r} + \text{cste} = -\frac{k}{r}$$

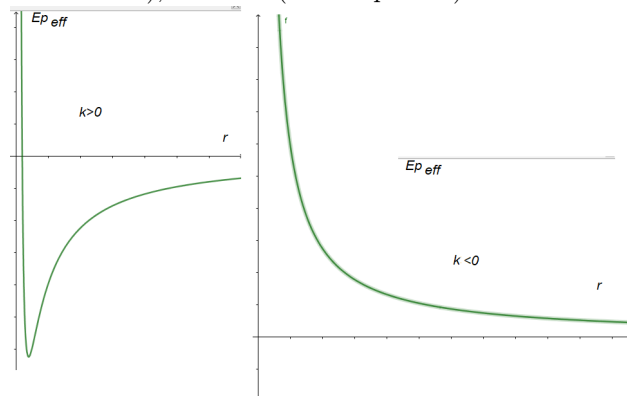
L'énergie mécanique totale du système

$$E_m = \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \frac{r^4 \dot{\theta}^2}{r^4} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$$

On peut alors la séparer en deux termes :

- l'énergie cinétique radiale : $E_{cr} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2$;
- l'énergie potentielle effective : $E_{peff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$.

5.b) Si $k > 0$ (force attractive), Si $k < 0$ (force répulsive).



Si $k < 0$ (force répulsive) : système diffusif (r peut devenir infini).

Si $k > 0$ (force attractive) :

- système diffusif (r peut devenir infini) si $E_m \geq 0$
- système lié si $E < 0$

6) Lien énergie - nature de la conique

6.a)

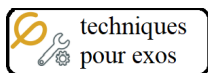
$$\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{\mu C}{k} \vec{v} \Rightarrow \vec{e}^2 = 1 + \left(\frac{\mu C}{k}\right)^2 v^2 - 2\frac{\mu C}{k} r \dot{\theta} \Rightarrow \vec{e}^2 - 1 = \left(\frac{\mu C}{k}\right)^2 \left[v^2 - 2\frac{k}{\mu C} \frac{C}{r} \right] = \left(\frac{\mu C}{k}\right)^2 \frac{2}{\mu} \left[\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{k}{r} \right]$$

soit

$$\vec{e}^2 - 1 = \left(\frac{\mu C}{k}\right)^2 \frac{2}{\mu} E_m$$

6.b)

- $E_m < 0 \Leftrightarrow |\vec{e}| < 1$: ellipse de foyer O ;
- $E_m = 0 \Leftrightarrow |\vec{e}| = 1$: parabole ;
- $E_m > 0 \Leftrightarrow |\vec{e}| > 1$: hyperbole.



Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Référentiel \mathcal{R}' non galiléen

\mathcal{R}' en translation accélérée par rapport à \mathcal{R} , galiléen

pour tous les points :

$$\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$$

La force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M) = -m a_0 \vec{u}_x$$

dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = m a_0 x$$

On ne considère pas la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = \vec{0}$$

\mathcal{R}' en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} , galiléen

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z = \overrightarrow{cst}$$

La force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M) = +m \omega^2 \overrightarrow{HM} = +m \omega^2 r \vec{u}_r$$

est axifuge (H est la projection de M sur l'axe) et dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Si M se déplace dans \mathcal{R}' , il faut considérer la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = -2m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

Effets non galiléens sur Terre

Les marées

\mathcal{R}' géocentrique en translation circulaire par rapport à \mathcal{R} héliocentrique galiléen.

- Déterminer l'accélération d'entraînement \vec{a}_e en utilisant le fait que le centre de la Terre est fixe dans \mathcal{R}' .
- Définir la force de marée comme la somme des attractions gravitationnelles et de la force d'inertie d'entraînement exercée sur une particule de masse m à la surface de la Terre.
- Montrer que l'effet de la force de marée est de générer deux "bourrelets" à la surface du globe terrestre.

Le poids

\mathcal{R}' terrestre en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} géocentrique galiléen.

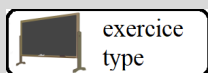
- Déterminer la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} suivant la distance à l'axe de rotation de la Terre.
- Définir le poids $m \vec{g}$ comme la somme de l'attraction gravitationnelle de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement exercée sur une particule de masse m à la surface de la Terre.
- Montrer que g est inhomogène et que $m \vec{g}$ ne pointe pas vers le centre de la Terre *a priori*.

Les effets de la force d'inertie de Coriolis (méthode des perturbations)

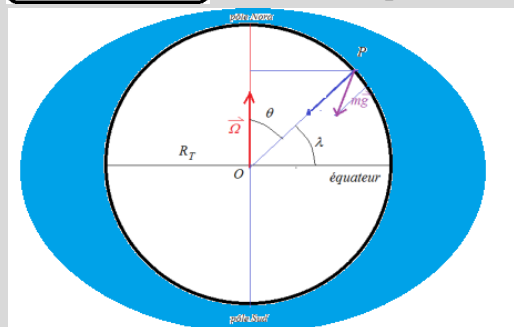
\mathcal{R}' terrestre en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} géocentrique galiléen.

- Déterminer la force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{iC} suivant la latitude (ou bien θ en coordonnées sphériques).
- Etudier le mouvement à l'ordre nul (sans \vec{f}_{iC}) pour déterminer \vec{v}_0 , la vitesse en l'absence de \vec{f}_{iC} .
- Calculer la perturbation \vec{v}_1 à l'ordre 1 opérée par

$$\vec{f}_{iC} \approx -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_0$$



Exercice 8.15 (le prof fait cet exercice type jeudi)
Mécanique dans un référentiel non galiléen (effets terrestres)



Grâce à des schémas, expliquer rapidement :

- 1) les marées,
- 2) les inhomogénéités du champ de pesanteur sur Terre,
- 3) la déviation vers l'est,
- 4) la déviation du pendule de Foucault.

1) O est fixe dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}' , donc la somme des forces est nulle :

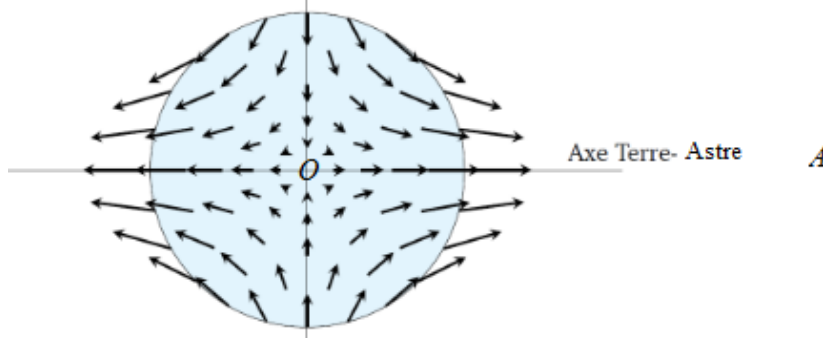
$$-G \frac{M_A M_T}{d_0^2} \vec{u}_{AO} - M_T \vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = -G \frac{M_A}{d_0^2} \vec{u}_{AO}$$

□ La force de marée au point P est :

$$\vec{f}_m = -G \frac{M_A m}{AP^2} \vec{u}_{AP} - m \vec{a}_e = -G \frac{M_A m}{AP^2} \vec{u}_{AP} + G \frac{M_A m}{d_0^2} \vec{u}_{AO}$$

Si P est plus près de A que O , \vec{f}_m est vers A et crée un bourrelet.

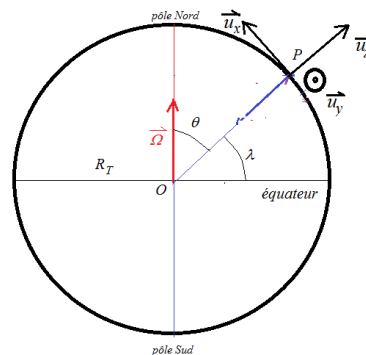
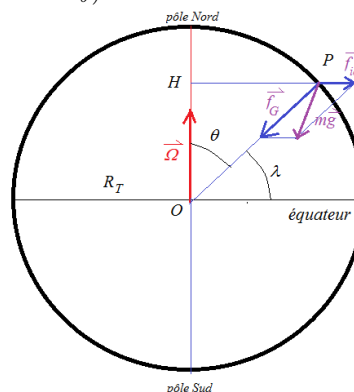
Si P est plus loin de A que O , \vec{f}_m est opposé à la direction de A et crée un bourrelet.



Comme la Terre tourne en 24 heures dans le référentiel géocentrique, il existe environ (car il faut que l'astre A soit fixe,) deux marées hautes par 24 heures.

2)

$$\vec{f}_{ie} = m \cdot R_T \cdot \cos \lambda \cdot \omega^2 \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{u}_r - \sin \lambda \cdot \vec{u}_\theta)$$



3)

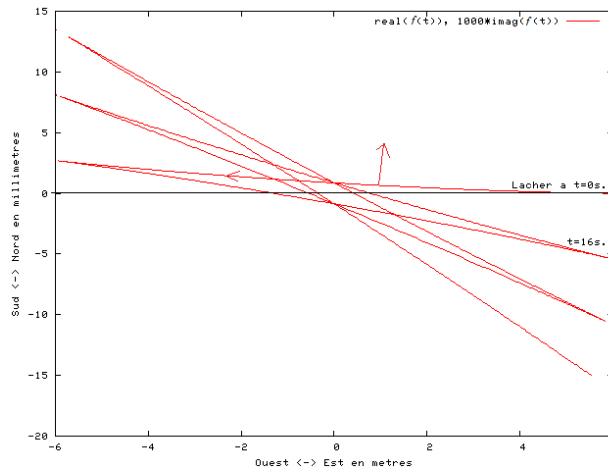
$$\vec{\Omega} = \Omega (-\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_z)$$

3.a) Le problème est à deux dimensions, dans le plan horizontal défini pour un point de la surface du globe de latitude λ : $v_z = 0$ et $\vec{f}_{iC} \cdot \vec{u}_z = 0$. On s'intéresse donc à un point matériel de masse m se déplaçant dans ce plan horizontal.

La projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f}_{iC//} = 2 \cdot m \cdot \Omega^2 \cdot \sin \lambda \cdot (v_y \cdot \vec{u}_x - v_x \cdot \vec{u}_y)$$

La projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis tend à dévier le point matériel vers la droite si l'on est dans l'hémisphère nord ($\lambda > 0$) : $\vec{f}_{iC//} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{f}_{iC//} \perp \vec{v}$ et $\vec{f}_{iC//} \wedge \vec{v} = + |\vec{f}_{iC//}| \cdot |\vec{v}| \vec{u}_z$.



3.b)

$$m \vec{a} = m \vec{g} - 2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}. \text{ Projections :}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 2 m \Omega \sin \lambda \dot{y} \\ m \ddot{y} = -2 m \Omega (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \\ m \ddot{z} = -m g + 2 m \Omega \cos \lambda \dot{y} \end{cases}$$

Au premier ordre :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -2 m \Omega \cos \lambda \dot{z} \\ m \ddot{z} = -m g \end{cases}$$

La déviation a lieu vers l'est.



Exercice 8.16 pour s'entraîner
Pendule dans un ascenseur

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical.

Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en O dans l'ascenseur. Sa longueur est $l = OM$. θ est l'angle que fait le fil avec la verticale.

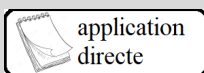
L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$.

- 1) Déterminer la période T des petites oscillations du pendule dans les cas suivants :
 - 1.a) L'ascenseur est immobile ;
 - 1.b) L'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a \cdot \vec{u}_z$;
 - 1.c) L'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a \cdot \vec{u}_z$.

1) La période T des petites oscillations se trouve en écrivant l'équation différentielle suivie par θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{(g - a_z) \cdot \sin \theta}{l} = 0, \text{ soit } T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a_z}}.$$

- 1.a) L'ascenseur est immobile : $a_z = 0 \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.
- 1.b) L'ascenseur commence à monter : $a_z = +a \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g + a}}$.
- 1.c) L'ascenseur commence à descendre : $a_z = -a \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g - a}}$.



Exercice 8.17 pour s'entraîner
Pendule dans une voiture

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un véhicule (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne horizontal uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = a \cdot \vec{u}_x$.

Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en O dans le véhicule. Sa longueur est $l = OM$. θ est l'angle que fait le fil avec la verticale (cet angle étant orienté,

avec \vec{u}_z pointant vers nous, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ étant un trièdre direct).

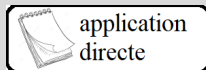
L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = g \cdot \vec{u}_y$.

- 1) Déterminer l'équation différentielle suivie par θ .
 - 2) Déterminer la position d'équilibre repérée par l'angle α que fait le fil avec la verticale.
 - 3) Quelle est la période des petites oscillations autour de α ?
- On donne $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$ et $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

$$1) \ddot{\theta} + \frac{g \cdot \sin \theta - a \cdot \cos \theta}{l} = 0.$$

$$2) \alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right).$$

$$3) T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha}}.$$



application
directe

Exercice 8.18 pour s'entraîner

Ressort vertical dans un ascenseur

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical.

On suspend en un point O de l'ascenseur un ressort de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide l_0 qui soutient un point matériel M de masse m (initialement immobile dans l'ascenseur).

L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$.

- 1) Déterminer l'altitude z de M au cours du temps :
 - 1.a) si l'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a \cdot \vec{u}_z$;
 - 1.b) si l'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a \cdot \vec{u}_z$.
- 2) Que faut-il pour transformer ce dispositif en un accéléromètre, même si M n'est pas au repos initialement ?

- 1) La période T des petites oscillations se trouve en écrivant l'équation différentielle suivie par θ :

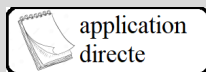
$$m \cdot \ddot{z} = m \cdot (-g - a_z) + k \cdot (-z - l_0), \text{ soit } z = z_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) - l_0 - \frac{m}{k}(g + a_z).$$

Initialement, $\dot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g)$ car $a_z = 0$. Or $z = z_0 \cdot \cos(\varphi) - l_0 - \frac{m}{k}(g) = -l_0 - \frac{m}{k}(g) \Rightarrow z_0 = 0$.

$$1.a) \text{ L'ascenseur commence à monter : } a_z = +a \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g + a).$$

$$1.b) \text{ L'ascenseur commence à descendre : } a_z = -a \Rightarrow z = -l_0 - \frac{m}{k}(g - a).$$

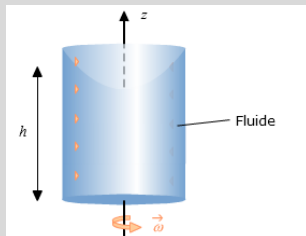
- 2) Même si M n'est pas au repos initialement, on peut, grâce à des frottement fluides retrouver les mêmes résultats si $t \rightarrow \infty$. Aussi, l'axe z peut être gradué pour a_z .



application
directe

Exercice 8.19 pour s'entraîner

Fluide en rotation



Soit un vase de rayon R contenant un liquide dont la surface libre est initialement à la hauteur h . On fait tourner le vase autour de son axe Oz à la vitesse angulaire ω .

- 1) Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement ?
- 2) En déduire l'équation de la surface libre du liquide.

- 1) Si $\vec{f}_{ie} = m r \omega^2 \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m \cdot r \cdot \omega^2 \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow dE_p = -m r \omega^2 dr$ qu'on peut intégrer en

$$E_p = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

qui est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement.

2) A la surface libre du liquide l'énergie mécanique est constante, avec une énergie cinétique nulle et une énergie potentielle de pesanteur $E'_p = m g z$. Donc

$$m g z - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = cste \Leftrightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + cste$$

La forme est un paraboloïde de révolution autour de Oz .



application
directe

Exercice 8.20 pour s'entraîner Forces d'inertie sur un manège

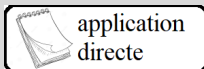
On s'intéresse à un manège qui tourne à une vitesse angulaire ω par rapport à un référentiel galiléen autour de son axe fixe Oz .

1) Déterminer la force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m à une distance r de l'axe. Quel est son effet ?

2) Quel est l'effet de la force d'inertie de Coriolis ressentie par un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse \vec{v} horizontale ?

$\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\vec{u}_r$. La force d'inertie est donc centrifuge.

La force d'inertie de Coriolis tend à faire tourner le point matériel vers la droite si le manège tourne dans le sens trigonométrique, vers la gauche si le manège tourne dans le sens horaire.



application
directe

Exercice 8.21 pour s'entraîner Avion "zéro g"

On suppose que l'intensité du champ de pesanteur est constante et vaut $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) Pour entraîner à l'impesanteur, un avion "zéro g" est, pendant une phase de durée Δt , en chute libre. Montrer que les passagers sont alors en impesanteur.

2) Quelle est alors la trajectoire de l'avion (assimilé à un point matériel) pendant cette phase ?

3) L'altitude maximale de l'avion est $h = 9000 \text{ m}$. Quelle est la durée maximale Δt_{max} ?

1) Dans le référentiel de l'avion (R') en mouvement de translation uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$), les forces d'inertie d'entraînement qui s'appliquent à une particule de masse m sont $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a} = -m\vec{g} = -\vec{P}$: elles compensent le poids.

2) La trajectoire de l'avion est une parabole :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

qu'on intègre une fois :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

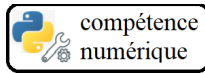
puis une autre fois

$$\begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

3) Si le sommet est en $x = 0$ à $t = 0$, à l'altitude $h = z_0$ donc, il s'agit de chercher la date $t = \pm \frac{\Delta t}{2}$ pour laquelle $z = 0$, soit

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 = h \Leftrightarrow \frac{\Delta t_{max}}{2} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

soit $\Delta t_{max} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2 \times 9000}{10}} = 84 \text{ s}$.



Exercice 8.22 (le prof présente les résultats jeudi) Déviation vers l'est

Extrait de l'aide fournie au concours CentraleSupélec

Pour résoudre une équation différentielle $x' = f(x, t)$, on peut utiliser la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`. Cette fonction nécessite une liste de valeurs de t , commençant en t_0 , et une condition initiale x_0 . La fonction renvoie des valeurs approchées (aux points contenus dans la liste des valeurs de t) de la solution x de l'équation différentielle qui vérifie $x(t_0) = x_0$. Pour trouver des valeurs approchées sur $[0, 1]$ de la solution $x'(t) = tx(t)$ qui vérifie $x(0) = 1$, on peut employer le code suivant.

```
[ ] def f(x, t) :
    return t*x
T = np.arange(0, 1.01, 0.01)
X = integr.odeint(f, 1, T)
X[0]

array([1.])
```

```
[ ] X[-1]

array([1.64883123])
```

```
[ ] plt.plot(T,X)
plt.show()
```

Pour résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 de solution x , on demandera la résolution du système différentiel d'ordre 1 satisfait par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

Exemple de code python à adapter

On veut résoudre numériquement une équation différentielle du second ordre sur y . Par exemple $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$, qui peut se ré-écrire $\ddot{y} = -\frac{b}{a}\dot{y} - \frac{c}{a}y + \frac{g(t)}{a} = f(y, \dot{y}, t)$.

```
# ouverture des bibliothèques nécessaires
import numpy as np          # pour les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques
from scipy.integrate import odeint # pour odeint

# système différentiel à résoudre
def systDiff(X,t):
    # X = vecteur de dimension 2:
    y=X[0]    # y
    dy=X[1]   # dy/dt
    # equation différentielle
    d2y= -b/a*dy-c/a*y+g(t)/a    # d²y/dt²
    # La fonction renvoie la dérivée du vecteur X
    return np.array([dy, d2y])
```

Il faudra alors appeler `odeint(systDiff, Xi, t)` avec comme paramètres :

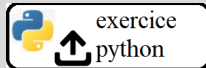
- le système différentiel `systDiff` tel que $\frac{d}{dt}X = f(X, t)$ pour le vecteur $X = (y, dy/dt)$,
- la condition initiale $X(t = t_i) = X_i = (y(t = t_i), dy/dt(t = t_i))$,
- le tableau des dates t

`odeint` va renvoyer un tableau S de même nombre de lignes que t , avec deux colonnes : $(dy/dt, d^2y/dt^2)$.

```
# Définition des conditions initiales
y_0=          # valeur initiale de y
dy_0=        # valeur initiale de dy/dt
CI = [y_0,dy_0]

# tableau des dates
t_i=          # date initiale
t_f=          # date finale
delta_t=      # écart entre deux dates
Dates=np.arange(t_i,t_f,delta_t)

# La résolution
X_odeint = odeint(systDiff, CI, Dates)
X_euler = euler(systDiff, CI, Dates)
Y = X_odeint[:,0]          # extraction des valeurs des y(t)
dY = X_odeint[:,1]       # extraction des valeurs des dy/dt(t)
```



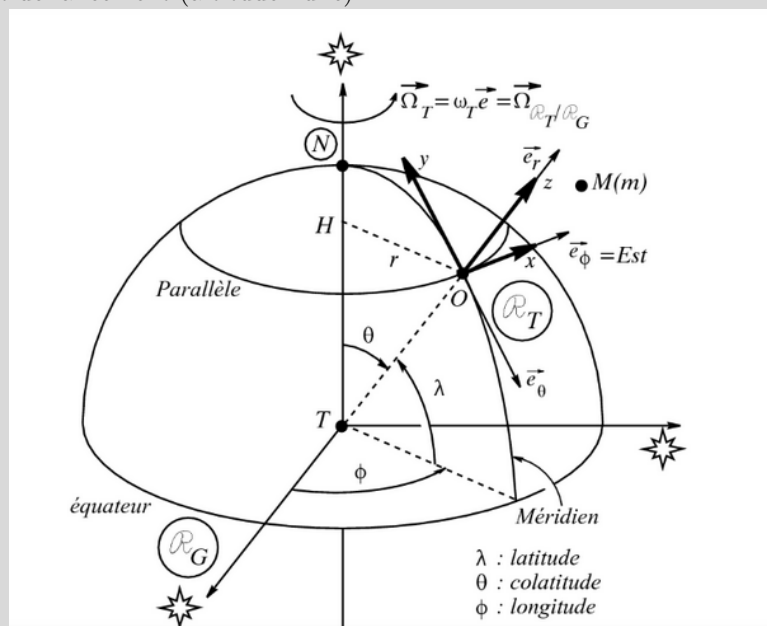
Exercice 8.22 (code python à téléverser avant dimanche 24h sur cahier de prépas) Déviation vers l'est

La déviation vers l'est est un phénomène physique correspondant au fait qu'un corps en chute libre ne suit pas exactement la direction de la pesanteur, mais est légèrement dévié vers l'est par la force de Coriolis résultant de la rotation de la Terre. Ce phénomène a été mis en évidence par Ferdinand Reich en 1833. Reich fit tomber des projectiles dans un puits de mine de 158 m de profondeur à Freiberg (Allemagne : latitude $50^{\circ}54'$ N, longitude $13^{\circ}20'$ E). Il observa une déviation de 28 mm vers l'est.

(Extrait Wikipedia)

Le référentiel géocentrique sera considéré comme galiléen et la terre supposée à symétrie sphérique. On assimilera le champ de pesanteur au champ gravitationnel, ce qui revient à dire que la verticale d'un lieu passe par le centre de la Terre.

On choisira pour base locale du référentiel terrestre, un trièdre dont l'axe des x pointe vers l'Est, l'axe des y vers le Nord et l'axe des z est la verticale du lieu et on le centrera sur le point O situé sur la surface terrestre à la verticale du point de lancement (altitude nulle).



1) Préparation

On néglige la force de frottement due à l'air. On assimile le projectile à un point matériel lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 158$ m, d'un point sur la Terre de latitude $50^{\circ}54'$ N. La rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique (considéré galiléen) a lieu pendant le "jour sidéral" dont la durée est de 86164 s.

- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel et le projeter sur les axes x, y, z .
- Ouvrir les bibliothèques nécessaires.
- Entrer les grandeurs physiques dont on aura besoin.
- Réécrire les équations sans la force de Coriolis et les résoudre (ordre 0).

2) Méthode des perturbations

Compte tenu des ordres de grandeur mesurés par Reich et des équations à l'ordre zéro, on peut considérer que $|dz/dt| \gg |dx/dt|$ ou $|dy/dt|$

- Montrer qu'alors une expression analytique de la solution est possible :

$$z = -(1/2)gt^2 + h \text{ et } x = (1/3)gt^3 \omega \cos \lambda$$

- Tracer avec Python la courbe trajectoire $z(x)$ à l'ordre 1 et la superposer à la solution d'ordre zéro.

3) Tracé en prenant en compte tous les termes de l'équation différentielle : résolution numérique

On va faire appel à la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** pour une résolution numérique.

- Résoudre le système d'équations différentielles avec **odeint** et tracer la trajectoire $z(x)$ en la superposant à la solution d'ordre zéro et à celle d'ordre 1.
- Conclure sur la pertinence du calcul par la méthode des perturbations.
- Pour terminer, tracer aussi la courbe donnant la déviation dans la direction Nord-Sud : $z(y)$

1) Préparation

Si λ est la latitude, le principe fondamental de la dynamique projeté suivant les trois axes donne le système :

$$\begin{cases} a_x = -2\Omega \cos(\lambda) v_z + 2\Omega \sin(\lambda) v_y \\ a_y = -2\Omega \sin(\lambda) v_x \\ a_z = -g + 2\Omega \cos(\lambda) v_x \end{cases}$$

A l'ordre 0 (sans la force de Coriolis) :

$$\begin{cases} a_{x_0} = 0 \\ a_{y_0} = 0 \\ a_{z_0} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{x_0} = 0 \\ v_{y_0} = 0 \\ v_{z_0} = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} a_{x_1} = -2\Omega \cos(\lambda) v_{z_0} + 2\Omega \sin(\lambda) v_{y_0} = +2\Omega \cos(\lambda) gt \\ a_{y_1} = -2\Omega \sin(\lambda) v_{x_0} = 0 \\ a_{z_1} = +2\Omega \cos(\lambda) v_{x_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{x_1} = \Omega \cos(\lambda) gt^2 \\ v_{y_1} = 0 \\ v_{z_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda) gt^3 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

A l'ordre 2 :

$$\begin{cases} a_{x_2} = -2\Omega \cos(\lambda) v_{z_1} + 2\Omega \sin(\lambda) v_{y_1} = 0 \\ a_{y_2} = -2\Omega \sin(\lambda) v_{x_1} = -2\Omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) gt^2 \\ a_{z_2} = +2\Omega \cos(\lambda) v_{x_1} = +2\Omega^2 \cos^2(\lambda) gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{x_2} = 0 \\ v_{y_2} = -\frac{2}{3}\Omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) gt^3 \\ v_{z_2} = +\frac{2}{3}\Omega^2 \cos^2(\lambda) gt^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -\frac{1}{6}\Omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda) gt^4 \\ z_2 = +\frac{1}{6}\Omega^2 \cos^2(\lambda) gt^4 \end{cases}$$

```

import numpy as np # bibliothèque numpy pour définir les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # bibliothèque matplotlib.pyplot pour les graphes
from scipy.integrate import odeint # impératif pour que la fonction odeint soit opérationnelle

# constantes:
g=9.81 # champ de pesanteur en m/s²
jour_sideral=86164 # valeur en s
# paramètres modifiables :
latitude_degre=50.+54./60.
h=158 #hauteur de chute en m

# Calculs préliminaires et définition du tableau temps:
omega_terre=2*np.pi/jour_sideral # vecteur rotation de la terre en rad/s
latitude=latitude_degre/180*np.pi # latitude en rad
ttot=np.sqrt(2*h/g) # calcul de la durée de chute
N_points=100 # nombre de points des tableaux
Dates=np.linspace(0,ttot,N_points) # création du tableau des temps

# A L'ORDRE ZERO, C'EST A DIRE SANS LA FORCE DE CORIOLIS : solution analytique
Z_0=-1/2*g*Dates**2+h #création du tableau des coordonnées z(t)=-1/2gt²+h
X_0=np.zeros(N_points) #création du tableau des coordonnées x(t) toutes nulles à l'ordre zéro
Y_0=np.zeros(N_points) #création du tableau des coordonnées y(t) toutes nulles à l'ordre zéro

```

2) Méthode des perturbations

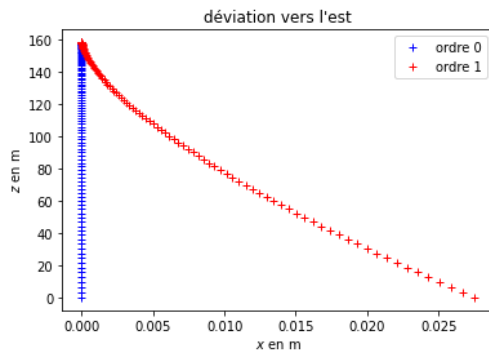
```

# A L'ORDRE UN, C'EST A DIRE AVEC LA FORCE DE CORIOLIS : solution analytique
Z_1=Z_0+np.zeros(N_points) #création du tableau des coordonnées z(t)
X_1=X_0+1/3*g*omega_terre*np.cos(latitude)*Dates**3 #création du tableau des coordonnées x(t) à l'ordre 1
Y_1=Y_0+np.zeros(N_points) #création du tableau des coordonnées y(t) à l'ordre 1

# Tracé des graphiques
plt.clf() # pour effacer les graphiques précédents
plt.plot(X_0,Z_0,'b+',label="ordre 0") # tracé du graphe à l'ordre 0
plt.plot(X_1,Z_1,'r+',label="ordre 1") # tracé du graphe à l'ordre 1
plt.legend()
plt.title("déviations vers l'est")
plt.xlabel("$x$ en m") # abscisses
plt.ylabel("$z$ en m") # ordonnées
plt.show() # affichage

deviation=X_1[99]
print(f"La déviation vers l'est au bout de la chute d'une hauteur h={h} m est {deviation:.2e} m\n")

```



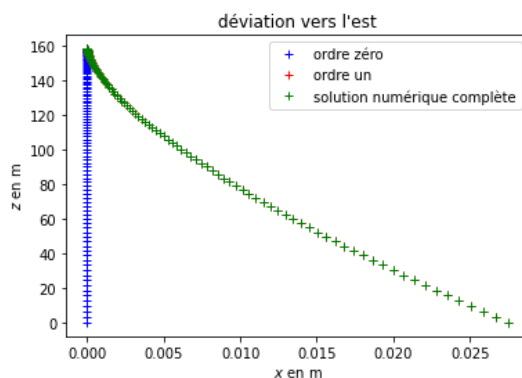
La déviation vers l'est au bout de la chute d'une hauteur $h=158$ m est $2.75e-02$ m

3) Tracé en prenant en compte tous les termes de l'équation différentielle : résolution numérique

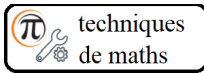
```
def equations(Vecteur,t):
    # t est la date et Vecteur est un vecteur à 6 composantes:
    x=Vecteur[0] # x
    y=Vecteur[1] # y
    z=Vecteur[2] # z
    vx=Vecteur[3] # dx/dt
    vy=Vecteur[4] # dy/dt
    vz=Vecteur[5] # dz/dt
    ax=-2*omega_terre*np.cos(latitude)*vz+2*omega_terre*np.sin(latitude)*vy # d²x/dt²
    ay=-2*omega_terre*np.sin(latitude)*vx # d²y/dt²
    az=-g+2*omega_terre*np.cos(latitude)*vx # d²z/dt²
    return(np.array([vx,vy,vz,ax,ay,az])) # renvoie la dérivée de Vecteur

[5] CI=[0,0,h,0,0,0] # conditions initiales
SolComplete=odeint(equations,CI,Dates) #résolution du système d'équations
X_num=SolComplete[:,0] # extraction des x
Y_num=SolComplete[:,1] # extraction des y
Z_num=SolComplete[:,2] # extraction des z

plt.clf()
plt.plot(X_0,Z_0,'b+',label='ordre zéro') #tracé du graphe à l'ordre 0
plt.plot(X_1,Z_1,'r+',label='ordre un') #tracé du graphe à l'ordre 1
plt.plot(X_num,Z_num,'g+',label='solution numérique complète') #tracé du graphe avec odeint
plt.legend()
plt.title("déviation vers l'est")
plt.xlabel('$x$ en m')
plt.ylabel('$z$ en m')
plt.show()
```



La solution d'ordre 1 et la solution numérique se superposent avec l'échelle affichée.



Techniques mathématiques à maîtriser
Les repères utilisés par les physiciens

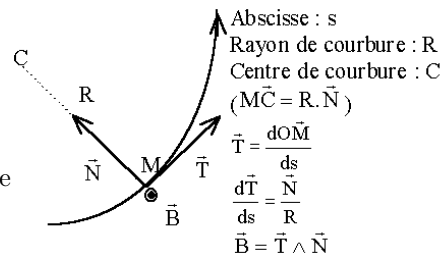
Repère de Frénet

Vecteurs de base : $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

Position : repérée par l'abscisse s

Vitesse : $\vec{v} = \dot{s} \vec{T}$

Accélération : $\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.



Repère cartésien

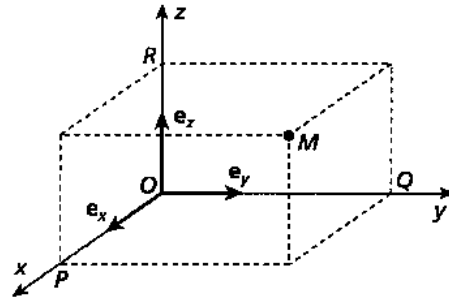
Vecteurs de base : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Position : $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$

Accélération : $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$

Elément de volume : $d^3\tau = dx dy dz$



Repère cylindrique

Expression dans le repère cartésien :

$$\left. \begin{matrix} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \\ z = z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{matrix} \right.$$

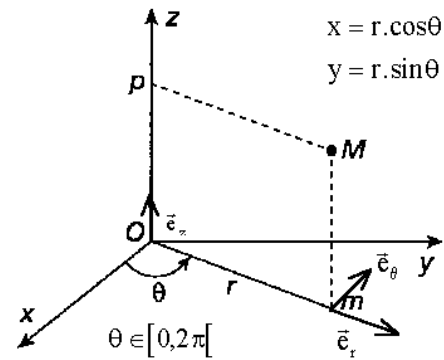
Vecteurs de base : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Position : $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$

Accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$

Elément de volume : $d^3\tau = dr (r d\theta) dz$



Repère sphérique

Expression dans le repère cartésien :

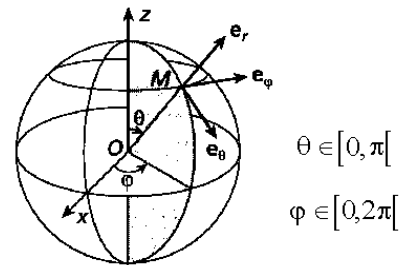
$$\left\{ \begin{matrix} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{matrix} \right.$$

Vecteurs de base : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Position : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$

Elément de volume : $d^3\tau = dr (r d\theta) (r \sin \theta d\varphi)$



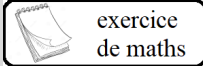
Généralisation

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

Généralisation pour les repères

Déplacement élémentaire : $\vec{d\ell} = \sum_i \mu_i ds_i \vec{u}_i$

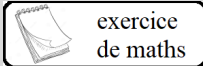
Elément de volume : $d^3\tau = \prod_i \mu_i ds_i$

exercice
de maths**Exercice 8.23** pour s'entraîner**Calcul d'un volume en coordonnées cartésiennes**

- 1) Calculer le volume d'un parallélépipède de côté a suivant x , b suivant y et c suivant z .

1)

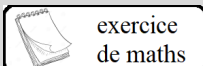
$$V = \iiint d^3\tau = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=0}^{z=c} dx dy dz = abc$$

exercice
de maths**Exercice 8.24** pour s'entraîner**Calcul d'un volume en coordonnées cylindriques**

- 1) Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

1)

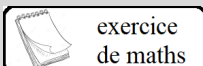
$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} dr r d\theta dz = \pi R^2 h$$

exercice
de maths**Exercice 8.25** pour s'entraîner**Calcul d'un volume en coordonnées sphériques**

- 1) Calculer le volume d'une sphère de rayon R .

1)

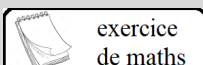
$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr r d\theta r \sin\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

exercice
de maths**Exercice 8.26** pour s'entraîner**Calcul d'une surface en coordonnées sphériques**

- 1) Calculer la surface d'une sphère de rayon R .

1)

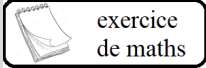
$$S = \iint d^2S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r d\theta r \sin\theta d\varphi = 4\pi R^2$$

car $r = R$ ici.exercice
de maths**Exercice 8.27** pour s'entraîner**Calcul d'une surface en coordonnées cylindriques**

- 1) Calculer la surface d'un disque de rayon R .

1)

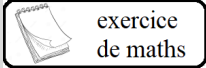
$$S = \iint d^2S = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr r d\theta = \pi R^2$$

exercice
de maths**Exercice 8.28** pour s'entraîner**Calcul d'une autre surface en coordonnées cylindriques**

- 1) Calculer la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

1)

$$S = \iint d^2S = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} r \, d\theta \, dz = 2\pi R h$$

avec $r = R$.exercice
de maths**Exercice 8.29** pour s'entraîner**Calcul d'un autre volume en coordonnées sphériques**

- 1) Calculer le volume d'un hémisphère de rayon R .

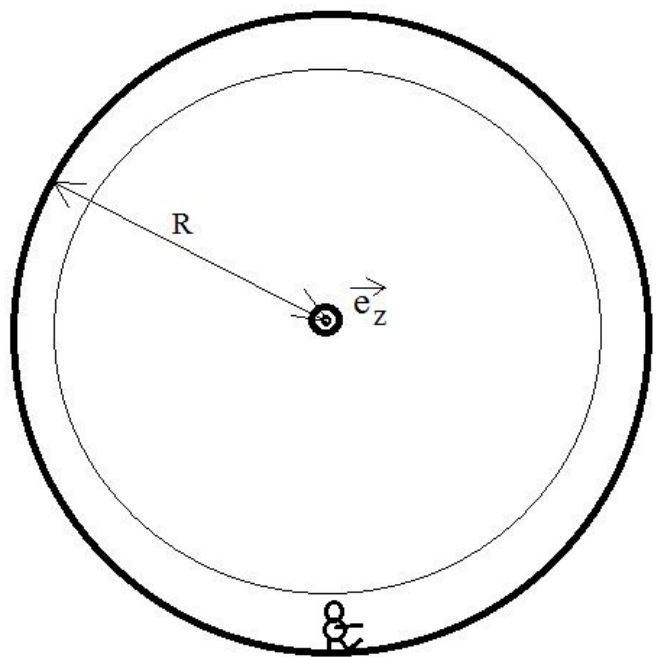
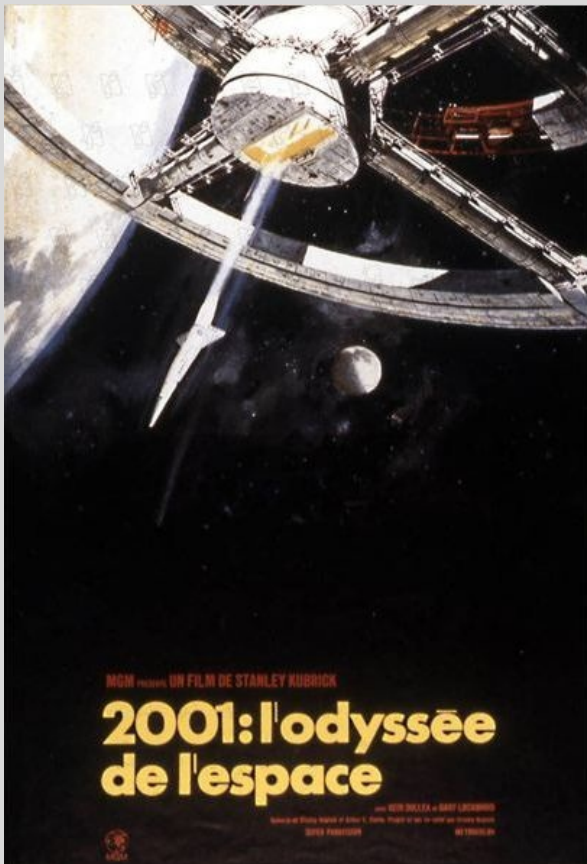
1)

$$V = \iiint d^3\tau = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr \, r \, d\theta \, r \sin \theta \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi R^3$$

? \ exercice
de colle

Exercice 8.30

La pesanteur artificielle dans le vaisseau de "2001 - l'Odysée de l'Espace"

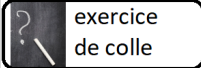


A gauche : affiche du film où l'on voit le vaisseau spatial et schéma (à droite) du vaisseau.

Dans le film "2001 l'odyssée de l'espace" de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore de rayon R tourne autour de son axe Oz avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$ constante dans un référentiel galiléen.

1) Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre : ils sont soumis à une gravité artificielle. Evaluer les valeurs numériques de R et de ω pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, à 10% près entre les pieds et la tête.

2) Dans une des scènes du film, un astronaute (Poole) fait un jogging dans le tore. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant pour Poole de courir dans la station spatiale (on choisira des valeurs numériques pour illustrer le raisonnement). Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?

exercice
de colle**Exercice 8.31**
Ascenseur pour l'espace

Un concept d'ascenseur spatial, qui pourrait remplacer les fusées (DR)

Imaginez une tour Eiffel géante, s'élevant jusqu'à 35.000 kilomètres d'altitude. Un tel monument d'acier ne pourrait exister que dans un roman steampunk, mais à l'époque, à la fin du XIXe siècle, l'idée a effleuré Constantin Tsiolkovsky, pionnier de l'aéronautique russe, en observant la tour Eiffel, la vraie. Ce premier concept d'ascenseur spatial a été raffiné dans les années 60 et 70, et aujourd'hui, il s'agirait davantage d'un très long câble arrimé d'un côté à la Terre (au niveau de l'équateur), de l'autre à un gros contre poids dans l'espace. Entre les deux, à peu près au niveau de l'orbite géostationnaire, on pourrait installer une station spatiale d'arrivée.

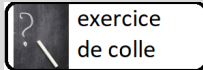
<https://leplus.nouvelobs.com/contribution/1551464->

[abandonner-les-fusees-et-construire-un-ascenseur-vers-l-espace-une-idee-pas-si-folle.html](https://leplus.nouvelobs.com/contribution/1551464-abandonner-les-fusees-et-construire-un-ascenseur-vers-l-espace-une-idee-pas-si-folle.html)

1) Estimer la hauteur d'une tour, placée verticalement à l'équateur, telle que son poids soit nul.

On donne :

- pesanteur au sol : $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$.



exercice
de colle

Exercice 8.32 Les marées



On donne : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, le rayon de la Terre : $R_T = 6,36 \cdot 10^3 \text{ km}$, $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la masse de la Lune : $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$, et du Soleil : $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, la distance Terre-Lune : $d_L = 1,28 \text{ s} \cdot \text{lumière}$, et Terre-Soleil : $d_S = 8 \text{ mn } 19 \text{ s} \cdot \text{lumière}$.

On fait l'approximation que Terre, Soleil et Lune sont dans le même plan (celui de l'écliptique) et que l'axe des pôles est perpendiculaire au plan de l'écliptique (le pôle Nord sera au dessus des plans des dessins).

1) Phénomène des marées

On considère O , le centre de la Terre et M , un point situé à sa surface. \vec{i} pointe vers la Lune et \vec{j} vers le Soleil. Soit $\vec{A}_L(P)$, le champ gravitationnel de la lune au point P . On appelle champ de marée de la Lune en M (repéré par θ), la grandeur : $\vec{g}_L(M) = \vec{A}_L(M) - \vec{A}_L(O)$.

1.a) Exprimer $\vec{g}_L(M)$ en fonction de G , M_L , R_T , d_L , θ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

1.b) Montrer que le champ de marée est négligeable devant le champ de pesanteur terrestre.

1.c) On suppose que la Terre est recouverte par les océans. Schématiser la répartition de la couche d'eau sur Terre. Montrer que la périodicité de la marée est à peu près de 12h sur Terre.

1.d) Donner une expression du champ de marée dû au Soleil $\vec{g}_S(M)$ en fonction de G , M_S , R_T , d_S , θ dans la base (\vec{i}', \vec{j}') .

1.e) Comparer ce champ de marée à celui de la Lune.

1.f) Montrer qu'il existe des marées de morte-eau (amplitude minimale) et de vive-eau (amplitude maximale), et que la variation de l'amplitude des marées suit un cycle lunaire.

2) Effet des marées sur la distance Terre-Lune

La Terre est supposée sphérique, de rayon R_T , de masse M_T , de moment d'inertie par rapport à l'axe polaire $J_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2$. Elle a (dans le référentiel géocentrique) un mouvement de rotation uniforme de vecteur $\vec{\Omega}_T$. G est la constante de gravitation universelle.

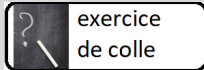
On considère (très grossièrement) la Lune comme ponctuelle, ayant (dans le référentiel géocentrique) un mouvement circulaire uniforme de pulsation ω (de période $T \approx 28j$) autour de la Terre, dans le plan équatorial de la Terre, et dans le même sens que la rotation de la Terre (la Lune est à une distance r du centre de la Terre).

2.a) Montrer que $r^3 \omega^2$ est une constante que l'on exprimera.

2.b) On considère le système Terre-Lune comme isolé. Exprimer la conservation du moment cinétique de ce système en fonction des données du problème.

A cause de l'énergie dissipée par les marées, le vecteur rotation de la Terre diminue.

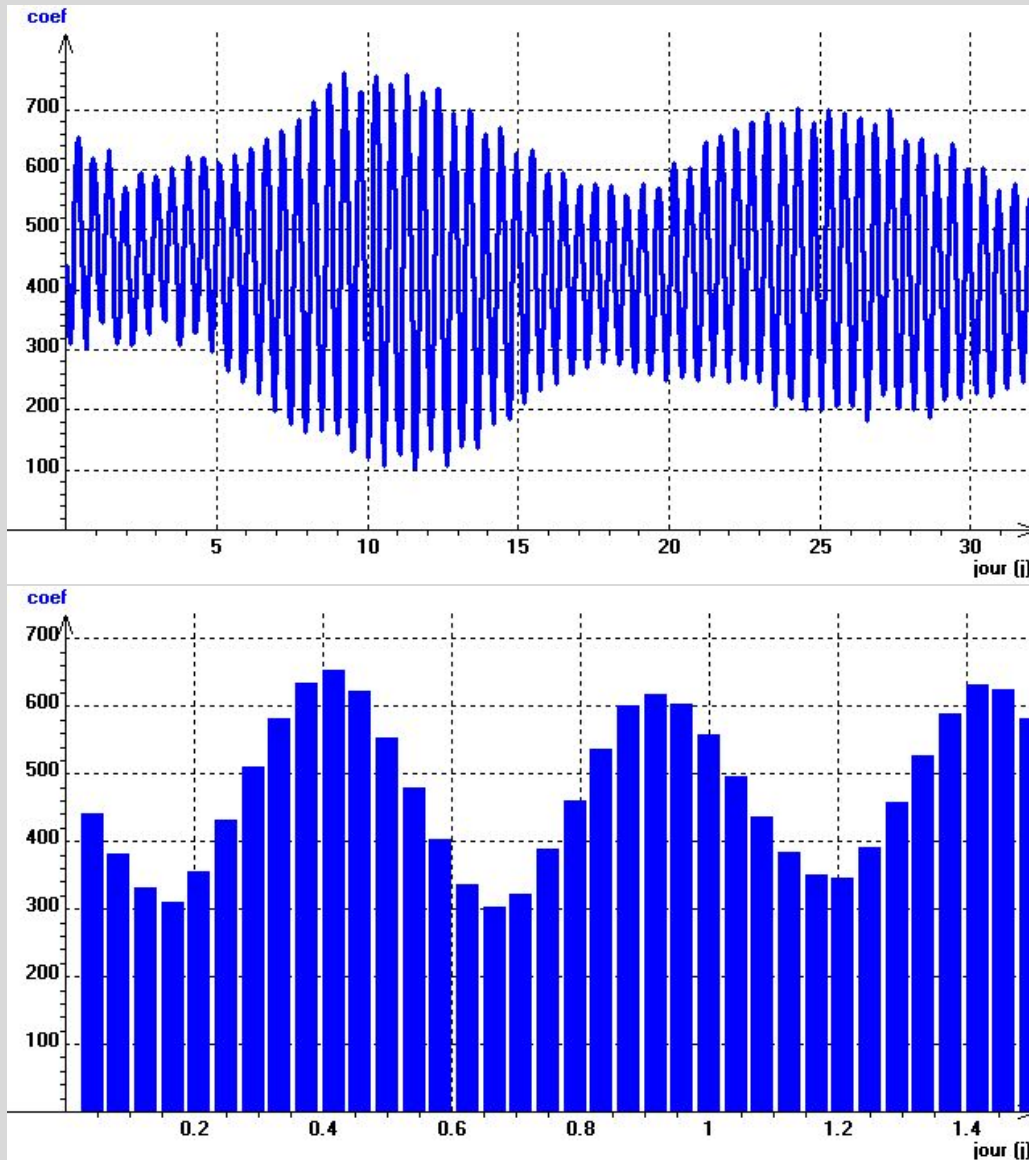
2.c) Comment varie donc la distance Terre-Lune? Et la durée du mois lunaire?



exercice
de colle

Exercice 8.33 Etude des marées à Brest

Les figures qui suivent présentent quelques courbes représentant la hauteur de la mer observée à Brest en 2001.



On supposera le référentiel géocentrique galiléen et quasi fixe dans le référentiel héliocentrique. Les plans de l'équateur, de l'écliptique et du mouvement de la lune seront identifiés à celui des schémas à tracer.

Brest (B) sur les schémas sera pris pour plus de commodité sur l'équateur.

On notera $T_T = 1$ jour, la période de rotation de la Terre et T_L la période de la lunaison.

1) Méthode n°1 : perturbation de la période des marées

1.a) Faire un schéma qui représente la Terre avec Brest, entourée d'océan et la Lune aux dates $t = t_0$, $t = t_0 + T_L$ et $t = t_0 + 2T_L$, où T_L est la période de la marée.

1.b) En déduire que $\frac{1}{2T_1} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_L}$.

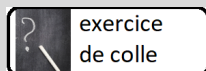
1.c) Grâce aux documents, en déduire T_L par cette première méthode.

2) Méthode n°2 : modulation de l'amplitude des marées

2.a) Faire un schéma qui représente la Terre avec Brest, entourée d'océan, le Soleil et la Lune au premier quartier, à la pleine lune, au dernier quartier et à la nouvelle lune.

2.b) Quand y a-t-il vive eaux (amplitude forte de la marée) et morte eaux (amplitude faible de la marée)? En déduire que l'amplitude de la marée est modulée par une fonction dont on précisera la période.

2.c) Grâce aux documents, en déduire T_L par cette seconde méthode.



Exercice 8.34 Les bases de lancement des fusées

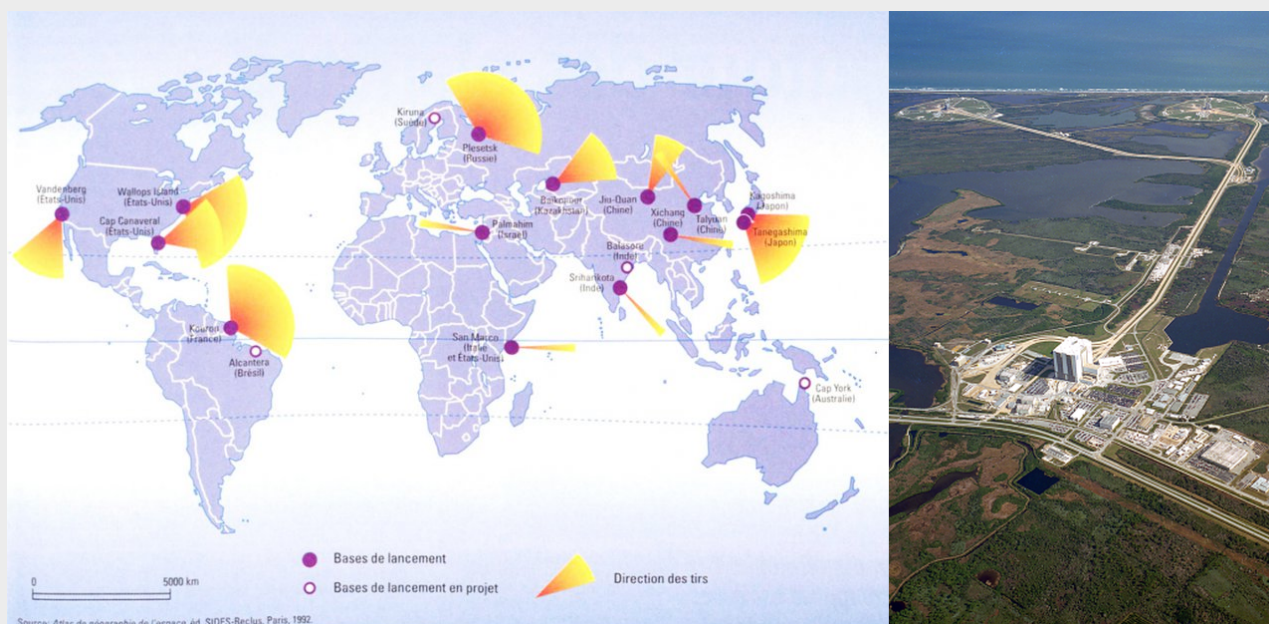


Illustration :

à gauche : les bases de lancement dans le monde (Le Monde diplomatique - 1994 « En quête du site idéal pour les bases de lancement »).

à droite : le complexe de lancement 39 de la NASA fait partie du Centre spatial Kennedy et est situé à Merritt Island en Floride (États-Unis). Photographie NASA - Domaine public, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6449211>.

Les principales bases de lancement des fusées et leurs latitudes sont les suivantes :

- Cap Canaveral : $\lambda = 28^\circ N$;
- Baïkonour : $\lambda = 49^\circ N$;
- Kourou : $\lambda = 5^\circ N$.

NB : Le site de Baïkonour n'est pas au bord de la mer, mais en plein désert.

Cet exercice propose de discuter du positionnement optimal des bases de lancement des fusées sur le globe terrestres.

1) Composition des vitesses :

R est le référentiel géocentrique, lié au centre de la Terre, dont les axes pointent vers trois étoiles fixes. R' est le référentiel terrestre, lié à la Terre.

1.a) Calculer la vitesse d'entraînement en un point de la surface de la Terre de latitude λ et de longitude φ .

1.b) On lance, dans R' , verticalement la fusée. A quel endroit du globe la vitesse de la fusée sera-t-elle la plus grande dans R ?

2) Effets de la force d'inertie d'entraînement :

2.a) Calculer, en fonction de la latitude λ et de la longitude φ , la force d'inertie d'entraînement à prendre en compte dans R' .

2.b) En considérant le champ gravitationnel comme constant à la surface de la Terre, où vaut-il mieux lancer les fusées ?

3) Conclusion :

Justifier la direction de tir des fusées à partir de l'illustration. Discuter du meilleur positionnement pour une base de lancement de fusées.

?
exercice
de colle

Exercice 8.35 Etude du pendule de Foucault



L'expérience du pendule de Léon Foucault au Panthéon de Paris, en 1851 "La Nature", 1887, 2e semestre. Paris, Conservatoire
© - Photo Centre national des arts et métiers - bibliothèque

On assimile le pendule de Foucault à un pendule simple constitué d'un fil (de masse négligeable) de longueur $L = 67$ m fixé en un point P au bout duquel une masse ponctuelle M est suspendue. L'attache du fil est fabriquée de manière à assurer au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. On suppose que le système est tel que les frottements et dissipations puissent être négligés en première approximation et que le fil est parfaitement rigide.

On se place dans le cas des petites oscillations du pendule de Foucault et on pourra ainsi considérer que la trajectoire du point M est horizontale. De plus, on considérera que le pendule, lâché sans vitesse initiale dans le référentiel terrestre a aussi une vitesse initiale quasi nulle dans le référentiel géocentrique, car la vitesse d'entraînement proche du pôle est faible.

Au voisinage d'un point P fixe à la surface de la Terre (à Paris, de latitude $\lambda = 4851' = \frac{\pi}{2} - \theta$ où θ est l'angle compté à partir du pôle Nord), on définit un repère orthonormé direct $(P, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, avec \vec{u}_x et \vec{u}_y dans le plan horizontal, \vec{u}_z vertical vers le haut, \vec{u}_x dirigé vers le Nord et \vec{u}_y vers l'Ouest. On notera (x, y, z) les coordonnées d'un point matériel M , et on considérera le mouvement de M comme horizontal ($z = cste$). On supposera que

- la Terre est sphérique, de centre O , de rayon $R = 6400$ km ;
- la pesanteur est assimilée à l'attraction gravitationnelle de la Terre, l'accélération de la pesanteur est homogène à la surface de la Terre, dirigée vers O , de valeur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- le référentiel géocentrique est galiléen et le référentiel terrestre est, dans le référentiel géocentrique, en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe polaire, avec une période proche de 24 heures.

1) Position du problème

1.a) Faire un schéma où apparaîtront en particulier O , P , \vec{u}_x , \vec{u}_z et \vec{u}_y , ce dernier vecteur étant orthogonal au plan du schéma.

1.b) Donner l'expression, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la Terre dans le référentiel géocentrique.

1.c) En déduire l'expression de la force d'inertie de Coriolis dans le cas du mouvement horizontal d'un point matériel M au voisinage de P .

1.d) Montrer que la projection verticale de la force d'inertie de Coriolis est négligeable devant le poids du mobile.

2) Étude qualitative

2.a) Quel est l'effet de cette force d'inertie de Coriolis sur le mouvement horizontal d'un point matériel M au voisinage de P ?

2.b) Dans le repère terrestre, faire un schéma de la trajectoire de ce point matériel M .

2.c) Conclure sur le mouvement apparent (dans le référentiel terrestre) du plan d'oscillation du pendule de Foucault.

3) Étude quantitative

3.a) Montrer que la tension appliquée par le fil sur le point M peut s'écrire $\vec{T}_f = \frac{T_f}{L} (-x\vec{u}_x - y\vec{u}_y + L\vec{u}_z)$. On définira T_f .

3.b) Montrer que les équations suivies par les coordonnées du point M sont

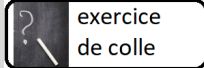
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \alpha \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - \alpha \dot{x} \end{cases}$$

On donnera ω et α en fonction de L , g , Ω et λ .

3.c) Quelle est l'équation différentielle suivie par $f = x + iy$? En quoi a-t-on découplé les précédentes équations ?

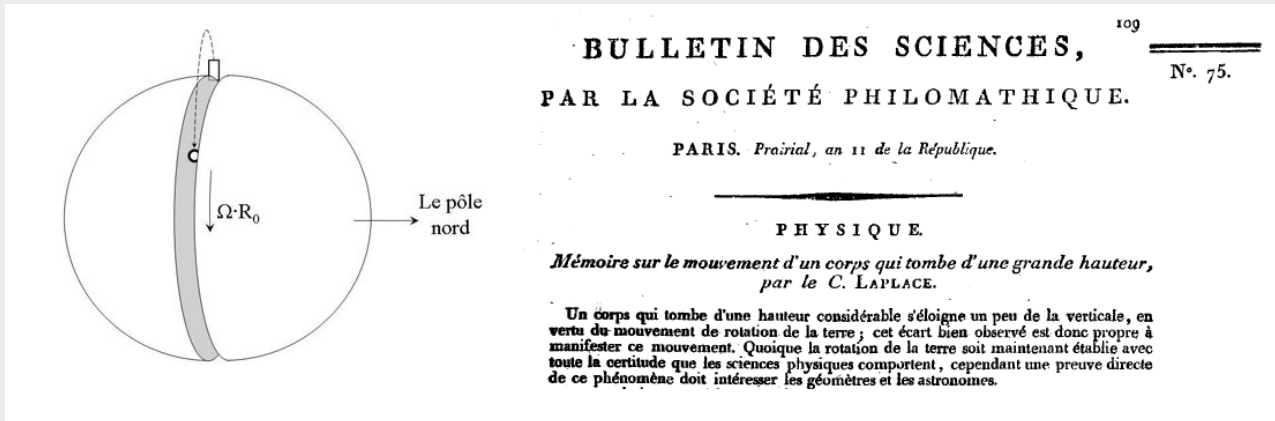
3.d) En donnant l'expression de ω_0 , montrer que la solution de la nouvelle équation différentielle peut s'écrire sous la forme $f(t) = e^{-i\Omega \sin \lambda t} (c_- e^{-i\omega_0 t} + c_+ e^{+i\omega_0 t})$. Grâce aux deux pulsations qui apparaissent dans la solution $f(t)$, on décompose ainsi le mouvement du pendule en une oscillation rapide de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, avec une rotation du plan d'oscillation de période $T' = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda}$.

3.e) Faire les applications numériques pour T_0 et T' . Calculer T' pour un pendule de Foucault au pôle Nord ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) et à l'équateur ($\lambda = 0$). Est-ce cohérent ?



exercice
de colle

Exercice 8.36 Déviation d'un tir d'obus vertical



L'article de 1803 de Laplace, « Mémoire sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur », est une étape fondamentale de ce débat. Son auteur était en compétition? non officielle? avec le célèbre mathématicien allemand Friedrich Gauß qui s'était fixé le même objectif. Tous deux arrivèrent au résultat correct et furent ainsi les premiers savants à découvrir et à interpréter correctement ce qui sera plus tard connu sous le nom d'« effet Coriolis ».

Les expériences de déviation des corps constituaient une réponse à un problème déjà soulevé par Aristote, puis par des opposants à la théorie de Copernic.

Extrait de l'article disponible à l'adresse www.bibnum.education.fr?default?files?137-analyse-laplace-tradfcs.

En un point O de latitude 48° Nord et de longitude 3° Est, un canon tire un obus selon la direction verticale ascendante Oz avec une vitesse initiale $V_0 = 900 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dans le référentiel terrestre. Cette expérience a été réalisée au XVII^{ème} siècle. Nous en proposons une modélisation.

On se munit d'un repère $Oxyz$ orthonormé lié à la surface de la terre avec Ox dirigé vers l'est.

On néglige les frottements de l'obus (considéré comme un point matériel) avec l'air.

On considère le champ de pesanteur uniforme de norme $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) Dans un premier temps, on considère le référentiel terrestre comme galiléen.

1.a) Déterminer l'altitude maximale z_{max} atteinte par l'obus.

1.b) Donner l'expression du vecteur vitesse à chaque instant.

2) On considère maintenant le référentiel terrestre comme non galiléen.

On pourra partir de l'expression précédente du vecteur vitesse, en première approximation.

2.a) Pourquoi ne faut-il ajouter dans le bilan des forces, que les forces de Coriolis?

2.b) Exprimer ces forces de Coriolis dans le repère $Oxyz$.

2.c) Donner les expressions horaires du mouvement.

2.d) En quel point A l'obus retombe-t-il?

3) On se place à nouveau dans l'hypothèse du référentiel galiléen.

3.a) Quelle orientation α par rapport à la verticale permet à l'obus de retomber en A ?

3.b) L'expérience est-elle concluante quant à la mise en évidence des forces de Coriolis?

?
exercice
de colle

Exercice 8.37

Fermeture d'une portière de voiture au démarrage



Une voiture démarre sur une route horizontale : dans le référentiel terrestre R supposé galiléen, elle est en mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré (d'accélération $\vec{a}_{O'} = a \cdot \vec{u}_x$).

On négligera tout frottement.

On s'intéresse à une portière de cette voiture, de masse M , de moment d'inertie J par rapport à l'axe des charnières ($O'z$ vertical), de centre d'inertie G à la distance b de l'axe $O'z$. On repère par α l'angle entre Ox et la portière.

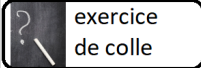
Initialement (à $t = 0$), la voiture est à l'arrêt dans R ($\vec{v}_{O'} = \vec{0}$) et la portière est restée ouverte (elle fait un angle $\alpha_0 = 90^\circ$).

1) En appliquant le théorème du moment cinétique à la portière dans le référentiel R' de la voiture, déterminer l'équation différentielle suivie par α .

2) En déduire que $\frac{\dot{\alpha}^2}{\cos(\alpha)} = C$. On déterminera la constante C .

3) Retrouver directement ce précédent résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la portière dans le référentiel R' de la voiture.

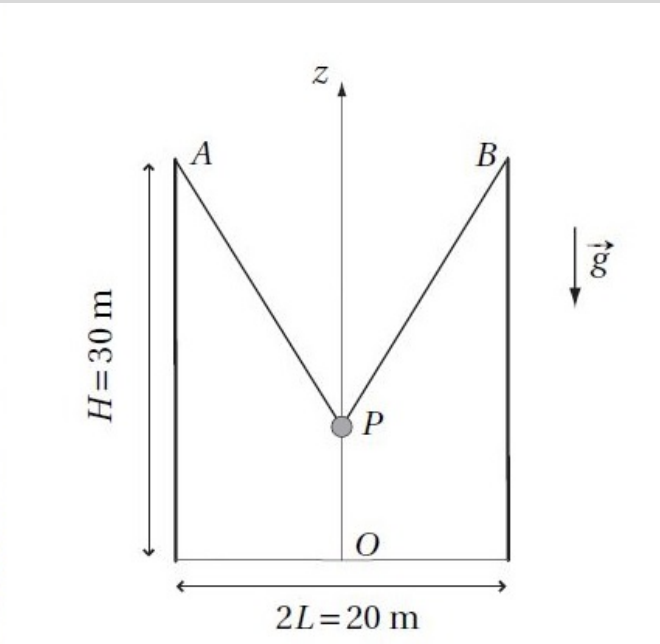
4) En déduire que la porte se ferme au bout d'un temps $\tau = D \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha)}}$. On déterminera la constante D .



exercice
de colle

Exercice 8.38 Le cinquième élément

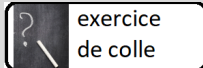
Dans une attraction à sensation forte appelée le cinquième élément, deux intrépides, Korben et Ruby, prennent place dans une boule tenue par deux élastiques et catapultée en l'air.



La boule, de masse $m = 300$ kg est assimilée à un point P repéré par sa cote $z_P(t)$. Les passagers embarquent quand la boule est au point O de cote $z = 0$. Les élastiques fixés en A et B à des pylônes sont modélisés par des ressorts de raideur $k = 9,8 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 20$ m quand ils sont étirés et sans effets sinon.

Le propriétaire de l'attraction annonce une hauteur atteinte de 45 m et une accélération de $6g$.

1) A-t-il raison ou son annonce est-elle de la publicité mensongère ?



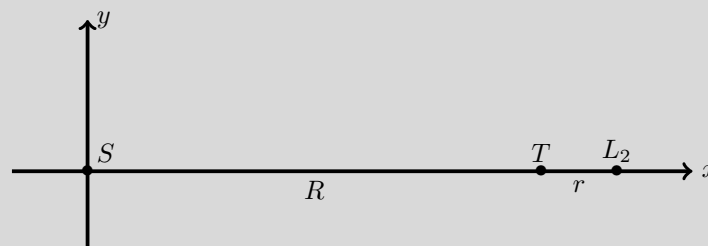
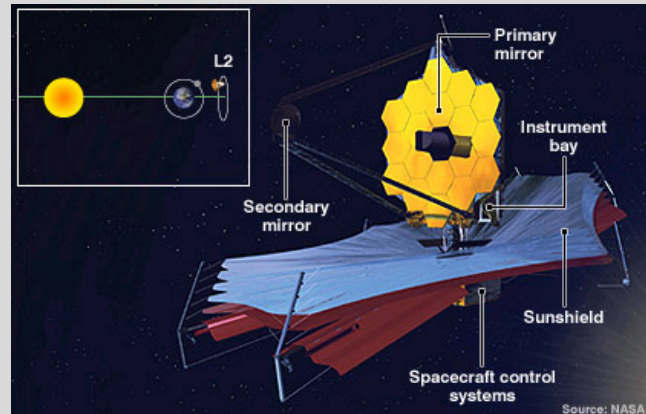
exercice
de colle

Exercice 8.39

Positionnement du télescope James Webb au point de Lagrange L_2

Le successeur du télescope Hubble, appelé JWST (James Webb Space Telescope) sera placé dans une position telle qu'il ne sera pas gêné par la lumière du soleil.

R_0 est le référentiel dans lequel le Soleil S et la Terre T sont fixes, de repère associé $S, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. On note L_2 cette position qui a comme caractéristique d'être fixe par rapport à la Terre et au Soleil (c'est un "point de Lagrange"). Le point de Lagrange L_2 est à la distance $r \ll R$ de la Terre (cf. figure ??).



On considère la Terre ponctuelle en T , de masse $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg, en orbite circulaire de rayon $R = 150 \times 10^6$ km autour du Soleil ponctuel en S , de masse $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg dans le référentiel héliocentrique (R_h considéré galiléen) avec une période de révolution T_T .

On note G la constante de gravitation universelle. On néglige l'action de tous les autres corps célestes.

1) Etude préliminaire

1.a) Déterminer l'expression de T_T .

1.b) Quel est, dans R_h , le mouvement de R_0 ? R_0 est-il galiléen?

2) Equilibre des forces

2.a) Faire un bilan des forces s'exerçant sur le télescope de masse m positionné en L_2 dans le référentiel R_0 .

2.b) Montrer que $r = \left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3} R$.

2.c) Calculer numériquement la distance r à laquelle se trouvera le télescope James Webb par rapport à la Terre. Les hypothèses précédentes sont-elles justifiées?

3) Etude de la stabilité du point de Lagrange

Le satellite est déplacé de $\vec{d\ell} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ dans un voisinage de L_2 : $|x|$, $|y|$ et $|z|$ sont négligeables devant r .

3.a) Exprimer les énergies potentielles dont dérivent les différentes forces s'exerçant sur le télescope de masse m .

3.b) Faire un développement limité au second ordre de ces différentes énergies potentielles.

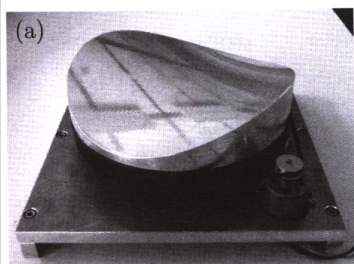
3.c) Montrer que la projection suivant \vec{u}_x de la force s'exerçant sur le satellite est de la forme $F_x = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} x - \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} y - \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} z$ où $E_p(x, y, z)$ est l'énergie potentielle totale. Exprimer de façon analogue F_y et F_z les projections respectives de la force s'exerçant sur le satellite suivant \vec{u}_y et \vec{u}_z .

3.d) Exprimer les projections F_x , F_y et F_z en fonction de G , m , M_T , r , x , y et z .

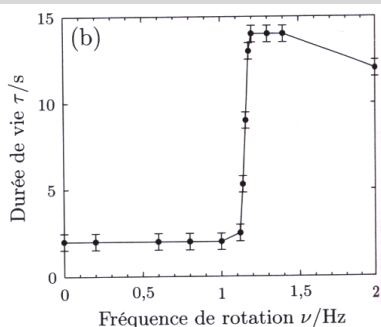
3.e) Interpréter ces projections en terme de stabilité du satellite.

exercice de colle

**Exercice 8.40
Rodéo**



(a) Selle tournante ; on voit à droite le moteur électrique entraînant la selle par une courroie.



(b) Durée de vie τ en fonction de la fréquence de rotation ν .

La figure montre une réalisation expérimentale d'une selle tournante : l'équation de la surface est $z = \frac{x^2 - y^2}{R}$, avec $R = 0,45$ m, et elle est mise en rotation à la fréquence $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ à l'aide d'un moteur électrique.

On place à l'instant $t = 0$ une bille d'acier au centre de la selle, et on mesure le temps τ au bout duquel la bille quitte la selle tournante.

Cette expérience a été réalisée par Tobias Koch à l'université de Stuttgart.

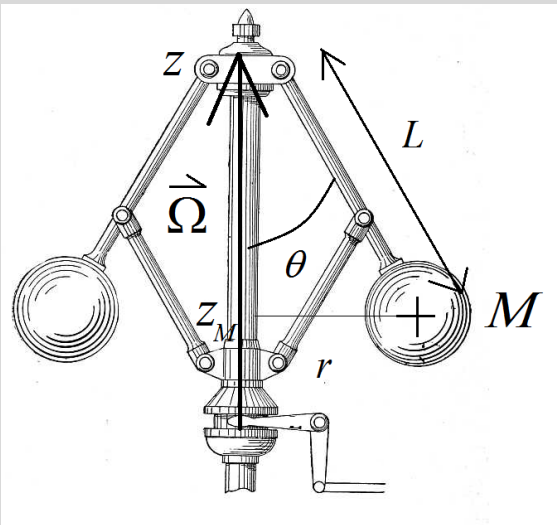
On modélise la force exercée par la selle sur la bille assimilée à un point matériel M par une force dérivant de l'énergie potentielle :

$$U(x, y) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 - y^2)$$

- 1) La selle est fixe dans le référentiel du sol, galiléen.
 - 1.a) Montrer qu'il existe une et une seule position d'équilibre pour la particule.
 - 1.b) Cet équilibre est-il stable ?
- 2) On met la selle en rotation autour de l'axe Oz , à la vitesse angulaire Ω .
 - 2.a) Écrire les équations du mouvement dans le référentiel-tournant.
 - 2.b) À quelle condition portant sur Ω la particule peut-elle être piégée ?
 - 2.c) Tracer le diagramme de stabilité dans le plan ω, Ω .
- 3) Retour sur les résultats expérimentaux.
 - 3.a) Commenter la partie (b) du graphique.
 - 3.b) Les résultats expérimentaux sont-ils en accord avec le modèle développé ?

?
exercice
de colle

Exercice 8.41 Régulateur de Watt



Le régulateur de Watt est un système ingénieux mis en place dans des machines pour réguler leur vitesse : plus la machine tourne vite et plus les boules du régulateur se soulèvent, actionnant une valve qui diminue l'arrivée de combustible, faisant ainsi diminuer la vitesse de rotation.

Soit une boule de masse m assimilée à un point matériel M , lié par une tige de longueur L à un axe Oz qui tourne avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$.

M se trouve à la distance r de Oz .

On prendra l'origine $z = 0$ de l'axe Oz à l'accroche de la tige.

- 1) Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement ? On l'exprimera en fonction de θ . Exprimer l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ et ω .
- 2) En déduire l'altitude z_M de M qui correspond à un équilibre stable. Vérifier que l'expression a bien un sens.

?
exercice
de colle

Exercice 8.42
L'assiette au beurre



L'assiette au beurre est une attraction de foire : on s'assoie sur un manège qui se met à tourner de plus en plus vite. Au bout d'un certain moment, les gens se trouvent éjectés vers l'extérieur du manège. Cet exercice tente de modéliser ce qui se produit.

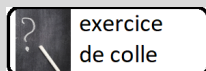
Oz est la verticale ascendante, axe de rotation d'un disque horizontal qui tourne à une vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz .

On augmente très progressivement cette vitesse de rotation de sorte que l'on puisse se considérer en régime quasi-stationnaire à chaque instant.

Un objet M est placé à une distance d de l'axe de rotation du disque.

Les coefficients de frottement statique et dynamique de la force de frottement solide exercée par le disque sur M sont respectivement notés f_s et f_d , et on admet que $f_d = \frac{3}{4}f_s = 2,5$.

- 1) Rappeler les lois de Coulomb du frottement solide.
- 2) Montrer que, dans le cas où M est fixe par rapport au disque, $\omega < \omega_0$, dont on donnera l'expression.
- 3) Déterminer l'évolution de M lorsqu'il commence à glisser sur le disque.



exercice
de colle

Exercice 8.43 La chloïde

Comment construire une route ou une voie de chemin de fer qui serpente? Les amateurs de modélisme réalisent leurs circuits avec des rails rectilignes et en arcs de cercle. Ils ignorent que, lors de la transition entre un rail droit et un rail circulaire, un passager serait fort incommodé par une secousse brutale! Il existe pourtant une solution : construire les virages en forme de clothoïde, aussi nommée spirale de Cornu. Ce tracé, où la courbure en chaque point est proportionnelle à la distance parcourue jusqu'à ce point, est notamment au service des bretelles d'autoroute et des loopings des montagnes russes.



1. EN PASSANT D'UN TRAJET circulaire à un trajet rectiligne, le véhicule subit une discontinuité de la force centrifuge, qui s'annule brutalement. Les suspensions, qui se sont comprimées lors de la descente sous l'effet de cette force et du poids, se détendent alors en partie (car il reste le poids), d'où un rebond du véhicule.



2. EN CHAQUE POINT D'UNE CLOTHOÏDE, ou spirale de Cornu, la courbure (l'inverse du rayon de courbure) est proportionnelle à la distance parcourue jusqu'à ce point. Elle permet de raccorder (partie rouge) un trajet rectiligne à un trajet circulaire (en bleu) de telle sorte que la courbure varie continûment. On y fait appel pour concevoir les bretelles d'autoroutes.



La courbe anticourbure Jean-Michel COURTY et Roland LEHOUCQ Idées de physique © Pour la Science - n° 425 - Mars 2013

1) Calculs préliminaires de l'accélération

1.a) Exprimer l'accélération d'un véhicule assimilé à un point matériel dans le repère de Frénet (\vec{u}_t, \vec{u}_n) en fonction de la courbure C (l'inverse du rayon de courbure) et de la norme de la vitesse v .

1.b) Vérifier que l'accélération \vec{a} de ce véhicule "peut porter sur la valeur de sa vitesse, par exemple lors du démarrage ou d'un freinage, mais aussi résulter d'un changement de direction".

2) Le cas du trajet de la figure 1

2.a) Vérifier que "en choisissant des courbes en arc de cercle, donc d'un rayon de courbure constant, la force centrifuge subie par le véhicule est constante si ce dernier a une vitesse constante en module".

2.b) Est-ce que, lorsque "la trajectoire devient subitement rectiligne, la force centrifuge disparaît" ?

2.c) Y a-t-il "discontinuité de l'accélération" lors du trajet de la figure 1 ?

3) Le cas du freinage d'une voiture en ligne droite

3.a) Calculer l'accélération de la voiture avant ($t < 0$) et après ($t > 0$) l'arrêt.

3.b) Montrer que "au cours de la phase de décélération, les passagers du véhicule subissent une force d'inertie orientée vers l'avant."

3.c) Sous quelle condition y a-t-il continuité de la force d'inertie à l'arrêt de la voiture ?

4) Le cas d'un train à vitesse constante dans un virage

4.a) Faire un schéma des forces appliquées sur le train dans un virage de façon que "la résultante du poids et de la force centrifuge soit perpendiculaire au plan de la voie". On fera apparaître l'angle ϕ d'inclinaison des rails par rapport à l'horizontale.

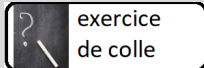
4.b) Faire "un calcul simple [qui] montre que le dévers doit être proportionnel à l'accélération, donc à la courbure". On définira pour cela le devers en fonction de ϕ .

5) Le cas des montagnes russes dans un looping circulaire

5.a) Quelle est la condition sur la norme de la vitesse v_h pour "qu'au point le plus haut, la force centrifuge compense le poids" ?

5.b) En appliquant un théorème énergétique au wagon de la montagne russe, déterminer alors la norme de la vitesse v_b "d'entrée dans le looping". On négligera les frottements.

5.c) Quelle est alors "tout en bas [...] l'accélération ressentie par le passager" ?



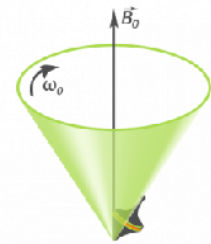
exercice
de colle

Exercice 8.44 Précession de Larmor



Quid de l'IRM ? En IRM on s'intéresse principalement au noyau d'hydrogène ^1H , car il est très présent dans le corps humain étant donné qu'on le retrouve dans les molécules d'eau (H_2O). Il ne possède qu'un seul proton

Si on place ces noyaux "magnétisés" dans un champ magnétique constant B_0 ils se mettent à tourner autour de l'axe de ce champ, comme des toupies, selon un angle donné. On parle alors de **mouvement de précession**. La vitesse de ce mouvement est définie dans l'**équation de Larmor**, qui explique que si le champ B_0 augmente, la fréquence de précession (qui est liée à la vitesse) augmente, et vice-versa.



issus du site "<http://www.cic-it-nancy.fr/fr/quest-ce-que-lirm/>".

Pour étudier ce mouvement, on se place dans le référentiel d'étude R qui est considéré comme galiléen. Une particule M de masse m et de charge q est lancée à l'origine du repère $Oxyz$ (fixe dans R) avec une vitesse initiale v_0 contenue dans le plan zOx : $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$.

Cette particule est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme et constant.

Soit M' la projection de M sur le plan xOy et H sa projection sur l'axe Oz .

Soit R' un référentiel en rotation par rapport à R avec une vitesse angulaire $\Omega = \Omega\vec{e}_z$. $Ox'y'z$ est fixe dans R' . La vitesse angulaire Ω est choisie de manière à ce que le point M' soit fixe dans R' sur l'axe Ox' : on note $x' = OM'$.

On pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$, la pulsation cyclotron.

1) Passage de R à R' .

1.a) Exprimer la force de Lorentz dans R .

1.b) Pourquoi peut-on dire que c'est la même force électromagnétique que la particule ressent dans R' , alors que le champ électromagnétique n'est plus le même ?

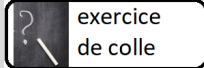
1.c) Exprimer la vitesse de la particule dans R en fonction de celle dans R' .

2) Dynamique dans R' .

2.a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans R' .

2.b) Montrer que $\Omega = \frac{\omega_c}{2}$.

2.c) Quelle est donc l'équation suivie par x' ?



exercice
de colle

Exercice 8.45 Physique dans un ascenseur accéléré



Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical.

L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

1) Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en un point O fixe au plafond de l'ascenseur. Sa longueur est $\ell = OM$. θ est l'angle que fait le fil avec la verticale. Déterminer la période T des petites oscillations du pendule dans les cas suivants :

Déterminer la période T des petites oscillations du pendule dans les cas suivants :

1.a) L'ascenseur est immobile ;

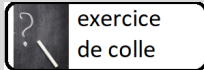
1.b) L'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a \vec{u}_z$ (où $a > 0$) ;

1.c) L'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a \vec{u}_z$.

2) On suspend maintenant en O un ressort de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide ℓ_0 qui soutient un point matériel M de masse m (initialement immobile dans l'ascenseur).

2.a) Déterminer l'altitude z de M au cours du temps si l'ascenseur commence à monter (son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a \vec{u}_z$) puis si l'ascenseur commence à descendre (son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a \vec{u}_z$).

2.b) Que faut-il pour transformer ce dispositif en un accéléromètre, même si M n'est pas au repos initialement ?



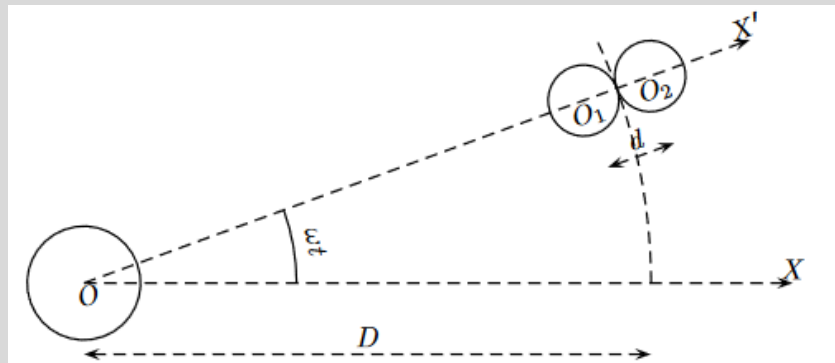
Exercice 8.46 Limite de roche



Illustration tirée de <https://www.lepoint.fr>.

Le phénomène selon lequel un satellite peut se disloquer explique l'existence d'anneaux autour de certaines planètes.

On fait la modélisation suivante : une planète de masse M possède un satellite à une distance D , en rotation circulaire uniforme dans le référentiel lié à la planète, considéré comme galiléen. Ce satellite est composé de deux sphères de masse $\frac{m}{2} \ll M$ chacune, distantes de $d \ll D$. Les deux masses forment un solide, immobile dans le référentiel R' lié au repère (O, OX', OY', OZ) .



L'objectif de cet exercice est de déterminer une condition sur la distance D afin que le satellite ne se disloque pas.

1) Déterminer l'expression de ω en fonction de M , D et G la constante de gravitation.

2) On note F la norme des actions de contact entre les deux masses.

2.a) Effectuer le bilan des forces dans le référentiel R' pour la masse de centre O_1 . Donner en particulier l'expression de la force de marée, résultant des forces gravitationnelles dues à la planète et aux forces d'inertie. Appliquer le théorème de la quantité de mouvement.

2.b) Effectuer la même étude pour la seconde masse.

3) Stabilité d'un satellite

3.a) En déduire la condition sur D afin que les deux masses restent bien en contact.

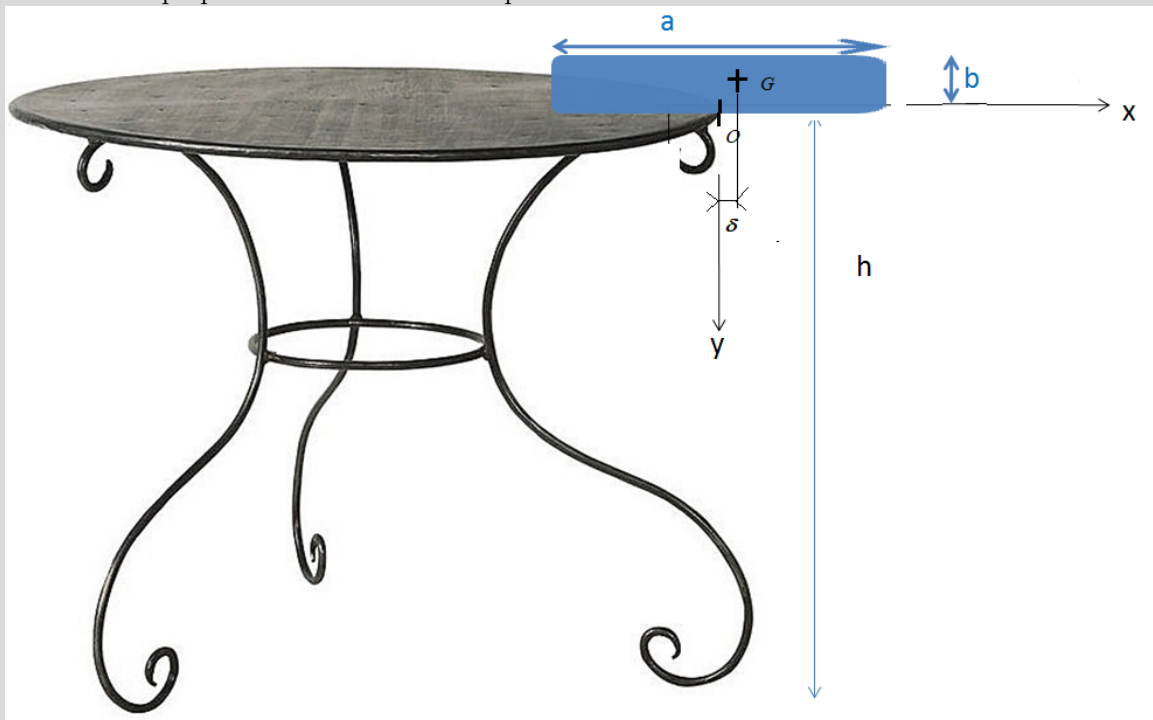
3.b) Vérifier que la Lune est bien stable : on donne la masse de la Terre $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg, celle de la Lune $M_L = 7,2 \times 10^{22}$ kg, le rayon de la Lune $R_L = 1,7 \times 10^6$ m, et la distance Terre-Lune : $D_{T-L} = 3,8 \times 10^8$ m.

3.c) Vérifier que cette limite de roche est cohérente avec le fait que les anneaux de Saturne correspondent à un amas de satellites brisés situés à une distance maximale de 115 800 km de la planète (de rayon $R_S = 6,0 \times 10^7$ m), tandis que satellite de Saturne le plus proche, Mimas, se trouve à 186 000 km. On supposera que la densité de tous ces corps est la même.

exercice de colle

Exercice 8.47
La chute d'une tartine beurrée

La "loi de Murphy" stipule qu'une tartine qui tombe d'une table atterrit toujours la face beurrée contre terre. Cet exercice propose une modélisation du problème.



On s'intéresse à une tartine assimilée à parallélépipède homogène, de masse M , de longueur $a = 20$ cm, d'épaisseur $b \ll a$ et de largeur c . Son centre de masse, noté G est initialement positionné au dessus du vide, c'est-à-dire à une distance $\delta = 5$ mm du bord de la table O .

La hauteur de la table est notée $h = 70$ cm et on utilisera le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, où \vec{u}_x est horizontal, qui s'éloigne de la table, \vec{u}_y est vertical vers le bas et \vec{u}_z , horizontal, tangent à la table (cf. figure).

1) Dans une première phase, la tartine subit une rotation autour de l'axe Oz ; l'angle que fait la longueur de la tartine avec \vec{u}_x passant de $\theta = 0$ (avec une vitesse angulaire nulle) à $\theta = \frac{\pi}{2}$ (avec une vitesse angulaire ω_0). Le moment d'inertie de la tartine par rapport à Oz est $J = M \left(\frac{a^2}{12} + \delta^2 \right)$.

1.a) Montrer que θ vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{a^2}{12} + \delta^2 \right) \frac{d\dot{\theta}}{dt} = g \delta \frac{d \sin \theta}{dt}$$

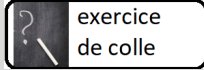
1.b) Déterminer l'expression de ω_0 et estimer sa valeur numérique.

2) Dans une seconde phase, la tartine est en chute libre.

2.a) Déterminer l'équation horaire du mouvement de G .

2.b) Dans le référentiel lié au repère $(G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, la tartine est en rotation autour de Gz . Montrer que sa vitesse angulaire est ω_0 , dans ce référentiel mais aussi dans le référentiel terrestre.

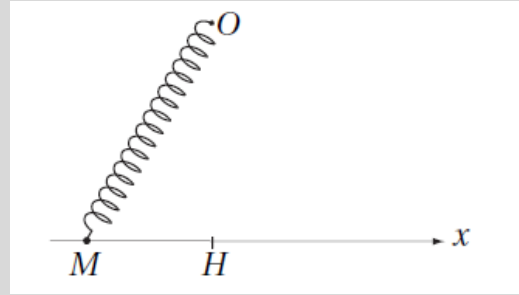
2.c) En déduire que la tartine tombe face beurrée contre terre.



exercice
de colle

Exercice 8.48 Oscillateur contraint

On s'intéresse au dispositif représenté ci-contre.
L'anneau M de masse m glisse sans frottements le long d'une tige horizontale.
Le point O est fixe.
 $OH = h$.
Le ressort a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0 .

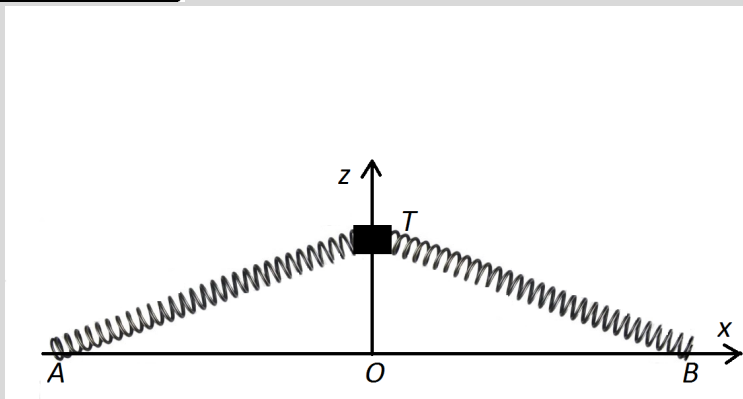


- 1) Déterminer les positions d'équilibre et leurs conditions d'existence ainsi que leurs éventuelle stabilité.
- 2) Dessiner le portrait de phase pour $\ell_0 > h$.
- 3) Déterminer la période des petites oscillations pour $\ell_0 = h$.

On donne : $\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 2,62$.

exercice de colle

Exercice 8.49
Mouvement d'un trampoline



On modélise un trampoline T par deux ressorts identiques de longueurs à vide l_0 , de raideurs k , de masses négligeables, fixés à deux points A et B sur l'axe (Ox) , tels que $AO = OB = d > l_0$, et reliés entre eux au tapis assimilé à un point matériel T de masse m_T .

Un homme assimilé à un point matériel H de masse m_H est sur le tapis : ce dernier exerce sur l'homme une action de contact $\vec{N} = N \cdot \vec{u}_z$, où (Oz) est un axe vertical dirigé vers le haut.

On néglige toute force de frottement.

1) Equations différentielles :

- 1.a) Ecrire l'équation différentielle suivie par l'altitude z_H de H .
- 1.b) Ecrire l'équation différentielle suivie par l'altitude z_T de T . On supposera que $|z| \ll d$.

2) Contact avec le trampoline :

On suppose dans un premier temps que l'homme reste en contact sur le trampoline : $z_H = z_T = z$.

- 2.a) Ecrire l'équation différentielle suivie par l'altitude z .
- 2.b) En déduire la position d'équilibre z_{eq} .
- 2.c) Montrer (en déterminant ω) que la solution de l'équation différentielle est de la forme

$$z(t) = z_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + z_{eq}$$

où l'amplitude $z_0 > 0$ dépend des conditions initiales.

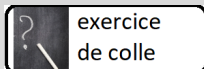
3) Perte de contact avec le trampoline :

On suppose qu'à un moment, l'homme perd le contact avec le trampoline.

- 3.a) Ecrire la condition de perte de contact en fonction de \ddot{z} .
- 3.b) Montrer que cela impose $z_0 \geq z_{min}$ que l'on déterminera.

A $t = 0$, l'homme est en contact sur le trampoline, à la position d'équilibre. On lui communique une vitesse initiale $\vec{v} = -v_0 \cdot \vec{u}_z$.

- 3.c) Montrer que, pour que l'homme décolle du trampoline, il faut que $v_0 \geq v_{min}$ que l'on déterminera.



exercice
de colle

Exercice 8.50 Looping dans un mini golf



On considère une gouttière hélicoïdale, d'axe horizontal (suivant (Oz)), posée sur le sol en Ω_1 et Ω_2 . Sa projection dans le plan vertical (xOy) ((Oy) est vertical, vers le haut) est donc un cercle de centre O et de rayon R .

Une balle de golf assimilée à un point matériel en P , de masse m , entre dans la gouttière en Ω_1 avec une vitesse initiale v_0 . On repère la position de P par l'angle θ que fait \overrightarrow{OP} avec $\overrightarrow{O\Omega_1}$.

Le contact de la balle sur la gouttière est supposé sans frottement et on néglige la résistance de l'air.

1) On suppose tout d'abord que P reste toujours en contact avec la gouttière.

1.a) Montrer que si $v_0 > v_1$ que l'on exprimera en fonction de g et R , la balle sort de la gouttière en Ω_2 .

1.b) Si $v_0 < v_1$, montrer que la balle ressort de la gouttière en Ω_1 après être montée jusqu'à une altitude y_1 que l'on exprimera en fonction de v_0 , g et R .

2) Tant que P reste en contact avec la gouttière.

2.a) Exprimer la vitesse \vec{v} dans le repère cylindrique d'axe (Oz) .

2.b) Exprimer l'accélération \vec{a} dans le repère cylindrique d'axe (Oz) .

2.c) Exprimer la réaction N de la gouttière en fonction de θ , m , g et R .

2.d) En déduire N en fonction de l'altitude y de P , de y_1 , m , g et R .

3) On ne suppose plus que P reste toujours en contact avec la gouttière.

3.a) Exprimer, en fonction de y_1 , l'altitude y_2 de P pour laquelle N s'annulerait.

3.b) Montrer que si $v_0 > v_2$ que l'on exprimera en fonction de g et R , la balle reste en contact avec la gouttière.

3.c) Conclure sur le mouvement de la balle en fonction de v_0 .

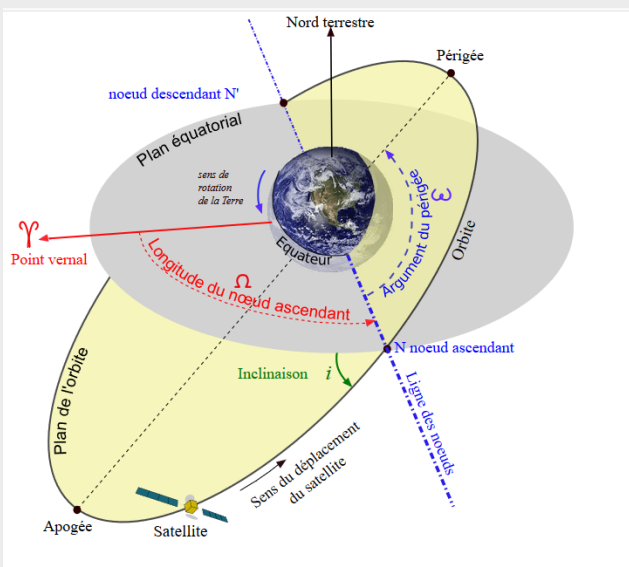
exercice de colle

**Exercice 8.51
Trajectoire d'un satellite**

Un satellite artificiel est un objet fabriqué par l'être humain, envoyé dans l'espace à l'aide d'un lanceur et gravitant autour d'une planète ou d'un satellite naturel comme la Lune. La vitesse imprimée par le lanceur au satellite lui permet de se maintenir pratiquement indéfiniment dans l'espace en décrivant une orbite autour du corps céleste. Celle-ci, définie en fonction de la mission du satellite, peut prendre différentes formes – héliosynchrone, géostationnaire, elliptique, circulaire – et se situer à des altitudes plus ou moins élevées, classées en orbite basse, moyenne ou haute.

Le premier satellite artificiel Spoutnik 1 est lancé par l'URSS en 1957. Depuis cette époque, plus de 5 500 satellites artificiels sont placés en orbite (2007). Les satellites jouent désormais un rôle important à la fois sur les plans économique (télécommunications, positionnement, prévision météorologique), militaire (renseignement) et scientifique (observation astronomique, microgravité, observation de la Terre, océanographie, altimétrie).

https://fr.wikipedia.org/wiki/Satellite_artificiel



La Terre est assimilée à un astre sphérique, de centre O , de masse M uniformément répartie. Soit S un satellite de masse m . À $t = 0$, il est à la distance r_0 du centre de la Terre, animé de la vitesse \vec{v}_0 .

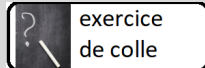
1) À quelle(s) condition(s) le mouvement est-il circulaire ?

En fait, la vitesse initiale du satellite est \vec{v}_1 telle que le module de \vec{v}_1 est égal à celui de \vec{v}_0 et l'angle entre \vec{v}_0 et \vec{v}_1 est α .

On donne l'équation polaire d'une ellipse (origine au foyer) :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

2) Déterminer les caractéristiques de la trajectoire du satellite (p, e, θ_0) en fonction de r_0 et α .



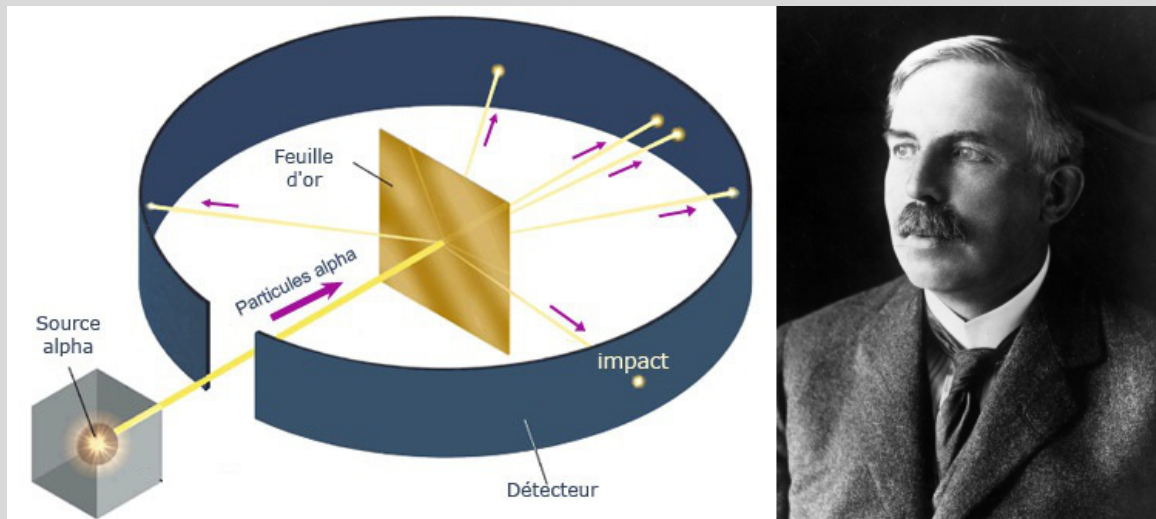
exercice
de colle

Exercice 8.52 Diffusion Rutherford

L'expérience de Rutherford, également connue sous le nom d'expérience de la feuille d'or, menée en 1909 par Hans Geiger et Ernest Marsden sous la direction d'Ernest Rutherford, montra que la partie chargée positivement de la matière est concentrée en un espace de petit volume (maintenant appelé noyau atomique).

L'expérience est réalisée sous vide. De la matière radioactive émettant des particules α (noyaux d'hélium, He^{2+}) est placée dans une boîte et le faisceau de particule α est orienté en direction d'une très fine feuille d'or (600 nm). Derrière cette couche d'or, un écran est placé ; il est enrichi d'une substance chimique (sulfure de zinc : ZnS) permettant de visualiser, par un scintillement lumineux, la collision par les particules α .

Plusieurs minutes après la disposition du matériel, différents points lumineux apparaissent sur l'écran et ces points ne sont pas tous dans l'orientation du faisceau, mais certains étalés sur de grands angles. Rutherford eut ainsi la surprise d'observer une sorte de rebond des particules α : « C'était presque aussi incroyable que si vous aviez tiré un obus de trois cent soixante-quinze kilos sur un morceau de papier de soie et qu'il était revenu vous frapper ! »



On s'intéresse à un ion d'or (ponctuel, de charge $+Ze$, de masse M) bombardé par un noyau α (${}^2\text{He}$, ponctuel, de charge $+2e$, de masse m). Comme $M \gg m$, l'or reste au repos à l'origine O d'un repère cartésien fixe dans le référentiel R que l'on supposera galiléen. Le noyau α initialement en $(x_i \rightarrow -\infty, y_i = +b, z_i = 0)$ avait une vitesse initiale $\vec{v}_i = v_0 \cdot \vec{u}_x$ (on appelle b le paramètre d'impact).

1) Théorème du moment cinétique

1.a) Montrer que la trajectoire de la particule α est plane.

1.b) Déterminer la valeur de la constante des aires $C = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m}$ en fonction de r et θ puis en fonction de b et v_0 .

2) Etude énergétique

2.a) Déterminer l'énergie potentielle E_p du système. On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.

2.b) Déterminer l'énergie mécanique E_m du système.

2.c) Montrer que E_m peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)$. On déterminera l'énergie potentielle effective $E_{p_{eff}}(r)$ en fonction de r , m , C , ε_0 , Z et e .

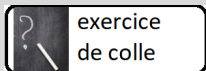
3) Application à la distance de plus courte approche

3.a) Quelle est la nature de la trajectoire (sans calculs) ?

3.b) Déterminer r_{min} , la distance de plus courte approche de la particule α en fonction de Z , e , ε_0 , m , v_0 et b .

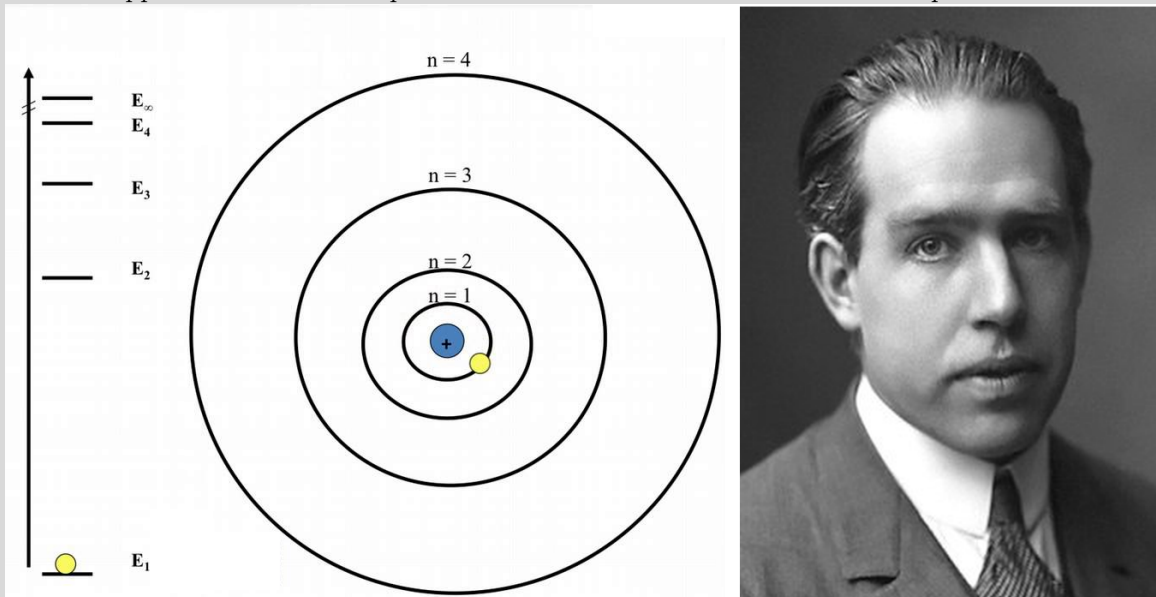
3.c) Que vaut r_{min} quand l'énergie potentielle est négligeable devant l'énergie cinétique ?

3.d) Que vaut r_{min} quand $b = 0$?



Exercice 8.53
Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Le modèle de Bohr, établi sur le modèle planétaire de Rutherford, élaboré par Niels Bohr en 1913, rencontra un succès immédiat car il expliquait de manière simple les raies spectrales des éléments hydrogénoïdes tout en effectuant un rapprochement entre les premiers modèles de l'atome et la théorie des quanta.



L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton de masse m_p et de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, situé au point O , fixe dans le référentiel R supposé galiléen et d'un électron, en M , de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ et de charge $-e$, ayant un mouvement circulaire uniforme, de rayon r et vitesse v , de centre O .

1) Questions préliminaires :

1.a) Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique attractive du proton O (on donne : $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$), déterminer une première relation : on donnera $m_e \cdot r \cdot v^2$ en fonction des constantes précédemment données.

1.b) Dans le modèle de Bohr, la norme du moment cinétique de l'électron est quantifiée : $|\sigma_O| = n \cdot \hbar$, où n est entier et $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} J.s$ est la constante de Planck réduite. En déduire une seconde relation : on donnera $m_e \cdot r \cdot v$ en fonction des constantes précédemment données.

2) Dédution des caractéristiques du mouvement.

2.a) Exprimer v en fonction de n et des constantes précédemment données.

2.b) Exprimer r de la même façon.

3) Energie mécanique de l'électron.

3.a) Exprimer l'énergie mécanique de l'électron E de façon identique.

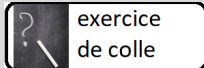
3.b) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E = -\frac{E_0}{n^2}$ (on donnera E_0).

4) On suppose que l'électron est dans son état fondamental ($n = 1$).

4.a) Donner la taille a de l'atome.

4.b) Calculer la vitesse de l'électron v_0 .

4.c) Faire de même avec l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).



exercice
de colle

Exercice 8.54 Satellite freiné par la haute atmosphère

Le satellite GOCE, lancé en 2009, avait surtout pour mission de cartographier avec une extrême précision les variations de la gravité terrestre. Cela a notamment été rendu possible grâce à un moteur ionique nouvelle génération qui lui avait permis de se maintenir extrêmement bas, à moins de 260 km d'altitude.

Après quatre ans de bons et loyaux services, GOCE est arrivé en fin de vie lorsque il a épuisé les dernières gouttes de son carburant. Dès lors, l'ESA a programmé sa rentrée dans l'atmosphère afin de procéder à sa destruction. En effet, le satellite a été construit avant 2008, date d'entrée en vigueur d'un accord international contraignant les satellites scientifiques à se doter d'un système de propulsion destiné à les faire tomber en mer loin des zones habitées.

Un peu plus de trois semaines après être tombé en panne sèche, l'engin européen a achevé son aventure en se désintégrant (en grande partie) dans l'atmosphère terrestre. C'est ce qu'a annoncé l'Agence spatiale européenne (ESA) dans un communiqué publié sur son site.



- 1) Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre (de masse M_T).
 - 1.a) Donner la vitesse \vec{v} du satellite dans les coordonnées polaires.
 - 1.b) Exprimer l'accélération \vec{a} du satellite dans les coordonnées polaires.
 - 1.c) Démontrer la troisième loi de Kepler reliant le rayon de la trajectoire à la période T de révolution du satellite.
 - 1.d) Exprimer l'énergie potentielle E_p du satellite en fonction de G , m , M_T et r (on choisira une énergie potentielle nulle à l'infini).
 - 1.e) Exprimer son énergie cinétique E_c en fonction de G , m , M_T et r . Comparer E_c et E_p .
 - 1.f) Exprimer son énergie mécanique E_m en fonction de E_c et de E_p .
- 2) Les hautes couches de l'atmosphère freinent très légèrement le satellite. Décrire l'évolution du satellite : que deviennent
 - 2.a) le rayon de sa trajectoire ?
 - 2.b) sa période de révolution ?
 - 2.c) et sa vitesse ?

exercice de colle

Exercice 8.55
Le rendez-vous spatial

La station spatiale internationale (ISS) se déplace autour de la Terre sur une trajectoire quasiment circulaire à une altitude voisine de 375 km, dont on note r_0 le rayon.



Vaisseau de ravitaillement
(masse $m = 20 \times 10^3$ kg).

Afin d'assurer son ravitaillement, ou pour renouveler l'équipage, des vaisseaux spatiaux doivent régulièrement rejoindre la station. On considère, pour simplifier, qu'un vaisseau de ravitaillement est placé, grâce à un lanceur, sur une première trajectoire circulaire, de rayon $r_1 < r_0$, correspondant à une altitude de 260 km. Le vaisseau spatial est muni d'un moteur qui permet de faire varier ponctuellement son énergie mécanique : il est en effet impossible de laisser le moteur fonctionner pendant de longues durées car cela nécessiterait d'embarquer une quantité excessive de carburant.

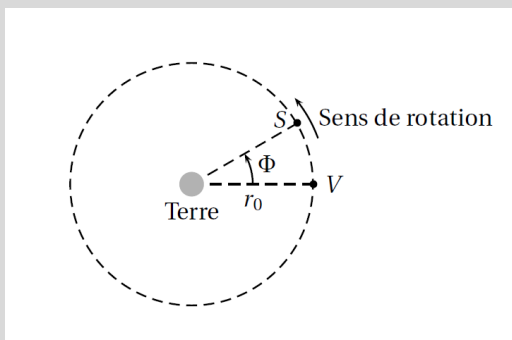
1) Dans le cas d'un corps massif, soumis à la seule attraction gravitationnelle terrestre, en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre, retrouver :

- 1.a) l'expression de l'énergie mécanique en fonction du rayon r de la trajectoire.
- 1.b) la troisième loi de Kepler liant la période de révolution T au rayon r de la trajectoire.

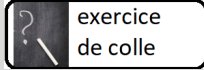
On admettra pour la suite que ces relations se généralisent au cas d'une orbite elliptique à condition d'y remplacer le rayon r par le demi grand axe a de l'ellipse.

- 2)
- 2.a) Sur un schéma, représenter l'orbite elliptique de transfert qui permet au vaisseau de passer d'une orbite circulaire de rayon r_1 à une orbite circulaire de rayon r_0 . On suppose que le moteur ne fonctionne que pour passer d'une orbite à une autre, pendant une durée idéalement nulle, et que son action modifie seulement la norme de la vitesse du vaisseau, mais pas son orientation.

Lorsque le vaisseau atteint l'orbite circulaire de la station orbitale, on suppose qu'il est séparé de la station d'un retard angulaire Φ (voir schéma suivant où le vaisseau est le point V et la station le point S).



- 2.b) Déterminer les caractéristiques de la trajectoire de transfert que le vaisseau doit suivre pour se retrouver, après une révolution autour de la Terre, au même point que la station orbitale.
- 2.c) Déterminer l'expression de l'énergie fournie *a priori* par le moteur pour effectuer le changement de l'orbite de rayon r_1 à l'orbite de rayon r_0 .
- 2.d) Calculer la variation d'énergie mécanique du vaisseau pour chaque passage d'une orbite à une autre.
- 2.e) Retrouver l'énergie totale fournie par les moteurs des fusées du vaisseau pour ce transfert.



Exercice 8.56

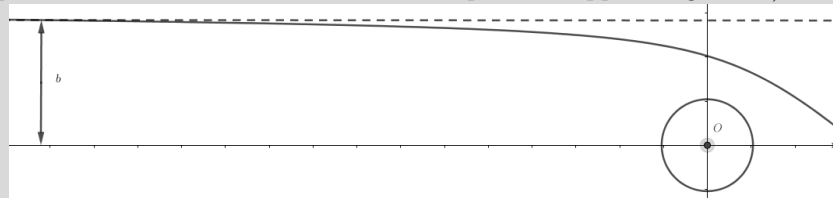
Arrivée d'une météorite sur la Terre

En 1992, à Peekskill (état de New York), après un voyage de plus de 800 km dans le ciel américain, une météorite vient s'échouer sur une Chevrolet Malibu rouge. Cet événement a été filmé par des dizaines de témoins. Cet objet insolite a été exposé au Jardin des Plantes pour illustrer de manière singulière les dégâts qu'un tel rocher stellaire peut provoquer dans le cadre d'une exposition. Cette "relique" associe des lignes au design assurément vintage de la fin des années 1980's à un cratère désolant, au niveau du coffre.



On s'intéresse à une météorite (ponctuelle en M , de masse m) qui se dirige vers la Terre (de masse M_T , de rayon R_T , placée à l'origine O d'un repère cartésien fixe dans le référentiel R que l'on supposera galiléen).

M initialement en $(x_i \rightarrow -\infty, y_i = +b, z_i = 0)$ avait une vitesse initiale $\vec{v}_i = v_0 \vec{u}_x$ (on appelle b le paramètre d'impact).



1) Théorème du moment cinétique

1.a) Montrer que la trajectoire de la météorite est plane.

1.b) Déterminer la valeur de la constante des aires $C = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m}$ en fonction de r et θ puis en fonction de b et v_0 .

2) Etude énergétique

2.a) Déterminer l'énergie potentielle E_p du système. On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.

2.b) Déterminer l'énergie mécanique E_m du système.

2.c) Montrer que E_m peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 + E_{p_{eff}}(r)$. On déterminera l'énergie potentielle effective $E_{p_{eff}}(r)$ en fonction de r , m , M_T , C et G .

3) Application à la distance de plus courte approche

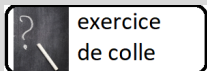
3.a) Quelle est la nature de la trajectoire (sans calculs) ?

3.b) Déterminer r_{min} , la distance de plus courte approche de la météorite en fonction de G , M_T , v_0 et b .

3.c) Que vaut r_{min} quand $b = 0$?

3.d) Que vaut r_{min} quand l'énergie potentielle est négligeable devant l'énergie cinétique ?

3.e) Déterminer une condition sur b pour que la météorite ne percute pas la Terre.



exercice de colle

Exercice 8.57 Trajectoire conique des objets célestes

On étudie le mouvement d'une particule de masse μ , placée dans un champ de force newtonien de centre O : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$.

- 1) Montrer que la trajectoire est plane.
- 2) Démontrer que des aires égales sont balayées pendant des temps égaux.
- 3) Démontrer que la trajectoire est une conique.
- 4) Exprimer l'énergie de la particule.
- 5) Discuter de la nature de cette conique en fonction de l'énergie de la particule.
- 6) Dans le cas de la trajectoire elliptique, exprimer le rapport entre la période T pour la décrire et a , le demi grand axe. En déduire l'altitude d'un satellite géostationnaire.
- 7) Donner v_l , la vitesse de libération d'un point matériel qui serait à une distance r de O . Application numérique pour un objet sur Terre.

Données : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, le rayon moyen de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$, et la masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$.

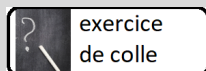
Annexe sur les coniques

La conique est l'ensemble des points P tels que $FP = r(\theta)$ (le centre du repère est F , le **foyer** de la conique), avec : $r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos(\theta - \theta_0)}$.

L'**excentricité**, e , est une grandeur positive ou nulle sans dimension, qui caractérise la nature de la conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

La conique possède quatre longueurs caractéristiques : p , le **paramètre**, a , b et c . Les relations suivantes sont toujours vraies : $p = \frac{b^2}{a}$ et $e = \frac{c}{a}$. Il existe, en plus, une relation entre les carrés de a , b et c , qui dépend de la nature de la conique.

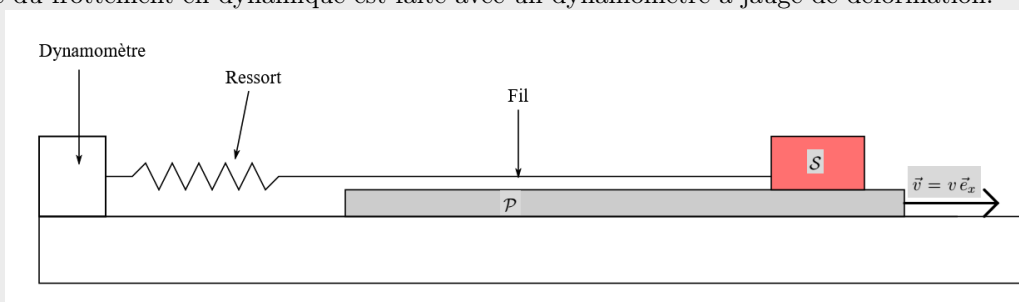
Cercle (cas particulier d'ellipse)	Ellipse	Parabole	Hyperbole
$\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{R}\right)^2 = 1$	$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$	$(y - y_0)^2 = 2.p.(x - x_0)$	$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$
$e = 0$	$e \in [0; 1[$	$e = 1$	$e > 1$
$a^2 = b^2 + c^2$ triviale : $c = 0 \Rightarrow a = b$	$a^2 = b^2 + c^2$	$b^2 = a^2 + c^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
$FP = R = cste$	$FP + PF' = 2a = cste$	$FP = HP$	$FP - PF' = \pm 2.a = cste$
$a = p$ (le paramètre est le rayon)	$a = \frac{p}{1-e^2}$ ($a = \frac{AA'}{2} = CA = CA'$ est le demi-grand axe)	$a = \frac{p}{2}$ (distance centre - directrice)	$a = \frac{p}{e^2-1}$ (distance centre - sommet)
$b = p$ (le grand axe est aussi long que le petit axe)	$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ ($b = \frac{BB'}{2} = CB = CB'$ est le demi-petit axe)	$b = \frac{p}{\sqrt{2}}$ (aucun sens particulier)	$b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$ (donne la pente des asymptotes)
$c = 0$ (les deux foyers sont confondus, au centre)	$c = \frac{pe}{1-e^2}$ (distance entre centre C et foyers F et F')	$c = \frac{p}{2}$ (distance centre - foyer)	$c = \frac{pe}{e^2-1}$ (distance centre - foyer)



Exercice 8.58

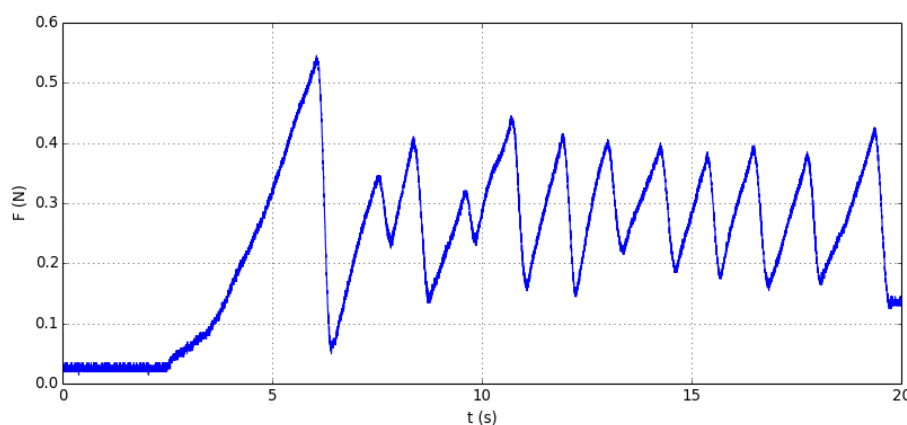
Etude expérimentale du frottement d'un solide

L'étude du frottement en dynamique est faite avec un dynamomètre à jauge de déformation.

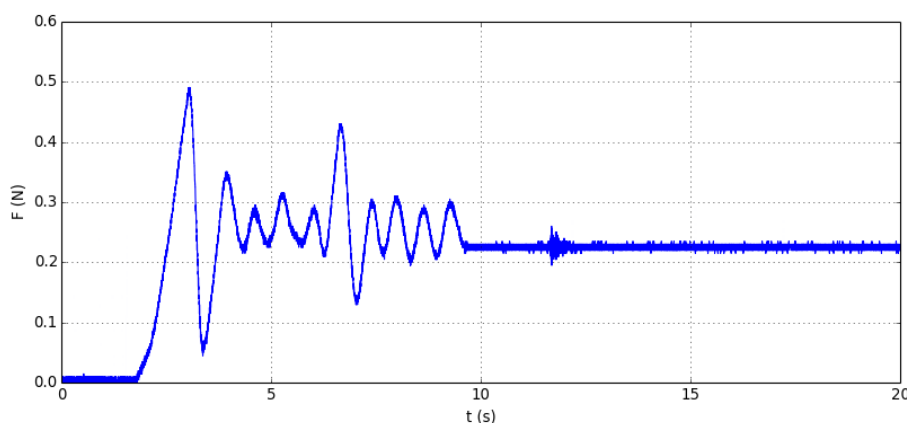


Un dynamomètre à jauge de déformation est fixé sur la table. Le bloc en bois est relié au dynamomètre par un fil. Un ressort est ajouté pour assouplir la liaison. La plaque est déplacée manuellement à une vitesse constante. La force est enregistrée au cours du temps avec une carte d'acquisition.

Les courbes suivantes présentent, pour deux vitesses v différentes, l'enregistrement de la force au cours du temps :



*vitesse v
faible:
phénomène
de
broutement
(stick-slip)*



*vitesse v
grande:
oscillations
sinusoïdales*

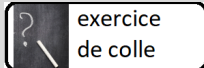
La vitesse du support étant imposée, on observe des oscillations de broutement lorsque la liaison avec le dynamomètre est élastique et lorsque la vitesse est assez faible.

D'après le texte disponible à l'adresse <https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/meca/frotexp/frotexp.html>.

On suppose que le support plan \mathcal{P} se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$ par rapport au sol. Posé sur \mathcal{P} en contact ponctuel, un bloc \mathcal{S} de masse m , situé à l'abscisse $x(t)$.

Pour simplifier, on supposera que $x = 0$ quand le ressort a une élongation nulle.

1) Déterminer les équations du mouvement et expliquez les courbes obtenues expérimentalement.



exercice
de colle

Exercice 8.59 Le stick - slip du violon

Nous en avons tous fait l'expérience en faisant glisser une caisse ou un meuble sur le sol. Pour mettre la caisse en mouvement, il faut pousser horizontalement en exerçant une force minimale. Le mouvement amorcé, la force nécessaire à la poursuite du mouvement est plus faible, car la friction entre la caisse et le sol a diminué. Elle est toujours proportionnelle au poids, mais le facteur de proportionnalité, appelé coefficient de frottement dynamique, est de l'ordre de 25 pour cent plus faible que le coefficient statique, et la caisse accélère. Ensuite, la caisse, freinée, ralentit, puis s'arrête, et ainsi de suite. Ce comportement est dénommé mouvement de fixe-glisse (stick-slip en anglais).

Que se passe-t-il lorsque l'on frotte un archet sur une corde vibrante ? Les crins de l'archet, enduits de colophane, augmentent le coefficient de frottement statique et l'archet « mord » la corde. Au début de son mouvement, lors de l'attaque de la note, l'archet entraîne la corde. Celle-ci fait un coude et, telle une corde d'arc, elle exerce une force de plus en plus grande sur l'archet. Quand cette force dépasse une valeur limite, la corde « décroche » et se met à glisser dans le sens opposé au mouvement de l'archet.

Issu de "Le gond et le violon" de Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik, octobre 2003, POUR LA SCIENCE N° 312, disponible à l'adresse <https://www.pourlascience.fr/sd/physique/le-gond-et-le-violon-5272.php>.



1) Un archet de violon de masse m , se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$ sur un morceau de la corde noté \mathcal{S} , de masse m' , situé à l'abscisse $x(t)$.

La corde étant tendue à ses extrémités on modélise les actions auxquelles \mathcal{S} est soumis du fait du reste de la corde par une force de rappel $\vec{F} = -k x(t) \vec{e}_x$.

NB : k est proportionnelle à la tension de la corde.

Entre l'archet et \mathcal{S} , le coefficient de frottement statique est noté μ_s et on supposera que le coefficient de frottement dynamique μ_d est nul.

A l'instant initial $t = 0$, \mathcal{S} se trouve à la position $x(t = 0) = 0$.

- 1.a) Montrer que lors d'une première phase l'archet entraîne avec lui \mathcal{S} .
- 1.b) A quelle date s'arrête cette phase ?
- 1.c) Quelle est ensuite le mouvement de \mathcal{S} ?

2) Déterminer les équations du mouvement d'une caisse lourde posée sur un sol horizontal, qu'on pousse.

? \ exercice
de colle

Exercice 8.60

Les règles suivies par la règle

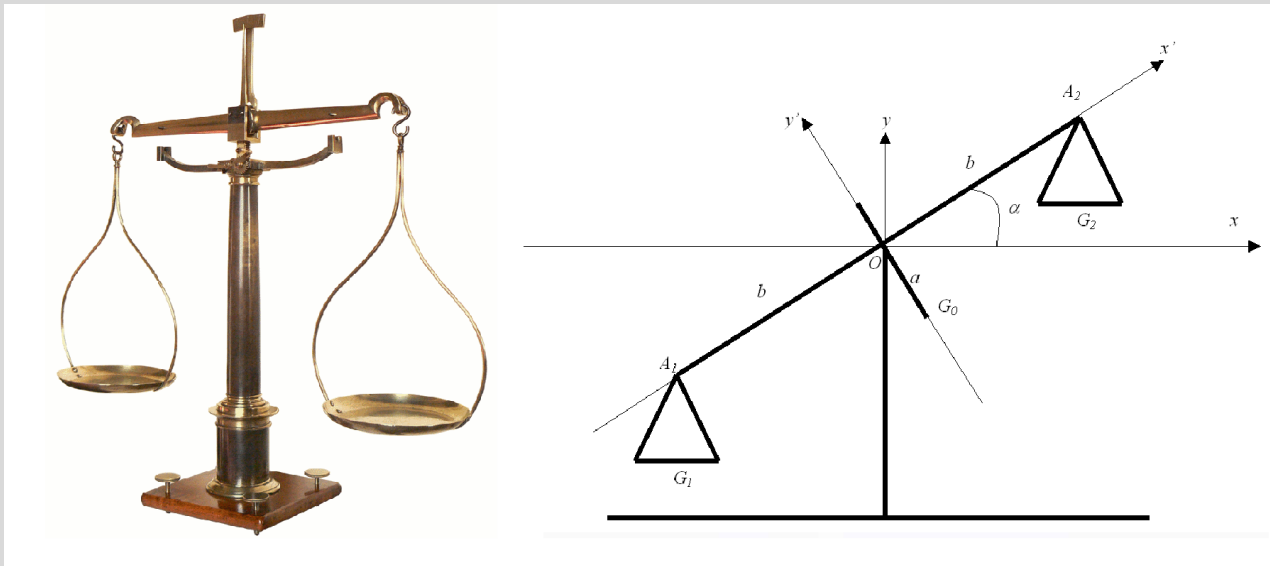


Posez une règle sur vos deux index tendus (qu'on nomme A et B , respectivement à la distance l_A et l_B de G , le centre d'inertie de la règle). Rapprochez vos deux mains l'une de l'autre.

- 1) Imaginons que $l_A < l_B$. Quel doigt démarre ?
- 2) Montrer que pour une certaine distance, le doigt qui bougeait s'arrête et l'autre doigt démarre.
- 3) Question subsidiaire : Pourquoi ne faut-il pas avoir les mains moites ?

exercice de colle

Exercice 8.61
Oscillation d'une balance à plateaux



Une balance à trébuchet est composée (cf. figure) :

- d'un fléau de masse m_0 assimilable à un axe (Ox') , avec une flèche (Oy') , qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (Oz) ;
- d'un premier plateau et de son poids (de masse m_1) suspendu à l'extrémité A_1 du fléau, qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (A_1z) ;
- d'un second plateau et de son poids (de masse m_2) suspendu à l'autre extrémité A_2 du fléau, qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (A_2z) .

On considère un repère cartésien $(Oxyz)$ fixe dans le référentiel du sol, R . L'axe (Oy) est vertical, dirigé vers le haut.

G_0 , le centre d'inertie du fléau est tel que $O\vec{G}_0 = -a.\vec{u}'_y$. Le moment d'inertie du fléau par rapport à l'axe (G_0z) est égal à J . Les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à O , sur l'axe (Ox') tels que $A_1\vec{O} = O\vec{A}_2 = b.\vec{u}'_x$. Au cours du mouvement, les centres d'inertie (respectivement G_1 et G_2) des deux plateaux se trouvent toujours à la verticale des points d'accroche des plateaux (respectivement A_1 et A_2) : $A_1\vec{G}_1 = A_2\vec{G}_2 = -c.\vec{u}_y$.

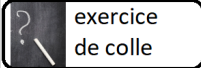
On définit l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u}'_x)$.

1) Déterminer le moment cinétique total $\vec{\sigma}_0$ en O de la balance dans R .

2) Exprimer la position d'équilibre du fléau α_{eq} .

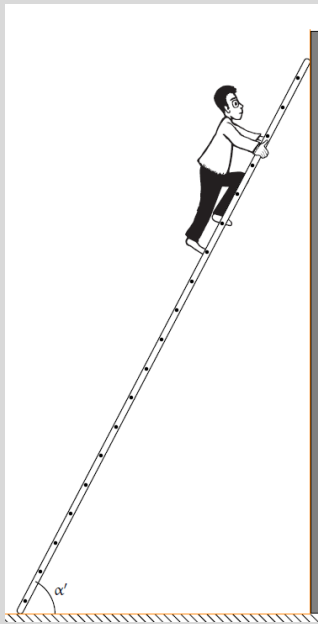
On donne $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$ et $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

3) Quelle est la période T des petites oscillations autour de α_{eq} si $m_1 = m_2$?



exercice
de colle

Exercice 8.62 L'échelle



On considère une échelle de longueur l_0 , appuyée le long d'un mur vertical et posée sur un sol horizontal, faisant un angle α avec le sol. On modélise un homme qui grimpe sur cette échelle par une masse ponctuelle m posée sur une marche à une distance l de l'extrémité basse de l'échelle. On négligera le poids de l'échelle devant celle de l'homme.

1) On suppose que le sol a pour coefficient de frottement statique μ_s et le mur est glissant ($\mu_m = 0$).

1.a) Montrer que les conditions de non glissement de l'échelle aboutissent à : $l < l_{\max}$. Que vaut l_{\max} en fonction de l_0 , μ_s , μ_m et α ? AN : $\mu_s = 1$, $\alpha = 30^\circ$, donner $\frac{l_{\max}}{l}$.

1.b) Comment être sûr de ne pas glisser en montant sur l'échelle ?

2) On suppose maintenant que le sol et le mur ont pour coefficients de frottement statique respectifs μ_s et μ_m .

2.a) Montrer que les conditions de non glissement de l'échelle aboutissent à : $l < l_{\max}$. Que vaut l_{\max} en fonction de l_0 , μ_s , μ_m et α ? AN : $\mu_s = \mu_m = 1$, $\alpha = 30^\circ$, donner $\frac{l_{\max}}{l}$.

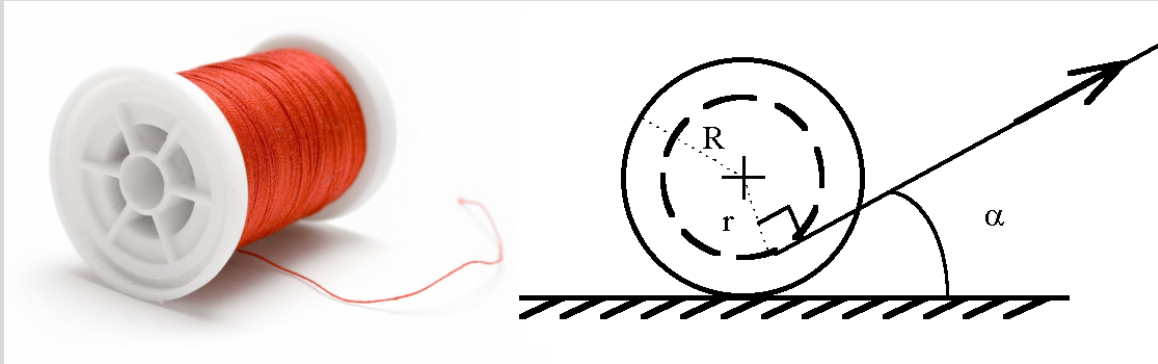
2.b) Montrer que, pour faire tenir l'échelle, le sol est prépondérant.

2.c) Comment être sûr de ne pas glisser en montant sur l'échelle ?

3) Dans le cas où l'échelle glisse, quelle est la courbe parcourue par la masse ponctuelle ?

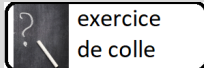
?
exercice
de colle

Exercice 8.63
La bobine de fil



On considère une bobine de fil, posée sur un sol horizontal, cylindrique, de rayon R . Sa masse est m , et son moment d'inertie par rapport à son axe est J . Le fil est enroulé à une distance r de l'axe. On tire sur ce fil avec une force \vec{F} , qui fait un angle α avec l'horizontale.

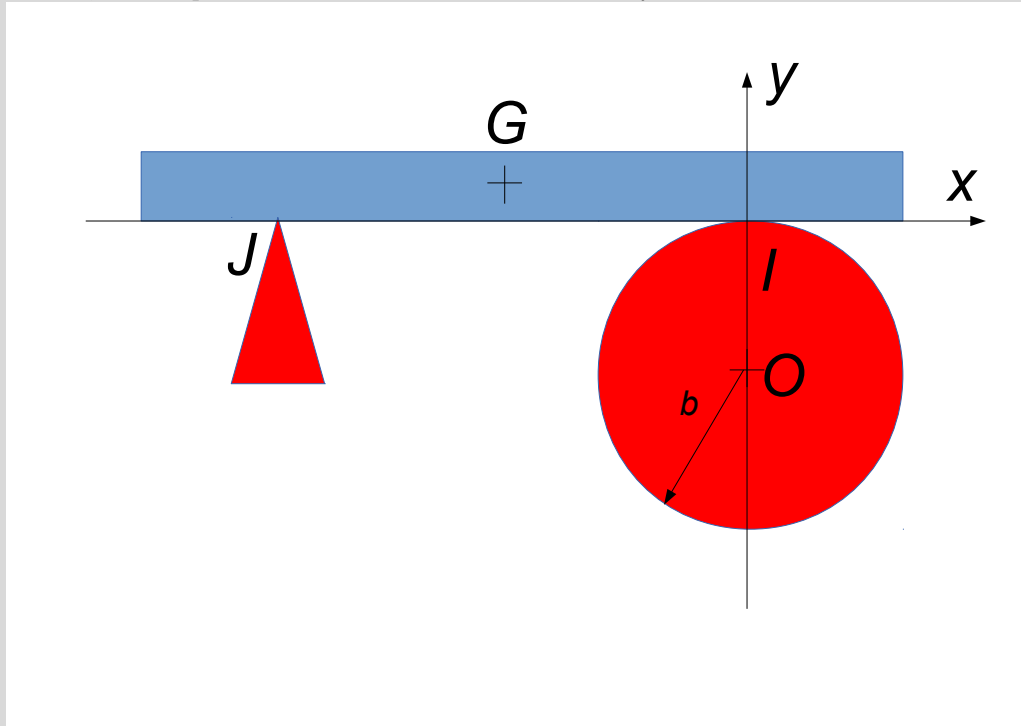
- 1) Montrer que la bobine se met à rouler sans glisser, dans un sens qui dépend de la valeur de α .



Exercice 8.64 Le transfert de planche

(TPE physique 2 - 2013)

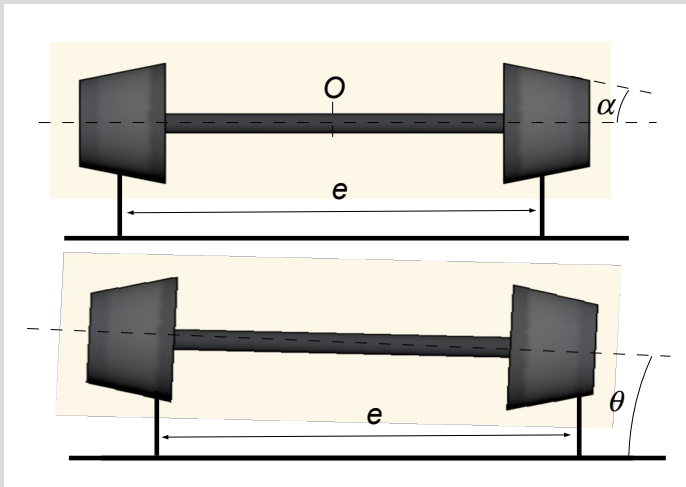
Une plaque homogène, de masse m , de centre d'inertie G , est posée sans vitesse initiale dans le référentiel du sol sur un cylindre de centre O , de rayon $OI = b$ et en un point J , de telle sorte que l'abscisse de G coïncide avec celle de O , soit $x_G(t=0) = 0$. Dans le référentiel du sol, le point J est fixe et le cylindre de centre O est en rotation uniforme autour de son axe fixe Oz à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$. Le contact en J se fait sans frottement, tandis qu'en I le coefficient de frottement est f .



- 1) Montrer que la plaque glisse sur le cylindre à l'instant initial. On supposera que le glissement perdure ensuite jusqu'à ce que la planche tombe, lorsque G se trouve à la verticale de J .
- 2) Déterminer l'équation différentielle suivie par $x_G(t)$ tant que la planche est en contact avec I et J .
- 3) En déduire la date t_0 à laquelle la planche tombe.
- 4) Quelle doit être la condition sur ω pour que le glissement perdure effectivement jusqu'à ce que la planche tombe?

exercice de colle

Exercice 8.65
Les roues des trains et des voitures



Un wagon d'un train roule à la vitesse v_0 . Les rails sont écartés de la distance e . Les roues sont solidairement reliées à un essieu qui tourne à la vitesse angulaire ω . Le wagon est lié au centre de l'essieu. Dans tout l'exercice, on supposera que les roues du train ne glissent pas sur les rails.

1) Position du problème

- 1.a) La voie ferrée est rectiligne. Que vaut ω en fonction de v_0 et r_0 , le rayon des roues?
- 1.b) Le train aborde maintenant un virage de rayon de courbure R ($R \gg e$).

Exprimer la vitesse de la roue à l'extérieur du virage, v_1 en fonction de e , R et v_0 . Exprimer la vitesse de la roue à l'intérieur du virage, v_2 en fonction de e , R et v_0 .

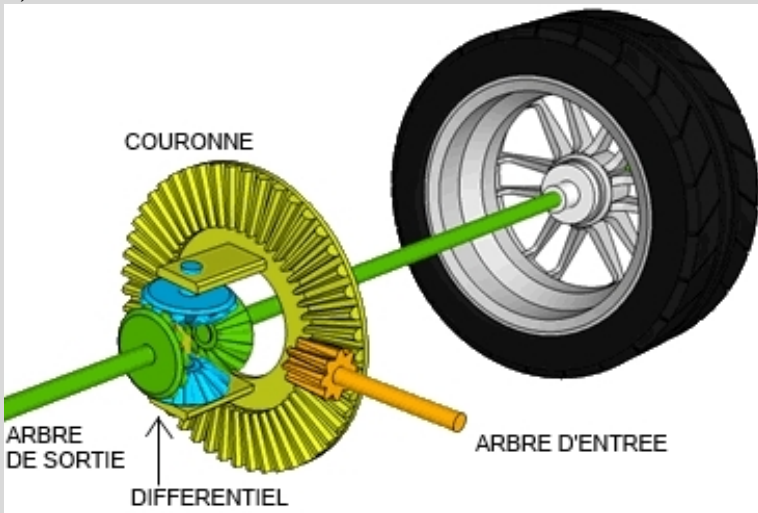
2) Les roues des trains doivent donc avoir des rayons (r_1 et r_2) différents!

- 2.a) Exprimer $\frac{r_1}{r_2}$ en fonction de e et R .

2.b) Proposer une solution technique pour que la dernière condition soit réalisée quelle que soit R (on se rappellera que les trains penchent dans les courbes).

- 2.c) Pourquoi le métro couine-t-il?

3) Différentiels des voitures



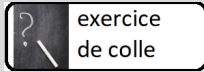
Même s'il s'agit en fait de roues dentées, on va modéliser le différentiel de voiture, qui permet dans un virage aux deux roues de tourner à des vitesses différentes, par

- un cylindre creux, d'axe Oz , de rayon R_2 qui tourne à la vitesse angulaire ω_2 d'une roue;
- un cylindre coaxial, de rayon $R_1 < R_2$ qui a la vitesse angulaire ω_1 de l'autre roue;
- un troisième cylindre de diamètre $R_2 - R_1$, tangent aux deux précédents : il est inclus dans le cylindre de rayon R_2 et roule sans glisser.

- 3.a) Ecrire les deux conditions de non glissement dans le repère cylindrique d'axe (Oz).

- 3.b) En déduire, en fonction de R_2 , ω_2 , R_1 et ω_1 : la vitesse angulaire ω_3 du cylindre de rayon

$R_3 = \frac{R_2 - R_1}{2}$ et la vitesse v_3 de son centre C .



exercice
de colle

Exercice 8.66

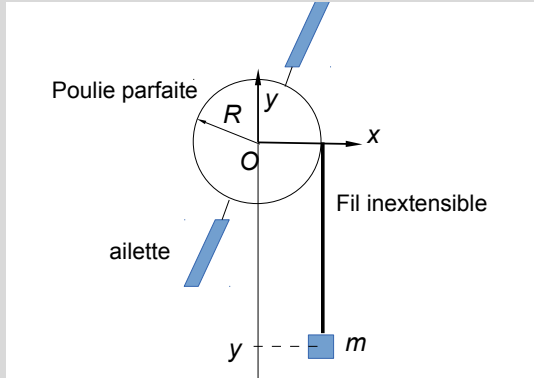
D'anciens dispositifs didactiques pour étudier la chute dans le champ de pesanteur

Avant la possibilité de filmer une chute libre, de nombreux dispositifs didactiques qui utilisaient des poulies étaient utilisés pour vérifier les lois de la mécanique.

1) Préliminaire : poulie parfaite

Comparer les forces exercées sur une corde de part et d'autre d'une poulie parfaite (c'est à dire de masse quasi nulle, et ayant une liaison parfaite sans frottement).

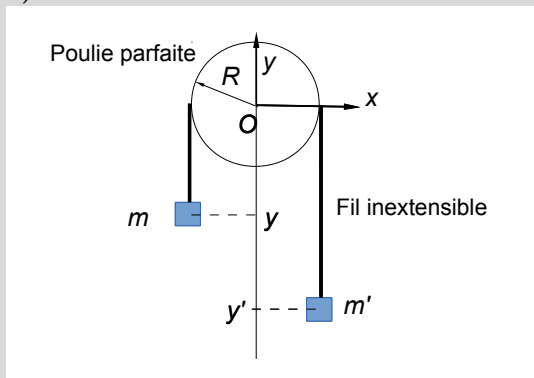
2) Machine de Morin



Un cylindre de rayon R peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y). Des ailettes freinent la rotation du cylindre, lui imposant un moment projeté par rapport à l'axe Oz $-\alpha.\Omega_z$, où α est une constante positive et Ω_z la projection du vecteur rotation du cylindre selon Oz .

Montrer que Ω_z tend vers une constante quand la masse descend.

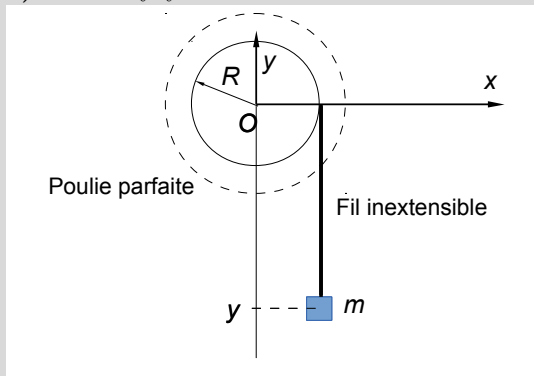
3) Machine d'Atwood



Une poulie parfaite sans masse peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Autour d'elle un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y) à la masse m' dont l'altitude est y' (cf. figure). $m' < m$.

Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.

4) Ancien yoyo



Un cylindre peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui à une distance R de l'axe s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y).

Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.



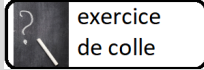
(Centrale 2007)

Exercice 8.67 Boule de bowling



Une sphère de masse m , de rayon r , de moment d'inertie J par rapport à un de ses diamètres, roule sans glisser dans une rigole de largeur $W < 2r$, sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

- 1) Calculer le coefficient de frottement minimal f_{min} pour qu'il y ait roulement sans glissement (on supposera que la force de frottement se fait uniquement suivant la direction de la glissière).
- 2) Décrire le mouvement (en particulier l'évolution temporelle du centre de la boule) pour un coefficient de frottement $f \leq f_{min}$.

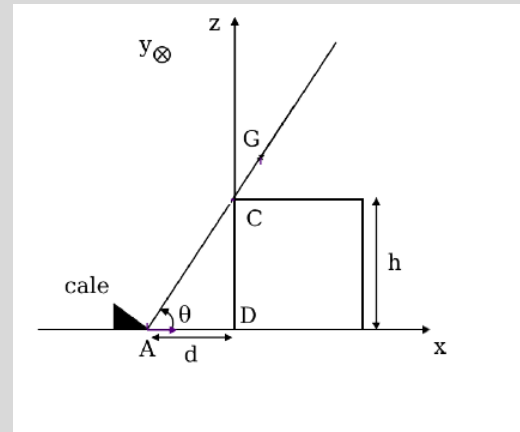


exercice
de colle

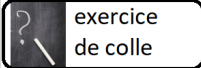
Exercice 8.68 Poutre calée

On s'intéresse à une poutre en bois de centre d'inertie G , posée en A sur le sol, qui repose en C sur un support. On donne :

- $AC = 2$ m ;
- $AG = 3$ m ;
- la distance entre A et la verticale de C :
 $D = 50$ cm.

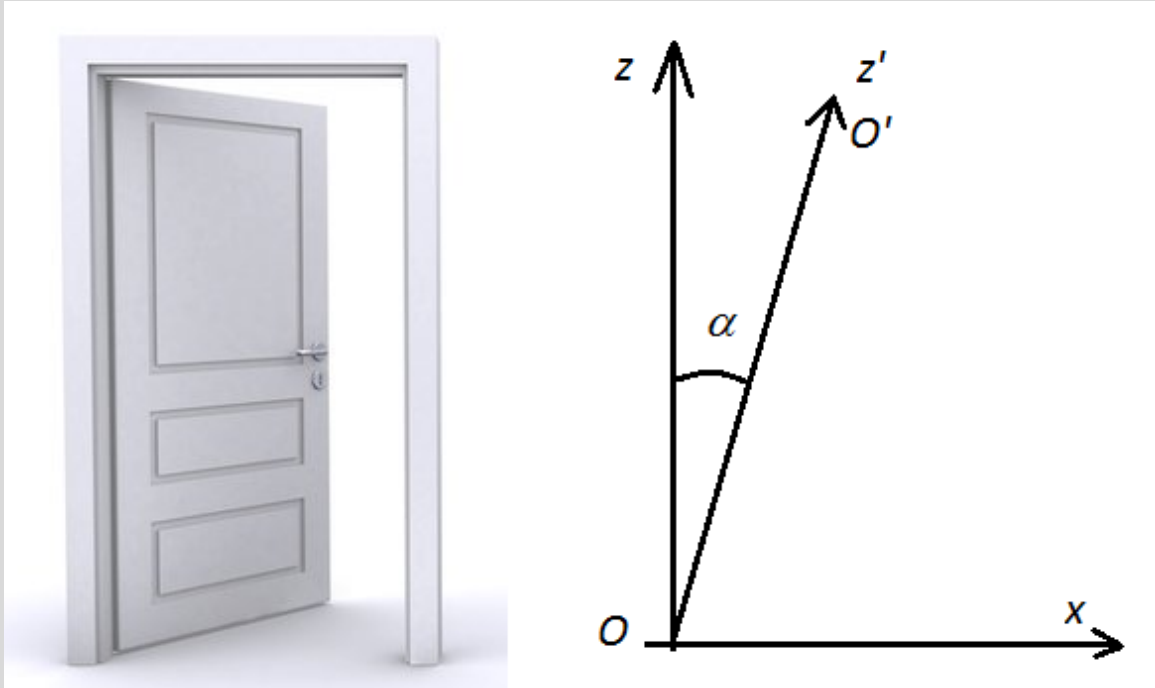


- 1) La poutre peut-elle tenir sans cale ? Quelles sont les positions d'équilibre ?
- 2) On dispose d'une cale en caoutchouc et d'une en métal. Quelle cale convient pour stabiliser la poutre ?
Données : $f_{\text{bois} - \text{caoutchouc}} = 1$; et $f_{\text{bois} - \text{métal}} = 0,5$.



exercice
de colle

Exercice 8.69
Etude d'une porte qui bat



Le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe dans le référentiel terrestre R . Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Une porte est assimilée à une plaque rectangulaire $x'Oz'$, homogène de masse M , de hauteur $h = 2,0\text{m}$ et de largeur $a = 80\text{cm}$, mobile sans frottement autour de (OO') . Par suite d'une malfaçon, le gond O' ne se trouve pas à la verticale du gond O : (OO') fait l'angle $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{u}'_z)$ constant avec la verticale du lieu (Oz) .

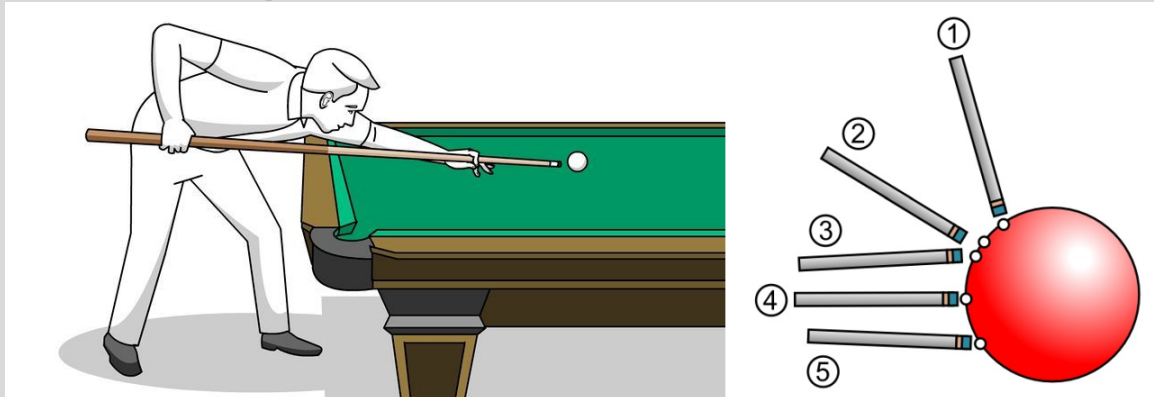
$\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}'_x)$ est l'angle de rotation de la porte autour de ses gonds (l'axe $(Oz') = OO'$ est dans le plan xOz).

- 1) Calculer le moment d'inertie J de la porte par rapport à l'axe OO' .
- 2) Calculer $M_{O'_z}$, la projection suivant \vec{u}'_z du moment du poids de la porte en O dans R .
- 3) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe OO' , trouver l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ de rotation de la porte autour de ses gonds.
- 4) Calculer la période T des petites oscillations de la porte. Application numérique : $\alpha = 1^\circ$.
- 5) Retrouver les cas :
 - 5.a) $\alpha = 0$
 - 5.b) et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

exercice de colle

Exercice 8.70
L'effet rétro billard

D'après l'article wikipédia sur le billard, l'effet « rétro » est obtenu lorsque la bille est frappée dans la position 5. Pendant que la bille glissera sur le tapis, elle tournera dans le sens inverse à son avancement, jusqu'à ce que les frottements du tapis ralentissent cette rotation inverse et rétablissent in fine une rotation naturelle.



On s'intéresse à une boule de billard de centre C et de rayon R , de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}mR^2$ par rapport à ses axes, qui reste toujours en contact avec le tapis horizontal (xOz) . Ce contact est caractérisé par des coefficients de frottement statique et dynamique supposés égaux.

Elle est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_C = v_0 \cdot \vec{e}_x$ et avec un vecteur rotation initial $\vec{\Omega} = \Omega_0 \cdot \vec{e}_z$ (où v_0 et Ω_0 sont positifs).

- 1) Déterminer la vitesse de glissement initiale.
- 2) Montrer que le mouvement de la boule est rectiligne.
- 3) Pour la première phase du mouvement, déterminer la vitesse du centre de la boule et le vecteur rotation de la boule. A quel instant cette phase s'achève-t-elle ?
- 4) Même question pour la deuxième phase du mouvement. A quelle condition la boule revient-elle en arrière (effet rétro) ?

NB : on pourra utiliser, même s'il n'est pas au programme, le théorème du moment cinétique barycentrique :

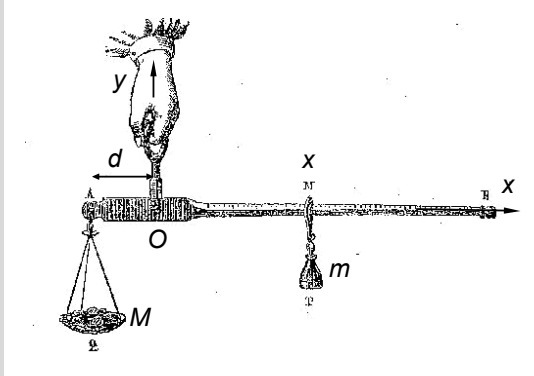
$$J \frac{d\Omega_z}{dt} = \sum M_{Cz}(ext)$$

et, si on a le temps, on pourra le démontrer.

exercice de colle

Exercice 8.71
D'anciennes balances

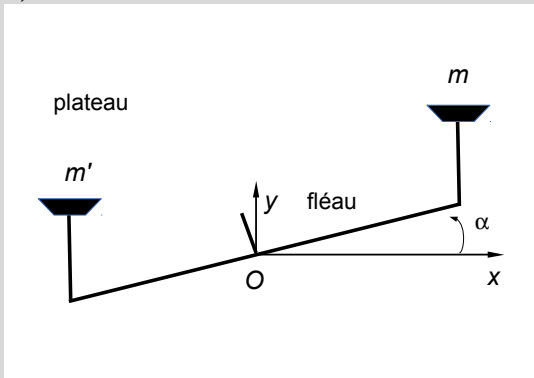
1) Balance romaine



On désire peser la masse inconnue M à l'aide d'une balance romaine (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . La masse M est suspendue à une distance d du point O , tandis qu'une autre masse m est suspendue de l'autre côté à une distance x variable.

Pour $x = x_{eq}$ la balance voit son fléau rester horizontal. Montrer que l'axe Ox du fléau peut être linéairement gradué en kilogrammes.

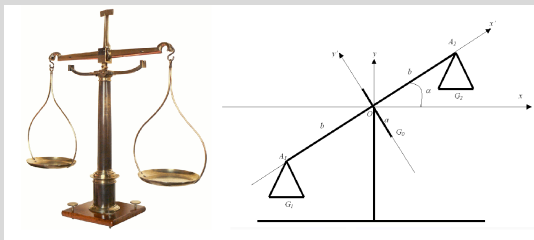
2) Balance Roberval



On désire peser la masse inconnue m à l'aide d'une balance Roberval (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz qui supporte deux plateaux accrochés à une distance d . Un dispositif articulé rend horizontaux les plateaux qui supportent respectivement les masses m et m' .

Quelle est la condition sur m' et m pour que la balance ait son fléau horizontal ?

3) Balance à trébuchet



Une balance à trébuchet est composée (cf. figure) :

- d'un fléau de masse m_0 assimilable à un axe (Ox') , avec une flèche (Oy') , qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (Oz) ;
- d'un premier plateau et de son poids (de masse m_1) suspendu à l'extrémité A_1 du fléau, qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (A_1z) ;
- d'un second plateau et de son poids (de masse m_2) suspendu à l'autre extrémité A_2 du fléau, qui peut tourner sans frottement autour de l'axe (A_2z) .

On considère un repère cartésien $(Oxyz)$ fixe dans le référentiel du sol, R . L'axe (Oy) est vertical, dirigé vers le haut.

G_0 , le centre d'inertie du fléau est tel que $O\vec{G}_0 = -a\vec{u}'_y$. Le moment d'inertie du fléau par rapport à l'axe (G_0z) est égal à J . Les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à O , sur l'axe (Ox') tels que $\vec{A}_1O = \vec{OA}_2 = b\vec{u}'_x$. Au cours du mouvement, les centres d'inertie (respectivement G_1 et G_2) des deux plateaux se trouvent toujours à la verticale des points d'accroche des plateaux (respectivement A_1 et A_2) : $A_1\vec{G}_1 = A_2\vec{G}_2 = -c\vec{u}_y$. On définit l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u}'_x)$.

3.a) Déterminer le moment cinétique total $\vec{\sigma}_0$ en O de la balance dans R .

3.b) Exprimer la position d'équilibre du fléau α_{eq} .

On donne $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$ et $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

3.c) Quelle est la période T des petites oscillations autour de α_{eq} si $m_1 = m_2$?



Exercice 8.72 Le pendule de Foucault à Paris

Le pendule de Foucault à Paris

« Venez voir tourner la Terre, venez la voir jeudi au Panthéon ! » C'est en ces termes que Léon Foucault, homme de science membre de l'Institut, invitait les Parisiens en 1851 à assister à la première expérience démontrant de manière directe, par l'observation des oscillations d'un pendule, la rotation de la Terre sur elle-même.

Extraits de l'article "1851 - Le pendule de Foucault à la une de l'Illustration (journal)", disponible à l'adresse <https://ateliercst.hypotheses.org/612>

Le pendule de Foucault du Panthéon à Paris oscille avec une pulsation propre ω_0 extrêmement proche de celle du pendule simple. La période d'oscillation, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ vaut, si la longueur du fil fait $L = 67$ m, 16,42 secondes.

Le pendule de Foucault oscille quasiment dans un plan qui tourne en raison de la rotation de la Terre. Mais le plan n'effectue un tour complet en 24 heures qu'aux pôles. À une latitude λ donnée, la période, $\frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)}$, inversement proportionnelle au sinus de cette latitude, est plus longue. Cette période définit le jour pendulaire (pendulum day).

La latitude de Paris est $48^\circ 52'N$.

Le champ de pesanteur g vaut $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le pendule que Foucault a installé au Panthéon de Paris en 1851 mesurait 67 mètres et portait une masse de 28 kilogrammes.

La Terre effectue sur elle-même un tour en un jour sidéral qui vaut : $365,2422 / 366,2422 = 0,997269$ jour solaire ; soit $23\text{h } 56'4''$.

On suppose que les angles que fait le pendule par rapport à la verticale sont faibles, de sorte que $z \approx -L = \text{cste}$ et $|x| \ll L$ ainsi que $|y| \ll L$.

On néglige la force de frottement due à l'air aussi le point matériel qui modélise la masse m en M est soumis :

- au poids $m\vec{g} = -m g \vec{e}_z$
- à la tension du fil $\vec{T} = -\frac{T}{L}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \approx -\frac{T}{L}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - L\vec{e}_z)$
- à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{iC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \approx -2m\Omega(\cos\lambda\vec{e}_y + \sin\lambda\vec{e}_z) \wedge (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) \approx -2m\Omega(\cos\lambda\dot{x}\vec{e}_z + \sin\lambda\dot{x}\vec{e}_y - \sin\lambda\dot{y}\vec{e}_x)$$

Les projections du principe fondamental de la dynamique sur les trois axes donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{T}{L}x + 2m\Omega \sin\lambda\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{T}{L}y - 2m\Omega \sin\lambda\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + T - 2m\Omega \cos\lambda\dot{x} \approx 0 \end{cases}$$

1) Préparation

- 1.a) Ouvrir les bibliothèques nécessaires
- 1.b) Définir les constantes dont on aura besoin.
- 1.c) Préparer une tableau à une dimension pour les dates avec un pas et une longueur adaptés.

2) Résolution numérique

- 2.a) Définir le système d'équations différentielles dans une fonction.
- 2.b) Résoudre le système d'équations différentielles avec `odeint` pour déterminer les positions de la masse au bout du pendule pour chacune des dates.

3) Interprétation physique

- 3.a) Tracer l'évolution temporelle d'une projection : l'oscillation se fait-elle bien de façon périodique ?
- 3.b) Observer la trace horizontale du pendule au tout début : passe-t-il par la verticale du point d'accroche ? Est-il dévié vers la droite ou vers la gauche ?
- 3.c) Déterminer la trace du pendule dans son plan horizontal pour plusieurs durées.
- 3.d) Tracer l'évolution de l'angle que fait le plan d'oscillation du pendule avec l'axe Ox au cours du temps.



Exercice 8.73 Le pendule de Foucault à Paris

Le pendule de Foucault à Paris

« Venez voir tourner la Terre, venez la voir jeudi au Panthéon ! » C'est en ces termes que Léon Foucault, homme de science membre de l'Institut, invitait les Parisiens en 1851 à assister à la première expérience démontrant de manière directe, par l'observation des oscillations d'un pendule, la rotation de la Terre sur elle-même.

Extraits de l'article "1851 - Le pendule de Foucault à la une de l'Illustration (journal)", disponible à l'adresse <https://ateliercst.hypotheses.org/612>

Le pendule de Foucault du Panthéon à Paris oscille avec une pulsation propre ω_0 extrêmement proche de celle du pendule simple. La période d'oscillation, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ vaut, si la longueur du fil fait $L = 67$ m, 16,42 secondes.

Le pendule de Foucault oscille quasiment dans un plan qui tourne en raison de la rotation de la Terre. Mais le plan n'effectue un tour complet en 24 heures qu'aux pôles. À une latitude λ donnée, la période, $\frac{2\pi}{\Omega \sin(\lambda)}$, inversement proportionnelle au sinus de cette latitude, est plus longue. Cette période définit le jour pendulaire (pendulum day).

La latitude de Paris est $48^\circ 52'N$.

Le champ de pesanteur g vaut $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le pendule que Foucault a installé au Panthéon de Paris en 1851 mesurait 67 mètres et portait une masse de 28 kilogrammes.

La Terre effectue sur elle-même un tour en un jour sidéral qui vaut : $365,2422 / 366,2422 = 0,997269$ jour solaire ; soit $23\text{h } 56'4''$.

On suppose que les angles que fait le pendule par rapport à la verticale sont faibles, de sorte que $z \approx -L = \text{cste}$ et $|x| \ll L$ ainsi que $|y| \ll L$.

On néglige la force de frottement due à l'air aussi le point matériel qui modélise la masse m en M est soumis :

- au poids $m\vec{g} = -m g \vec{e}_z$
- à la tension du fil $\vec{T} = -\frac{T}{L}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \approx -\frac{T}{L}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - L\vec{e}_z)$
- à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{iC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \approx -2m\Omega(\cos\lambda\vec{e}_y + \sin\lambda\vec{e}_z) \wedge (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) \approx -2m\Omega(\cos\lambda\dot{x}\vec{e}_z + \sin\lambda\dot{x}\vec{e}_y - \sin\lambda\dot{y}\vec{e}_x)$$

Les projections du principe fondamental de la dynamique sur les trois axes donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{T}{L}x + 2m\Omega \sin\lambda\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{T}{L}y - 2m\Omega \sin\lambda\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + T - 2m\Omega \cos\lambda\dot{x} \approx 0 \end{cases}$$

1) Préparation

- 1.a) Ouvrir les bibliothèques nécessaires
- 1.b) Définir les constantes dont on aura besoin.
- 1.c) Préparer une tableau à une dimension pour les dates avec un pas et une longueur adaptés.

2) Résolution numérique

- 2.a) Définir le système d'équations différentielles dans une fonction.
- 2.b) Résoudre le système d'équations différentielles avec `odeint` pour déterminer les positions de la masse au bout du pendule pour chacune des dates.

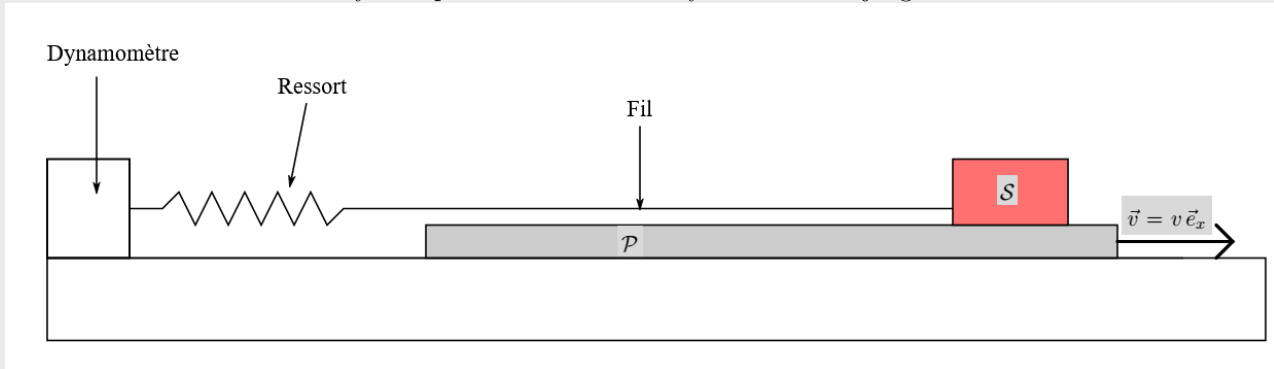
3) Interprétation physique

- 3.a) Tracer l'évolution temporelle d'une projection : l'oscillation se fait-elle bien de façon périodique ?
- 3.b) Observer la trace horizontale du pendule au tout début : passe-t-il par la verticale du point d'accroche ? Est-il dévié vers la droite ou vers la gauche ?
- 3.c) Déterminer la trace du pendule dans son plan horizontal pour plusieurs durées.
- 3.d) Tracer l'évolution de l'angle que fait le plan d'oscillation du pendule avec l'axe Ox au cours du temps.



Exercice 8.74 Etude du frottement solide

L'étude du frottement en dynamique est faite avec un dynamomètre à jauge de déformation.



Un dynamomètre à jauge de déformation est fixé sur la table. Le bloc en bois est relié au dynamomètre par un fil. Un ressort est ajouté pour assouplir la liaison. La plaque est déplacée manuellement à une vitesse constante. La force est enregistrée au cours du temps avec une carte d'acquisition.

D'après le texte disponible à l'adresse <https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/meca/frotexp/frotexp.html>.

On se place dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. O est fixe dans le référentiel du sol où on fera l'étude. \vec{e}_x est horizontal vers la droite, \vec{e}_y est vertical, vers le haut.

On suppose que le support plan \mathcal{P} se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$ par rapport à la table.

Le bloc \mathcal{S} de masse m , situé à l'abscisse $x(t)$. Pour simplifier, on supposera que $x = 0$ quand le ressort a une elongation nulle. Initialement (en $t = 0$), $x(t = 0) = 0$ et il n'y a pas glissement de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{P} .

On assimile le contact entre \mathcal{S} et \mathcal{P} à un contact ponctuel. On utilisera les lois de Coulomb du frottement solide : la force exercée par \mathcal{P} sur \mathcal{S} est $N \vec{e}_y + T_x \vec{e}_x$.

- En cas de non glissement, $|T_x| < \mu_s N$ avec le coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,37$;
- en cas de glissement (dans le cas qui nous intéresse nécessairement vers la gauche), $T_x = \mu_d N$ avec le coefficient de frottement dynamique $\mu_d = 0,25$.

On prendra comme valeurs numériques :

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{et } m = 100 \text{ g et } k = 8,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Le théorème de la quantité de mouvement donne :

- projeté suivant \vec{e}_y : $N = m g$,
- projeté suivant \vec{e}_x : $m \ddot{x} = T_x - k x$.

- Soit il y a non glissement :

$$v_g = \dot{x} - v = 0 \Rightarrow \dot{x} = v \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow T_x = k x, \text{ ce qui s'arrête dès que } |T_x| > \mu_s N \Leftrightarrow x > x_0 = \frac{\mu_s m g}{k}.$$

- Soit il y a glissement :

$$v_g = \dot{x} - v < 0 \Rightarrow T_x = +\mu_d N = +\mu_d m g \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \mu_d g \text{ ce qui s'arrête dès que } v_g > 0 \Leftrightarrow \dot{x} > v.$$

On voit donc que :

$$\begin{cases} \dot{x} \geq 0 \Rightarrow \text{non glissement} \\ x > x_0 = \frac{\mu_s m g}{k} \Rightarrow \text{glissement} \end{cases}$$

1) Préparation du script

1.a) Ouvrir les bibliothèques nécessaires.

1.b) Entrer les valeurs et préparer les tableaux nécessaires au script.

1.c) Ecrire dans le script Python une fonction qui permet de déduire $(\ddot{x}, \dot{x}, \text{glisse})$ de (x, glisse) selon les lois du mouvement.

2) Interprétation physique Pour plusieurs valeurs de v :

2.a) résoudre les équations du mouvement grâce à **odeint**,

2.b) tracer l'évolution de x (qui est proportionnelle à la force mesurée),

2.c) tracer l'évolution de la vitesse de glissement $\dot{x} - v$.



Exercice 8.75 Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford, également connue sous le nom d'expérience de la feuille d'or, menée en 1909 par Hans Geiger et Ernest Marsden sous la direction d'Ernest Rutherford, montra que la partie chargée positivement de la matière est concentrée en un espace de petit volume (maintenant appelé noyau atomique).

L'expérience est réalisée sous vide. De la matière radioactive émettant des particules α (noyaux d'hélium, He^{2+}) est placée dans une boîte et le faisceau de particule α est orienté en direction d'une très fine feuille d'or. Derrière cette couche d'or, un écran est placé ; il est enrichi d'une substance chimique permettant de visualiser, par un scintillement lumineux, la collision par les particules α .

Plusieurs minutes après la disposition du matériel, différents points lumineux apparaissent sur l'écran et ces points ne sont pas tous dans l'orientation du faisceau, mais certains étalés sur de grands angles. Rutherford eut ainsi la surprise d'observer une sorte de rebond des particules α : « C'était presque aussi incroyable que si vous aviez tiré un obus de trois cent soixante-quinze kilos sur un morceau de papier de soie et qu'il était revenu vous frapper ! ».

La majorité des particules α traversent la feuille d'or sans être déviées, mais une partie de ces particules, de l'ordre de 0,01 %, ont été déviées. De cette expérience, nous pouvons déduire que la matière est une structure lacunaire. Elle est constituée essentiellement de vide, et c'est pour cela que la plupart des particules ne sont pas déviées. Il existe des îlots de charge positive (les noyaux) qui repoussent les particules α . L'ordre de grandeur de ces îlots est très petit par rapport à l'atome (de l'ordre de 100 000 fois plus petit).

Dans l'expérience de Rutherford, les valeurs sont :

- la masse de la particule α $m = 6,7 \times 10^{-27}$ kg,
- la charge d'une particule α : $q = 2 \times (1,6 \times 10^{-19})$ C,
- la charge d'un noyau d'or : $q_0 = 79 \times (1,6 \times 10^{-19})$ C,
- la vitesse initiale des particules α : $v_0 = 2 \times 10^7$ m · s⁻¹.

On s'intéresse à une particule chargée (de charge q), peu massive, de masse m présent à l'instant t en $M(t)$, soumis à une force centrale

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p(r)) \text{ où } E_p = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

dans un repère cylindrique de centre O , d'axe Oz , en interaction avec une autre particule fixe en O car beaucoup plus massive (approximation de Born-Oppenheimer), de charge q_0 .

On peut montrer que le mouvement est plan (on le supposera orthogonal à Oz). Les conditions initiales sont caractérisées par le paramètre d'impact b et la vitesse initiale v_0 . Se conservent :

- la projection du moment cinétique $L_{Oz} = m r^2 \dot{\theta}$,
- l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r)$

où l'énergie potentielle effective est $E_{p\text{eff}}(r) = \frac{L_{Oz}^2}{2m r^2} + E_p(r)$. Le moment cinétique est donné par les conditions initiales : $L_{Oz} = -m b v_0$.

Les équations mécaniques sont :

- du fait du moment cinétique : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_{Oz}}{m r^2}$
- du fait de l'énergie mécanique : $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{m} \frac{dE_{p\text{eff}}}{dr}$. On peut mettre tout cela sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ r \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_{Oz}}{m r^2} \\ \dot{r} \\ -\frac{1}{m} \frac{dE_{p\text{eff}}}{dr} \end{pmatrix}$$

1) Préparation du script

1.a) ouvrir les bibliothèques nécessaires

1.b) déclarer les constantes

1.c) à partir de la taille caractéristique du noyau, déterminer numériquement un temps caractéristique qu'on nommera τ .

2) Résolution

2.a) écrire un module de résolution utilisant la méthode d'Euler ayant les mêmes paramètres que la fonction `odeint`,

2.b) déterminer numériquement la trajectoire en utilisant la méthode d'Euler ou la fonction `odeint`.

3) Tracer la trajectoire suivie par le mobile et faire varier le paramètre d'impact (b).