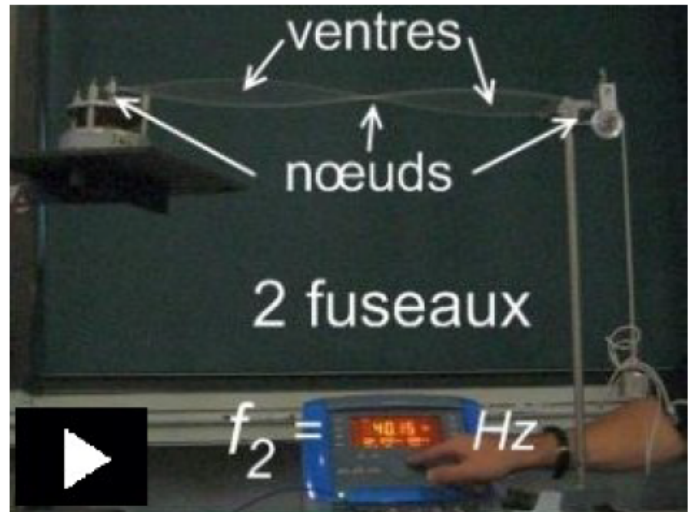
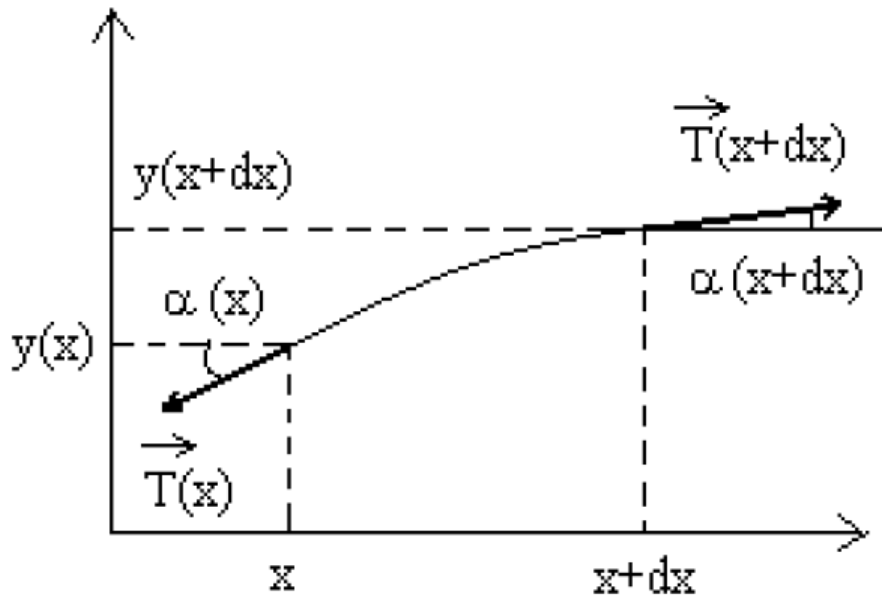


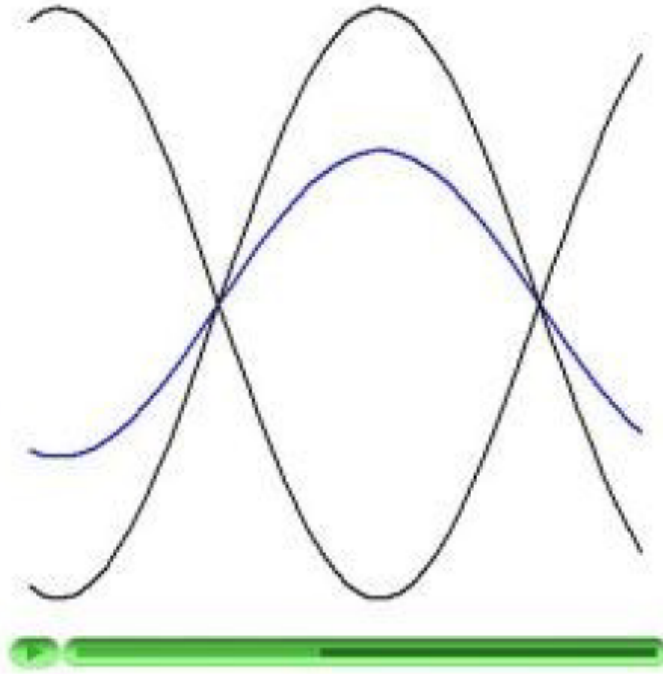
Quel est le timbre d'un instrument à corde ?



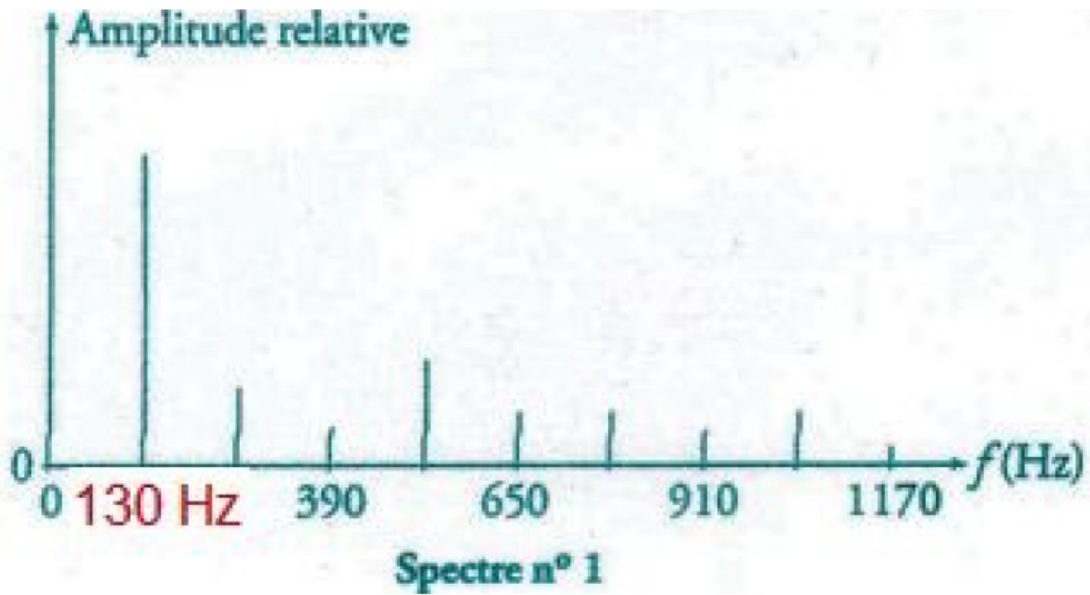
► démontrer l'équation de l'onde sur une corde



► **chercher des solutions
d'ondes stationnaires**



► **déterminer les modes propres
d'une onde stationnaire**



Ondes mécaniques

Les points du cours à connaître

I- Etablissement de l'équation de D'Alembert

1. Onde le long d'une corde

Modélisation d'une corde tendue horizontalement *schéma*

La figure ?? représente On s'intéresse à une corde inextensible principalement suivant un axe Ox tendue avec la tension T_0 , de masse linéique μ_ℓ . On néglige la pesanteur. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(t)$ petit.

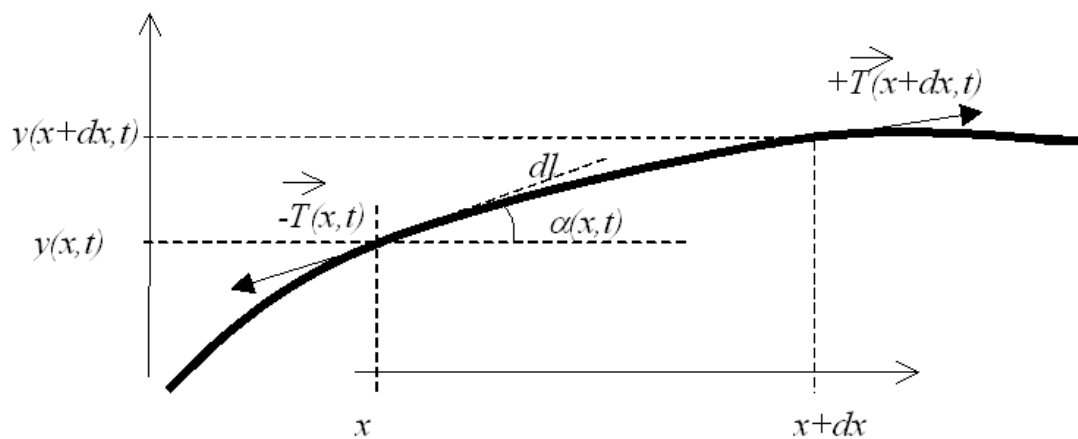


FIGURE 1 – Modélisation d'une corde tendue horizontalement

2. Propagation du son dans un solide

Approximation des milieux continus *définition*

Dans l'approximation des milieux continus, la dimension entre les atomes, ions ou molécules (notée a) et la longueur d'onde λ des ondes acoustiques qui s'y propagent sont telles que

$$a \ll \lambda$$

Elasticité d'un solide *schéma*

La figure ?? représente l'élasticité d'un solide. Une barre solide de section S de longueur au repos ℓ voit cette longueur varier de $\Delta\ell$ sous l'action d'une force \vec{F} .

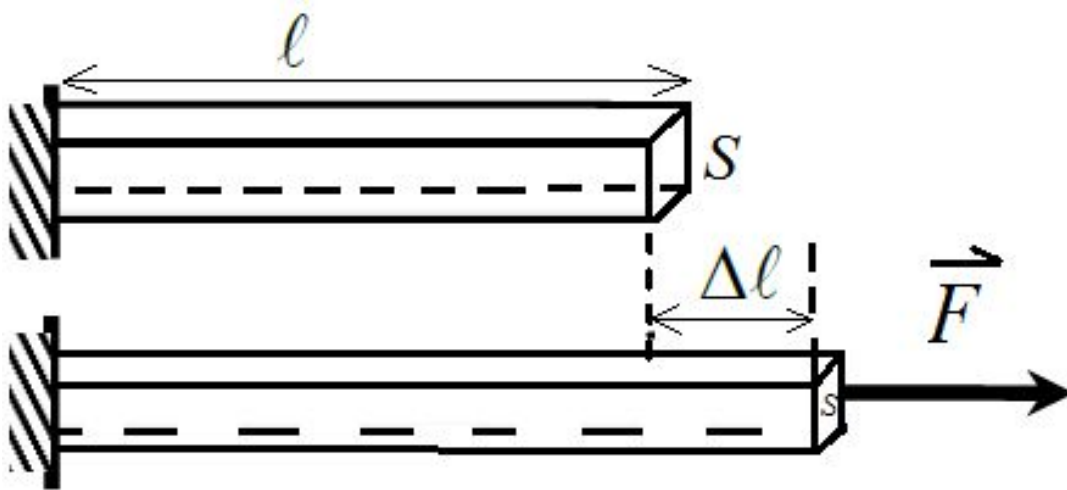


FIGURE 2 – Elasticité d'un solide

♥ Loi de Hooke et module de Young à retenir

La loi de Hooke stipule que la force pour faire varier la longueur ℓ d'une barre solide de section S est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell$:

$$F = E S \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

où E est le module de Young (ou module d'élasticité), typiquement de l'ordre de $E \approx 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

👁 Modélisation d'une tige solide par un milieu continu déformable schéma

La figure ?? représente On s'intéresse à une tige solide de section S , de masse volumique μ , suivant la loi de Hooke avec le module de Young E . On néglige la pesanteur.

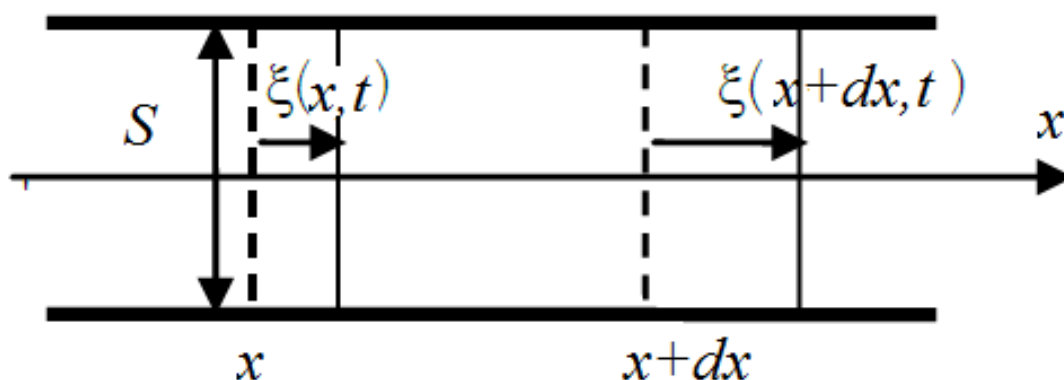


FIGURE 3 – Modélisation d'une tige solide par un milieu continu déformable

👁 Modélisation d'un solide par une chaîne infinie de ressorts schéma

La figure ?? représente On s'intéresse à une chaîne horizontale (d'axe Ox) de ressorts sans masse, tous identiques, de longueur à vide l_0 , de constante de raideur k , séparés par des particules ponctuelles toutes identiques, de masse m . La masse numéro n est à l'abscisse

• $x_n(t)$. On négligera la pesanteur.

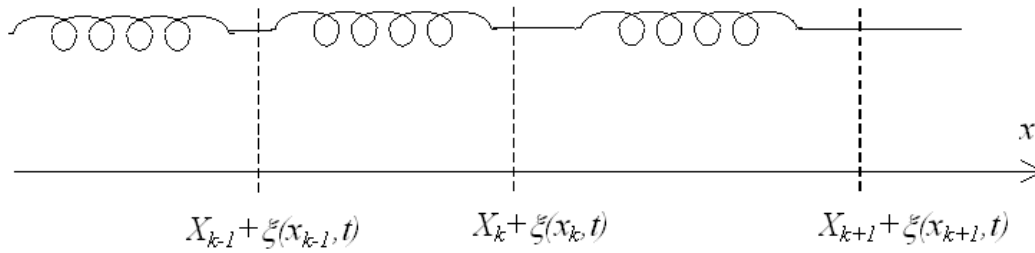


FIGURE 4 – Modélisation d’un solide par une chaîne infinie de ressorts

Valeurs de la vitesse du son dans différents solides *tableau*

| Le tableau ?? présente des vitesses du son dans différents solides.

solide	plomb	plexiglass	cuivre	aluminium	fer	granit
c_0 en km/s	1,2	1,8	3,8	5,1	5,1	6,0

TABLE 1 – Vitesse du son dans différents solides

3. Généralisation : équation de d’Alembert

Equation de d’Alembert *définition*

à une dimension, $\psi(x, t)$ suit l’équation de d’Alembert

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

La célérité de l’onde c_0 s’exprime en $m \cdot s^{-1}$

A trois dimensions, on peut généraliser :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Propriétés de l’équation de D’Alembert *s’y retrouver*

l’équation de d’Alembert est une équation de propagation d’onde. Il s’agit d’une équation aux dérivées partielles en x, y, z et t .

La linéarité de cette équation induit le théorème de superposition. Si ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l’équation de D’Alembert, alors $a_1 \cdot \psi_1 + a_2 \cdot \psi_2$ est aussi solution (avec n’importe quelles constantes a_1 et a_2).

L’équation de D’Alembert est réversible. En effet $t \rightarrow -t$ laisse invariante l’équation. En optique, on parle de la loi du retour inverse de la lumière.

II- Ondes planes stationnaires

1. Ondes planes stationnaires monochromatiques



Onde stationnaire plane *définition*

Dans le cas d'une onde stationnaire plane,

$$\psi(x, t) = F(x) G(t)$$

(les dépendances d'une onde stationnaire vis-à-vis des variables d'espace et de temps sont découplées.)



1 Forme mathématique des ondes stationnaires planes monochromatiques (OSPM) *théorème*

$\psi(x, t) = F(x).G(t)$ vérifie l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, qui devient

$$F''(x) G(t) = \frac{1}{c_0^2} F(x).G''(t) \Leftrightarrow c_0^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de x , le second que de t : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas physiquement acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera $-\omega^2$. On trouve la solution de $\frac{G''(t)}{G(t)} = -\omega^2$: $G(t) = G_0 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_G)$. De même, la solution de $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega^2}{c_0^2}$ est : $F(x) = F_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c_0}.x + \varphi_F\right)$.

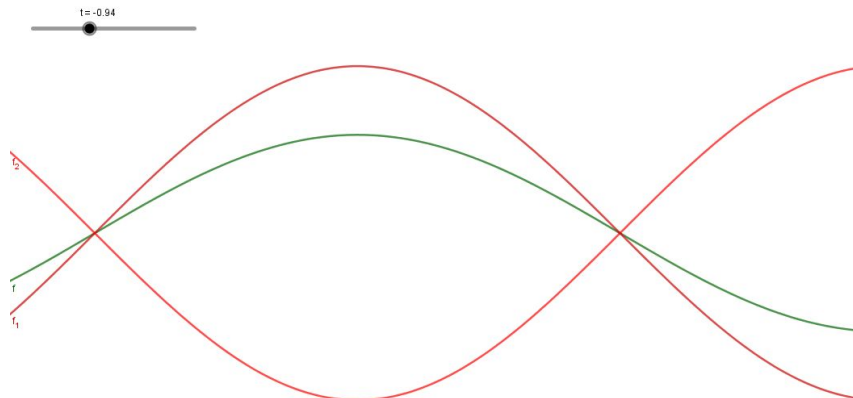
En utilisant la méthode de la séparation des variables, on peut réécrire les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sous la forme

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot \cos(k.x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega.t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$.



Comportement temporel d'une onde stationnaire *animation*



L'onde stationnaire oscille au cours du temps. Elle est comprise entre ses deux enveloppes. Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

**Nœuds de vibration** *définition*

| Les nœuds de vibration sont les endroits où $\psi(x, t) = 0 \forall t$.

**Ventres de vibration** *définition*

| Les ventres de vibration sont les endroits où l'amplitude est maximale.

**2 Espace entre deux nœuds de vibration successifs ou deux ventres** *théorème*

$\cos(k \cdot x_n + \varphi_F) = \cos(k \cdot x_{n+1} + \varphi_F) = 0$ si

$$\begin{cases} k \cdot x_n + \varphi_F = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\ k \cdot x_{n+1} + \varphi_F = \frac{\pi}{2} + (n + 1) \cdot \pi \end{cases}$$

soit $k \cdot (x_{n+1} - x_n) = \pi$, ou bien encore $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$.

de même pour les ventres : $\cos(k \cdot x_k + \varphi_F) = \cos(k \cdot x_{k+1} + \varphi_F) = \pm 1$ si

$$\begin{cases} k \cdot x_k + \varphi_F = k \cdot \pi \\ k \cdot x_{k+1} + \varphi_F = (k + 1) \cdot \pi \end{cases}$$

soit $k \cdot (x_{k+1} - x_k) = \pi$, ou bien encore $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

Deux nœuds de vibration successifs sont éloignés de $\frac{\lambda}{2}$.

Deux ventres de vibration successifs sont éloignés de $\frac{\lambda}{2}$.

**Fuseaux** *s'y retrouver*

| Les fuseaux sont séparés par deux nœuds de vibration. Ils contiennent chacun un ventre de vibration.

| La largeur d'un fuseau est la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs, donc elle vaut $\frac{\lambda}{2}$.

**Fuseau avec un nœud et un ventre de vibration** *schéma*

| La figure ?? représente un fuseau avec un nœud et un ventre de vibration.

2. Modes propres**3 Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités** *théorème*

| Les conditions aux limites pour une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités imposent un nœud aux deux extrémités donc un nombre entier de fuseaux donc

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f = \frac{n c_0}{2 L}$$

\Rightarrow

| Les conditions aux limites pour une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités

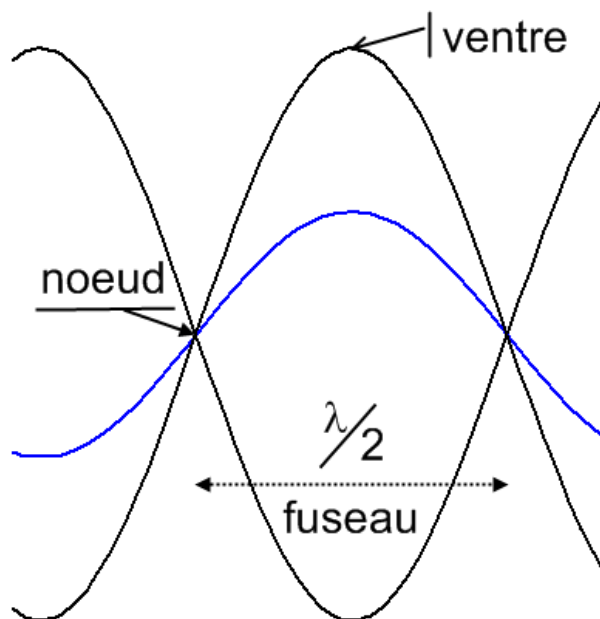



FIGURE 5 – Fuseau avec un noeud et un ventre de vibration

imposent des solutions de types OPSM telles que

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f = \frac{n c_0}{2 L}$$


où n est un entier non nul. Ces solutions sont appelées modes propres de la corde.

 **Résonances sur la corde de Melde** *vidéo*

Une extrémité de la corde vibre, tandis que l’autre est fixe. Les vibrations sont importantes uniquement si la fréquence d’excitation est une fréquence propre de la corde.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

3. Spectre

 **Synthèse de Fourier en OPSM pour une corde fixée à ses deux extrémités** *s’y retrouver*

La solution générale de l’équation d’onde est

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

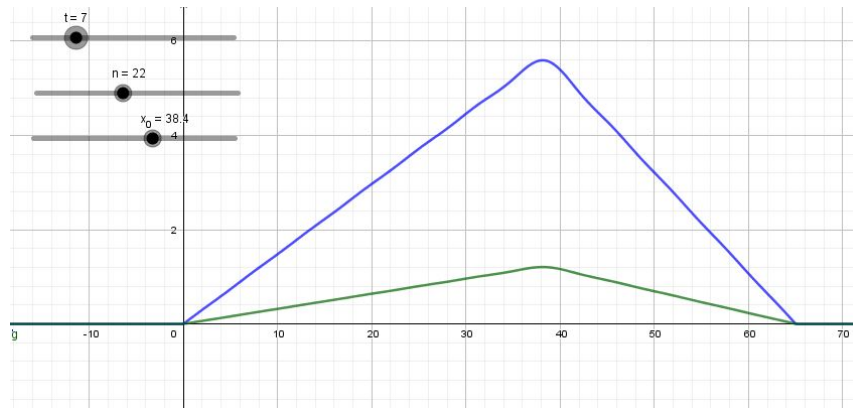
où $k_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}$. On admet que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t = 0) \sin(k_n x) dx$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{dy}{dt}(x, t = 0) \sin(k_n x) dx$$



L'évolution dans le temps d'une corde pincée *animation*



Si on lâche la corde sans vitesse initiale en la pinçant en $x = x_0$, après l'avoir éloignée de la distance y_0 de l'axe Ox , on peut montrer que $B_n = 0 \forall n$ et $A_n = \frac{y_0 L}{x_0(L-x_0)} \sqrt{\frac{2 \sin(k_n x_0)}{L k_n^2}}$.
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.



Définitions physiques relatives à la décomposition de Fourier *s'y retrouver*

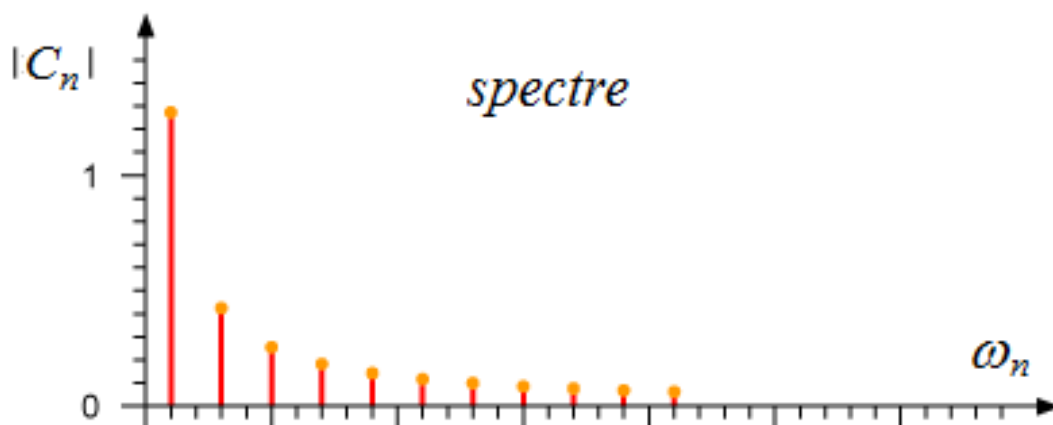
- le continu, la moyenne, l'offset : $f_{\text{continu}} = C_0$;
- l'ondulation : $f_{\text{ond}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$;
- le fondamental : $f_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi_1)$;
- l'harmonique de rang n : $f_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$;
- la valeur efficace : $f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}$ (formule de Parseval).



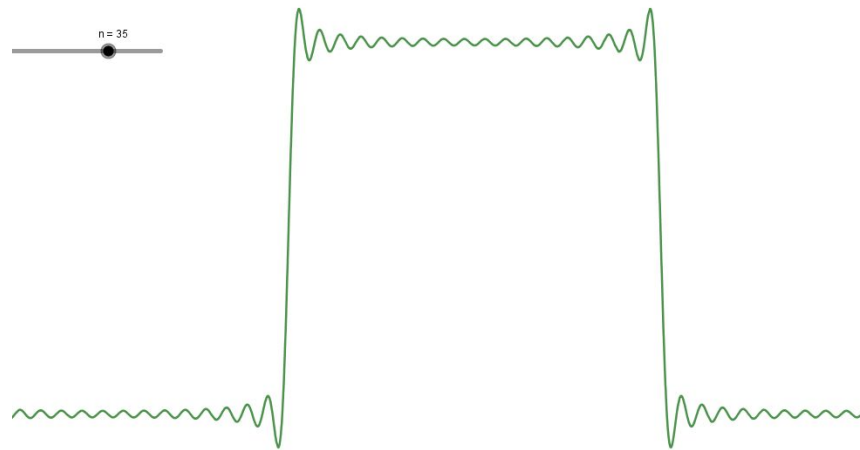
Spectre *définition*

La représentation de $|C_n|$ en fonction de n , ω_n ou de la fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ est le spectre de f .

Exemple de spectre :



Le phénomène de Gibbs *animation*



Il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité : pour représenter convenablement une fonction discontinue, il faudrait une infinité d'harmoniques. Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

III- Ondes planes progressives

1. Ondes planes progressives monochromatiques

Forme d'une OPPM *définition*

Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique, ou encore OPPM)

- vers les x croissants :

$$h_{\omega} = A \cos [\omega t - k x - \varphi_0]$$

- vers les x décroissants :

$$m_{\omega} = A \cos [\omega t + k x - \varphi_0]$$

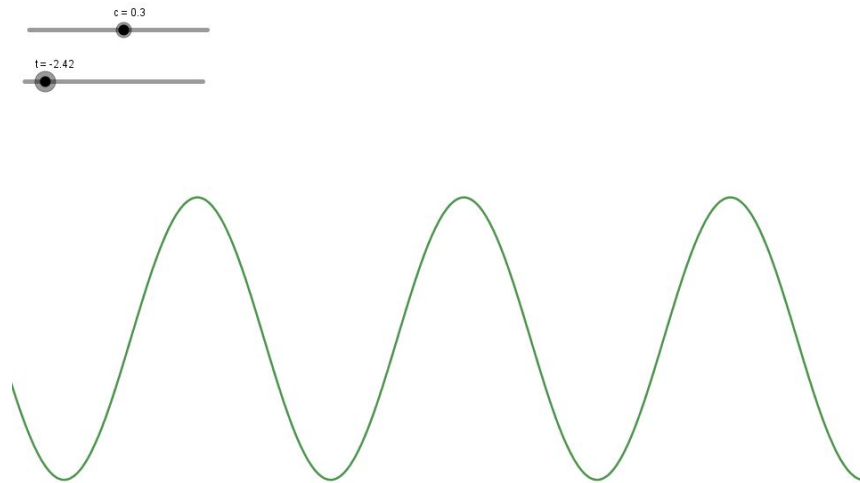
avec $k = \frac{\omega}{c}$.

On peut généraliser avec la forme :

$$\psi = A \cos [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0]$$



Comportement temporel d'une OPPM *animation*



Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) vers les x croissants (resp. décroissant) est un sinus qui se déplace vers la droite (resp. vers la gauche).

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.



Grandeurs temporelles d'une OPPM : pulsation, fréquence, période *définition*

- ω : pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$);
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$: fréquence (en Hz);
- $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$: période (en s).



Grandeurs spatiales d'une OPPM : vecteur d'onde, longueur d'onde, nombre d'onde *définition*

- \vec{k} : vecteur d'onde (en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$);
- $\sigma = \frac{|\vec{k}|}{2\pi}$: nombre d'onde (en m^{-1});
- $\lambda = \frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$: longueur d'onde (en m).



Relation entre OPPM complexe et réelle *définition*

une onde plane progressive monochromatique a pour amplitude :

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\tilde{\psi}(\vec{r}, t) \right)$$

où $\tilde{\psi}$ est l'OPPM complexe associée.

L'amplitude complexe (en \vec{r} , à l'instant t), associée à une onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} est :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

où ψ_0 et φ sont des constantes.

 *remarque*

on aurait pu choisir le complexe conjugué $\psi_0 e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$ qui a la même partie réelle. Mais, une fois choisie la convention, il faut s'y tenir.

 *remarque*


Si l'OPPM se propage suivant \vec{u}_z , $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$, et on peut réécrire :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi)}$$

 **Intérêt des OPPM complexes** *s'y retrouver*

On pourra remplacer l'OPPM réelle ψ par sa forme complexe associée $\tilde{\psi}$ dans toute équation suivie par ψ , pour peu que cette équation soit linéaire. L'intérêt est de rendre, avec les complexes, les calculs... plus simples qu'avec des fonctions trigonométriques !

2. Lien entre ondes progressives et ondes stationnaires

 *remarque*

$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j \cdot k \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$ semble être de la forme $F(x) \cdot G(t)$, cependant seule compte l'onde réelle $\psi = \text{Re}(\tilde{\psi}) = \psi_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$. On voit ainsi qu'il ne s'agit pas d'une onde stationnaire.


 **Ondes stationnaires et réflexion** *s'y retrouver*

cette onde stationnaire peut donc naître en particulier de la réflexion totale d'une OPPM incidente, du fait de la superposition de l'OPPM se propageant vers les x croissants (onde incidente) et de l'OPPM se propageant vers les x décroissants (onde réfléchie).

3. Ondes progressives en général et paquet d'ondes

 **Nécessité d'une superposition d'OPPM** *s'y retrouver*

une OPPM n'est pas physique car elle a une extension infinie dans l'espace et dans le temps. Elle ne finit jamais, et a débuté il y a un temps infini !
L'OPPM est un outil mathématique intéressant car on peut décomposer une onde sous la forme de superposition d'OPPM.

 **4 Forme d'une onde plane progressive en général** *théorème*

On cherche des solutions à l'équation de D'Alembert :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) = 0$$

Si on pose $u = t - \frac{x}{c_0}$, $\frac{\partial h(u)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dh}{du}$ et $\frac{\partial h(u)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{c_0} \frac{dh}{du}$.

De même, si $v = t + \frac{x}{c_0}$, $\frac{\partial m(v)}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dm}{dv}$ et $\frac{\partial m(v)}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \frac{dm}{dv}$.

$h\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ et $m\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ sont donc solutions de l'équation de D'Alembert. \Rightarrow

Une onde plane progressive vers les x croissants peut s'écrire :

$$\psi(x, t) = h\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

Une onde plane progressive vers les x décroissants peut s'écrire :

$$\psi(x, t) = m\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$



Forme mathématique d'un paquet d'onde *définition*

La décomposition continue d'une onde plane complexe se propageant suivant Ox par une superposition d'OPPM peut s'écrire

$$\tilde{\psi} = \int_0^{\infty} \tilde{A}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

où $\tilde{A}(\omega)$ est le spectre de cette onde.



Extension d'un paquet d'ondes *s'y retrouver*

Bien souvent $\tilde{A}(\omega) \neq 0$ dans un domaine très limité, de largeur $\Delta\omega$: on parle de paquet d'ondes.

Dans le domaine des fréquences, le paquet d'ondes a une extension $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$.



Paquet d'ondes *schéma*

La figure ?? représente un paquet d'ondes. Il a été généré en superposant une vingtaine d'OPPM.



Spectre et transformée de Fourier *s'y retrouver*

On peut montrer que le paquet d'onde a, en un endroit, une durée Δt telle que

$$\Delta t \Delta\omega \approx 1$$

De la même façon, un instantané montrerait que l'extension spatiale de l'onde est Δx , reliée à la largeur en vecteur d'onde Δk par :

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

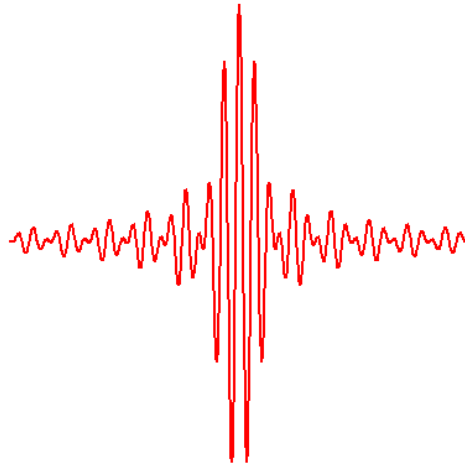
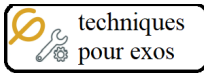


FIGURE 6 – Paquet d’ondes



Valeurs numériques (compléments) Ondes mécaniques

- Dans l’approximation des milieux continus, la dimension entre les atomes, ions ou molécules (notée a) est : $a \approx 10^{-10}$ m dans un milieu dense (solide ou liquide)
- Module de Young (ou module d’élasticité), typiquement de l’ordre de : $E \approx 10^{11}$ N · m⁻² dans un solide.
- Valeurs de la vitesse du son dans différents solides : $c_0 \approx 10^3$ m · s⁻¹



techniques
pour exos

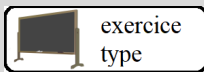
Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Etablir une équation de propagation dans un milieu continu

- On part de l'étude d'un petit élément de longueur dx .
- On fait le bilan des forces, en prenant bien garde à faire la différence entre les actions qui s'exercent à gauche ($-\vec{F}(x)$) et à droite ($+\vec{F}(x+dx)$).
- On applique la loi de la dynamique qui convient (de la quantité de mouvement ou du moment cinétique).
- On projette pour trouver l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ avec la célérité de l'onde c_0 .

Etablir une équation de propagation dans un milieu discontinu

- On part de l'étude d'un élément n , on observe l'équilibre, puis ce qui se passe hors équilibre, ce qui donne une équation de récurrence sur les déformations.
- Ensuite, on utilise l'hypothèse des milieux continus en faisant un développement limité au deuxième ordre des déformations pour les éléments n , $n-1$ et $n+1$.
- On réinjecte dans la relation de récurrence pour trouver l'équation de propagation.



exercice
type

Exercice 9.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

établir l'équation de d'Alembert pour des ondes mécaniques

On étudie la propagation selon l'axe (Ox) des déformations locales de la Terre, qu'on assimile à une tige. On note E le module de Young et ρ_0 la masse volumique du matériau qui la constitue. On néglige l'influence de la pesanteur. Le solide est immobile au repos.

On note $\vec{u}(M, t)$ le vecteur déplacement, à un instant quelconque, d'un élément de solide, en M . On restreint l'étude aux ondes planes se propageant selon \vec{e}_x , et aux déformations bidimensionnelles :

$$\vec{u}(x, t) = u_x(x, t) \vec{e}_x + u_y(x, t) \vec{e}_y.$$

Avec une onde plane, $\vec{u}(x, t)$, il n'apparaît des contraintes que sur les surfaces normales à \vec{e}_x .

1) Ondes de compression (appelées ondes P)

La section de la tige qui, au repos, se situe à l'abscisse x , se trouve, à l'instant t , **déplacée** d'une quantité algébrique $u(x, t)$ lorsque la tige est déformée. On se limite à de petites déformations : $|u(x, t)| \ll L$ et $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \ll 1$. On ne gardera que des termes du premier ordre en $u(x, t)$ et en ses dérivées.

1.a) Expliquer pourquoi la déformation envisagée est qualifiée de longitudinale. Pourquoi parle-t-on de compression ? Pour quelle raison se limite-t-on à de faibles déformations ?

On note $\vec{F}_P(x_0, t)$ la force que la partie droite de la tige ($x > x_0$) exerce sur la partie gauche ($x < x_0$) à l'abscisse x_0 et à l'instant t .

1.b) Rappeler l'expression de cette force en fonction du module de Young E , de la section S et de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)$.

1.c) On étudie le mouvement de l'élément de tige situé au repos entre les abscisses x et $x+dx$, la quantité dx étant choisie très petite devant la distance caractéristique de variation de $u(x, t)$.

Montrer que le déplacement $u(x, t)$ vérifie une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la célérité c_P en fonction de E et de ρ_0 .

2) Ondes de cisaillement (ondes S)

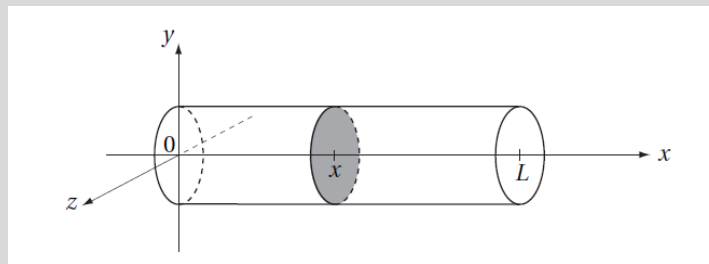
On se limite maintenant à la mise en équation des déformations transverses de cisaillement. On considère donc uniquement : $\vec{u}(x, t) = u_y(x, t) \vec{e}_y$. La force élastique exercée par la partie **droite** ($x > x_0$) sur la partie **gauche** ($x < x_0$), contient une composante de cisaillement, orientée selon \vec{e}_y s'écrivant :

$$d\vec{F} = \mu \frac{du_y}{dx}(x_0, t) dS \vec{e}_y,$$

où μ est un des coefficients de Lamé. Il s'agit d'une constante positive, qui décrit l'élasticité du milieu considéré. Cette action mécanique est à l'origine des déformations de cisaillement.

2.a) Justifier à l'aide d'un schéma pourquoi on utilise le mot de *cisaillement*. Donner l'unité du coefficient de Lamé μ .

2.b) Montrer que la déformation $u_y(x, t)$ vérifie une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité correspondante c_S .



1) Ondes de compression

1.a) pourquoi la déformation envisagée est qualifiée de longitudinale : dans la direction de propagation.

Pourquoi parle-t-on de compression : variation locale du volume de la tige (compression-dilatation)

Pour quelle raison se limite-t-on à de faibles déformations : c'est un solide, donc un corps quasi-incompressible.

1.b) La loi de Hooke stipule que la force pour faire varier la longueur ℓ d'une barre solide de section S est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell$:

$$F = E S \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

où E est le module de Young (ou module d'élasticité), typiquement de l'ordre de $E \approx 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Dans notre cas, si on s'intéresse à un système de longueur $\ell = dx$, la longueur du système allongé est

$$\ell' = [(x + dx) + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)] = \ell + \frac{\partial u}{\partial x} dx \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Ainsi, la force est

$$F = E S \frac{\Delta\ell}{\ell} = E S \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx}$$

donc $F = E S \frac{\partial u}{\partial x}$.

1.c) On s'intéresse au système de section S compris entre les abscisses x et $x + dx$. Le théorème de la résultante cinétique donne

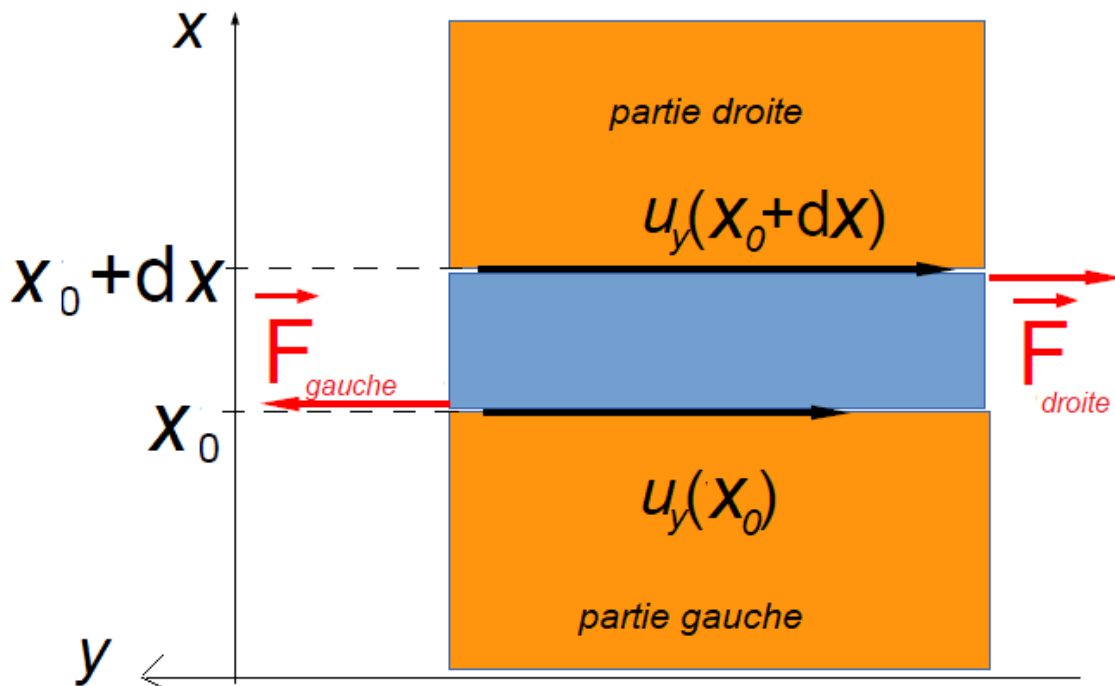
$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_x(x + dx, t) - F_x(x, t) = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$$

En remplaçant par la loi de Hooke

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(E S \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

on trouve donc bien $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ avec $c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$.

2) Les ondes de cisaillement



2.a)

Dimension du paramètre μ :

$$[\mu] = \frac{[\text{force}] \cdot (\text{L} \cdot \text{L}^{-1})}{\text{L}^2} = [\text{force}] \cdot \text{L}^{-2} = [\text{force}] \text{L}^{-2}$$

donc μ est homogène à une pression et s'exprime en pascals.

2.b) Système : le parallélépipède élémentaire de volume $d\tau$, compris entre x_0 et $x_0 + dx$, y_0 et $y_0 + dy$ et z_0 et $z_0 + dz$.

Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

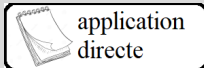
Bilan des forces :

- la force due à la surface de gauche : $\vec{F}_{gauche} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) dy dz \vec{e}_x$
- la force due à la surface de droite : $\vec{F}_{droite} = +\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + dx, t) dy dz \vec{e}_x$

Théorème de la quantité de mouvement projeté suivant \vec{e}_y :

$$\rho_0 dx dy dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho_0 dx dy dz \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}(x_0, t) dy dz + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}(x_0 + dx, t) dy dz = +\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz$$

C'est bien une équation de D'Alembert avec la célérité $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$.



application
directe

Exercice 9.2 pour s'entraîner

Corde tendue horizontalement

On s'intéresse à une corde inextensible principalement suivant un axe Ox tendue avec la tension T_0 , de masse linéique μ_l . Montrer que l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t suit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . On négligera l'effet de la pesanteur. Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(t)$ petit.

Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

dont la projection suivant \vec{u}_x donne :

$$\mu_l dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

Aussi, on pourra considérer $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$, constante. Donc, la projection suivant \vec{u}_y de la tension est $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$, ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Comme l'angle est $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ on en déduit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$.



application
directe

Exercice 9.3 pour s'entraîner

Chaîne de ressorts

On s'intéresse à une chaîne horizontale (d'axe Ox) de ressorts sans masse, tous identiques, de longueur à vide l_0 , de constante de raideur k , séparés par des particules ponctuelles toutes identiques, de masse m . La

masse numéro n est à l'abscisse $x_n(t)$. On néglige la pesanteur.

- 1) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

- 1) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = 0 = -k \cdot (X_n - X_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} - X_n - l_0)$$

- 2) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k \cdot (X_n + \xi_n - X_{n-1} - \xi_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} + \xi_{n+1} - X_n - \xi_n - l_0)$$

En prenant en compte ce qui se passe à l'équilibre, on trouve :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \cdot \xi_n)$$

- 3) Dans l'approximation des milieux continus, on va pouvoir écrire que la déformation ξ_n varie lentement devant a :

$$\xi_n(t) = \psi(x \approx n \cdot a, t)$$

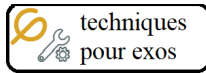
Aussi, on pourra déterminer la déformation en $x \approx (n-1) \cdot a$ et en $x \approx (n+1) \cdot a$

$$\begin{cases} \xi_{n+1}(t) = \psi(x \approx (n+1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) + \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \\ \xi_{n-1}(t) = \psi(x \approx (n-1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformation devient alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec $c_0 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Ondes stationnaires pour un milieu fini

Si le milieu est **fini**, on choisira des solutions stationnaires, superpositions d'OPSM :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$.

Ondes progressives pour un milieu infini

Si le milieu est **infini**, on choisira des solutions progressives, superpositions d'OPPM : $\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\psi}(\vec{r}, t))$ où $\underline{\psi}$ est l'OPPM complexe associée, de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} :

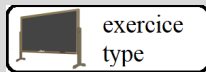
$$\underline{\psi} = \psi_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

on aurait pu choisir le complexe conjugué $\psi_0 e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$ qui a la même partie réelle. Mais, une fois choisie la convention, il faut s'y tenir.

Conditions aux limites

Pour déterminer les constantes, il faut les conditions aux limites :

- si le milieu est fixe en $x = x_0$: $\psi(x = x_0, t) = 0$;
- si le milieu est libre en $x = x_0$: la force est nulle ;
- si le milieu est attaché à un objet qui bouge en $x = x_0$: il faut faire une étude mécanique de cet objet.



Exercice 9.4 (le prof fait cet exercice type jeudi) solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert

On s'intéresse à une chaîne horizontale (d'axe Ox) de ressorts sans masse, tous identiques, de longueur à vide l_0 , de constante de raideur k , séparés par des particules ponctuelles toutes identiques, de masse m . La masse numéro n est à l'abscisse $x_n(t)$. On négligera la pesanteur.

1) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

1) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = 0 = -k \cdot (X_n - X_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} - X_n - l_0)$$

2) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k \cdot (X_n + \xi_n - X_{n-1} - \xi_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} + \xi_{n+1} - X_n - \xi_n - l_0)$$

En prenant en compte ce qui se passe à l'équilibre, on trouve :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \cdot \xi_n)$$

3) Dans l'approximation des milieux continus, on va pouvoir écrire que la déformation ξ_n varie lentement devant a :

$$\xi_n(t) = \psi(x \approx n \cdot a, t)$$

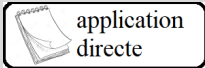
Aussi, on pourra déterminer la déformation en $x \approx (n - 1) \cdot a$ et en $x \approx (n + 1) \cdot a$

$$\begin{cases} \xi_{n+1}(t) = \psi(x \approx (n + 1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) + \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \\ \xi_{n-1}(t) = \psi(x \approx (n - 1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformation devient alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

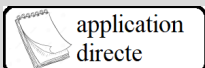
avec $c_0 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Exercice 9.5 pour s'entraîner
Forme des ondes planes progressives

- 1) Montrer que $\psi(t, x) = f(x - c_0.t)$ ou $h\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$ est solution de l'équation de D'Alembert.
- 2) De même, montrer que $\psi(t, x) = g(x + c_0.t)$ ou $m\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ est aussi solution de l'équation de D'Alembert.

- 1) On va chercher $f(t, x) = f(u)$, où u est une fonction de x et de t . Comme f est telle que $(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}) f(t, x) = 0$, on en déduit $(\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{df}{du} = 0$. On voit que $u = x - c_0.t$ convient.
- 2) On va chercher maintenant $g(t, x) = g(v)$, où v est une fonction de x et de t . Comme g est telle que $(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}) g(t, x) = 0$, on en déduit $(\frac{\partial v}{\partial t} - c_0 \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{dg}{dv} = 0$. On voit que $v = x + c_0.t$ convient.



Exercice 9.6 pour s'entraîner
Réécriture de l'équation de D'Alembert à une dimension

- 1) montrer que l'équation de D'Alembert à une dimension peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \psi = 0$$

où les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sont de type :

- $\psi = cste$, qu'on exclut habituellement ;
 - $\psi = f(u)$;
 - $\psi = g(v)$.
- 2) Quel sens donner à ces deux types de solutions ?

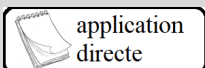
$$1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \text{ en}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi = 0$$

Les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sont de type :

- $\psi = cste$, qu'on exclut habituellement ;
- $\psi = f(t, x)$, telle que $(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}) f(t, x) = 0$;
- $\psi = g(t, x)$, telle que $(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}) g(t, x) = 0$.

- 2) Les premières sont des OPP se propageant vers les x croissants ; les secondes vers les x décroissants.



Exercice 9.7 pour s'entraîner
Vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique

On définit la vitesse de phase comme la vitesse à laquelle il faut se déplacer pour que la phase $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi$ soit constante.

- 1) Déterminer la vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique vers la droite.
- 2) Même chose pour une onde plane progressive monochromatique vers la gauche.

- 1) Dans le premier cas, $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$, pour peu que

$$\omega t - kx - \varphi = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) - \varphi$$

Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant $t + \Delta t$ qu'à l'instant t , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de $+\Delta x$, avec

$$\Delta x = \frac{\omega}{k} \Delta t = +c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les x croissants, avec une vitesse $\frac{\Delta x}{\Delta t} = +c_0$

2) Dans le deuxième cas, $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$, pour peu que $x + c_0 \cdot t = x + \Delta x + c_0 \cdot (t + \Delta t)$. Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant $t + \Delta t$ qu'à l'instant t , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de Δx , avec

$$\Delta x = -c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les x décroissants, avec une vitesse algébrique $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -c_0$.



Exercice 9.8 pour s'entraîner

Vitesse de phase d'une onde plane progressive

On définit la vitesse de phase comme la vitesse $\vec{v}_\varphi = v_x \vec{u}_x$ à laquelle il faut se déplacer pour qu'on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant $t + \Delta t$ qu'à l'instant t , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de $v_x \Delta t$.

- 1) Déterminer la vitesse de phase d'une onde plane progressive vers la droite.
- 2) Même chose pour une onde plane progressive vers la gauche.

1) Dans le premier cas, $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$, pour peu que $x - c_0 \cdot t = x + \Delta x - c_0 \cdot (t + \Delta t)$. Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant $t + \Delta t$ qu'à l'instant t , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de $+\Delta x$, avec

$$\Delta x = +c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les x croissants, avec une vitesse $\frac{\Delta x}{\Delta t} = +c_0$

2) Dans le deuxième cas, $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$, pour peu que $x + c_0 \cdot t = x + \Delta x + c_0 \cdot (t + \Delta t)$. Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant $t + \Delta t$ qu'à l'instant t , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de Δx , avec

$$\Delta x = -c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les x décroissants, avec une vitesse algébrique $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -c_0$.



Exercice 9.9 pour s'entraîner

Onde progressive sur une corde

Soit une corde horizontale tendue de $x = 0$ à $x = L$, telle que l'élongation verticale $y(x, t)$ suit l'équation de D'Alembert avec la célérité c .

1) On excite la corde en $x = 0$ par $y(0, t) = e(t)$ telle que :

- si $0 < t < \tau$, $e = \frac{at}{\tau}$;
- si $\tau < t < 3\tau$, $e = a$;
- si $3\tau < t < 5\tau$, $e = \frac{a}{2\tau} (5\tau - t)$;
- si $t > 5\tau$, $e = 0$.

Représenter $e(t)$.

On se place dans le cas où $c \cdot \tau = 0, 1L$.

2) On suppose d'abord que $t = 6\tau$.

2.a) Représenter la corde à cette date.

2.b) Donner la valeur de la vitesse en $x = 0, 2L$, $x = 0, 4L$ et $x = 0, 55L$.

3) On suppose maintenant que $t = 7\tau$. Représenter la corde à cette date.

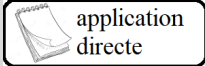
1) Deux pentes et un plateau.

2)

2.a) Une onde plane progressive suivant les x croissants se propage. Le graphique de $e(t)$ est retourné.

2.b) En $x = 0, 2L$ $v = -\frac{a}{2\tau}$ la corde redescend! ; en $x = 0, 4L$, $v = 0$ et en $x = 0, 55L$, $v = \frac{a}{\tau}$ la corde monte.

3) Une onde plane progressive suivant les x croissants se propage. Le graphique précédent est décalé de $0, 1L$ vers la droite. Comme le milieu est non dispersif, le paquet d'ondes ne se déforme pas!



Exercice 9.10 pour s'entraîner

Onde régressive sur une corde

Soit une corde horizontale tendue de $x = 0$ à $x = L$, telle que l'élongation verticale $y(x, t)$ suit l'équation de D'Alembert avec la célérité c .

1) On excite la corde en $x = L$ par $y(0, t) = e(t)$ telle que :

- si $0 < t < \tau$, $e = \frac{at}{\tau}$;
- si $\tau < t < 3\tau$, $e = a$;
- si $3\tau < t < 5\tau$, $e = \frac{a}{2\tau} (5\tau - t)$;
- si $t > 5\tau$, $e = 0$.

Représenter $e(t)$.

On se place dans le cas où $c\tau = 0, 1L$.

2) On suppose d'abord que $t = 6\tau$.

2.a) Représenter la corde à cette date.

2.b) Donner la valeur de la vitesse en $x = 0, 8L$, $x = 0, 6L$ et $x = 0, 45L$.

3) On suppose maintenant que $t = 7\tau$. Représenter la corde à cette date.

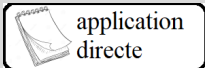
1) Deux pentes et un plateau.

2)

2.a) Une onde plane progressive suivant les x décroissants se propage. Le graphique de $e(t)$ est dans le même sens.

2.b) En $x = 0, 8L$ $v = -\frac{a}{2\tau}$ la corde redescend! ; en $x = 0, 6L$, $v = 0$ et en $x = 0, 45L$, $v = \frac{a}{\tau}$ la corde monte.

3) Une onde plane progressive suivant les x décroissants se propage. Le graphique précédent est décalé de $0, 1L$ vers la gauche. Comme le milieu est non dispersif, le paquet d'ondes ne se déforme pas!



Exercice 9.11 pour s'entraîner

Onde sur une corde fixée à ses deux extrémités

Soit une corde horizontale tendue de $x = 0$ à $x = L$, deux extrémités où elle est fixée, telle que l'élongation verticale $y(x, t)$ suit l'équation de D'Alembert avec la célérité c .

Montrer que les solutions possibles peuvent s'écrire

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cdot \cos(2\pi \nu_n t + \varphi_G)$$

On donnera λ_n et ν_n .

On peut chercher les solutions de l'équation de D'Alembert sous la forme d'onde stationnaires :

$$y(x, t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$ à cause de l'équation de D'Alembert.

Les conditions aux limites imposent : $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$, soit $\cos(k \cdot x + \varphi_F) = \sin(k \cdot x)$ avec $k \cdot L = n \cdot \pi$ où $n \in \mathbb{Z}$, soit $\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$.

Aussi, on peut réécrire en prenant en compte les conditions aux limites

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cdot \cos(2\pi \nu_n t + \varphi_G)$$

avec

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ et } \nu_n = \frac{n \cdot c_0}{2L} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Ce sont les modes propres de la corde fixée aux deux extrémités.



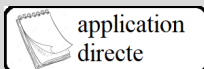
Exercice 9.12 pour s'entraîner
Corde d'un violoncelle

Un violoncelle baroque joue le la_3 dont la fréquence est $\nu = 415\text{Hz}$.

1) Quelle est la tension T de la corde de longueur $l = 50,0\text{cm}$, de masse volumique $\mu = 8000\text{kg.m}^{-3}$ et de rayon $r = 250\mu\text{m}$?

1) La longueur de la corde est reliée à la longueur d'onde par $l = \frac{\lambda}{2}$ (la corde est fixée aux deux bouts). La masse linéique de la corde est $\mu_l = \mu \cdot \pi \cdot r^2$. La célérité est $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_l}} = \nu \cdot \lambda = 2 \cdot \nu \cdot l$ qui conduit à la tension

$$T = \mu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \nu^2 \cdot l^2 = 67 \text{ N}$$



Exercice 9.13 pour s'entraîner
Onde sur la corde de Melde

Soit une corde horizontale tendue de $x = 0$ à $x = L$, telle que l'élongation verticale $y(x, t)$ suit l'équation de D'Alembert avec la célérité c . Une des extrémités est fixée

$$y(x = L, t) = 0 \quad \forall t$$

quant à l'autre limite, en $x = 0$, un vibreur effectue des oscillations sinusoïdales d'amplitude $a \cdot \cos(\omega \cdot t)$, donc :

$$y(x = 0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \forall t$$

- 1) Donner la forme de la solution de l'équation de propagation pour la corde de Melde.
- 2) Déterminer les conditions de résonance de la corde de Melde.

1) On peut chercher les solutions de l'équation de D'Alembert sous la forme d'onde stationnaires :

$$y(x, t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$. La condition à la limite $x = L$ impose d'une part $k \cdot L + \varphi_F = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\cos(k \cdot x + \varphi_F) = \sin(k \cdot (L - x))$. D'autre part, la condition à la limite $x = 0$ impose :

$$y_0 \cdot \cos(\varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

soit $\varphi_G = 0$ et $y_0 \cdot \cos(\varphi_F) = y_0 \cdot \sin(k \cdot L) = a$. En prenant en compte les nouvelles conditions aux limites,

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(k \cdot L)} \sin(k \cdot (L - x)) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$.

2) On constate que pour

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

l'amplitude tend -théoriquement- vers l'infini : $\frac{a}{\sin(k_n \cdot L)} \rightarrow \infty$. On parle de résonance.

Bien entendu, du fait d'inévitables amortissements, l'amplitude de la corde ne tend en fait pas vers l'infini.



Exercice 9.14 pour s'entraîner
Onde sur la corde de Melde - le retour

1) Lors d'une manipulation avec la corde de Melde, pour une longueur L de la corde et une masse M accrochée à celle-ci, on obtient une fréquence de résonance à 19Hz pour deux fuseaux et une à 28Hz pour trois fuseaux.

1.a) Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ?

1.b) Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

2) On donne la longueur de la corde : $L = 117\text{cm}$. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?

3) La masse accrochée à la corde est $M = 25\text{g}$.

3.a) Quelle est la tension T_0 de la corde ?

3.b) En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique μ_l de la corde.

1)

1.a) Les fréquences de résonance valent

$$\nu_n = n \frac{c}{2L}$$

Or $\nu_2 = 19\text{Hz}$ et $\nu_3 = 28\text{Hz}$, ce qui donne :

$$\frac{\nu_3}{\nu_2} = 1,47 \text{ au lieu de } \frac{3}{2} = 1,5$$

Ces valeurs numériques sont donc compatibles entre elles.

1.b) Les fréquences suivantes sont données par la formule $\nu_n = n \frac{c}{2L}$, soit :

$$\begin{cases} \nu_4 = 38\text{Hz} \\ \nu_5 = 47\text{Hz} \end{cases}$$

2)

$$c = \frac{2L \cdot \nu_n}{n} = 22\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3)

3.a) La tension de la corde est donc

$$T_0 = M \cdot g = 0,25\text{N}$$

3.b) La vitesse de propagation étant $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$, on en déduit la masse linéique de la corde :

$$\mu_l = 5 \cdot 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} = 0,5\text{g/m}$$

Cette valeur aurait pu être trouvée en pesant, par exemple, 10m de fil sur une balance de précision.



Exercice 9.15 pour s'entraîner

Solutions de la corde de Melde

Dans l'expérience de la corde de Melde, le vibreur effectue des oscillations sinusoïdales d'amplitude a :

$$\psi(0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

La corde, de longueur L , est fixée à l'autre extrémité, la tension de la corde étant T_0 .

1) Déterminer les déplacements $\psi(x, t)$ de tout point de la corde à tout instant.

2) Donner les valeurs des fréquences de résonance.

1) La solution stationnaire sinusoïdale :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_t) \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_x)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ convient si elle satisfait aux conditions aux limites, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \psi(0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \psi(L, t) = 0 \end{cases}$$

Ceci est réalisé si nous prenons

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{\pi}{2} - k.L \\ \varphi_t = 0 \\ \psi_0 = \frac{a}{\sin(k.L)} \end{cases}$$

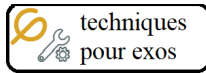
Conclusion :

$$\psi(x, t) = \frac{a}{\sin(k.L)} \cos(\omega.t) \cdot \sin(k.(L - x))$$

2) Nous constatons que, pour $k = k_n = \frac{n.\pi}{L}$ (avec n entier) l'amplitude devient (théoriquement !) infinie : la corde entre en résonance.

À la résonance, a est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration. De ce fait, le vibreur peut quasiment être considéré comme un nœud de vibration de la corde. Les fréquences de résonance valent

$$\nu_n = n \frac{c}{2.L}$$



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Calcul d'un spectre d'une onde stationnaire

Dans le cas d'une corde fixée en $x = 0$ et $x = L$, la solution s'écrit sous forme de séries de Fourier d'OPSM :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(n \frac{\pi c t}{L}\right) + B_n \sin\left(n \frac{\pi c t}{L}\right) \right] \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

On écrit les conditions initiales en position et vitesse :

$$\begin{cases} y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \\ \frac{dy}{dt}(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n \pi c}{L} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

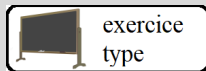
On invente ensuite une fonction périodique (de période $2L$) qui est telle que :

$$s(x) = \frac{A'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A'_n \cos\left(n \frac{2\pi x}{2L}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B'_n \sin\left(n \frac{2\pi x}{2L}\right) \right]$$

On se sert ensuite de l'expression des coefficients de Fourier :

$$A'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L s(x) \cos\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx \quad \text{et} \quad B'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L s(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

On pourra utiliser un logiciel pour calculer les coefficients !



Exercice 9.16 (le prof fait cet exercice type jeudi) spectre d'une onde mécanique

Une corde de piano, inextensible, de longueur L , de masse linéique μ_ℓ , est tendue avec une tension T_0 . Elle est fixée en $x = 0$ et en $x = L$.

On frappe cette corde initialement à l'équilibre avec un marteau de largeur $e \ll L$ (en $x \in [x_0; x_0 + e]$), qui a une vitesse u . On supposera $e \ll x_0$.

Le déplacement de la corde est

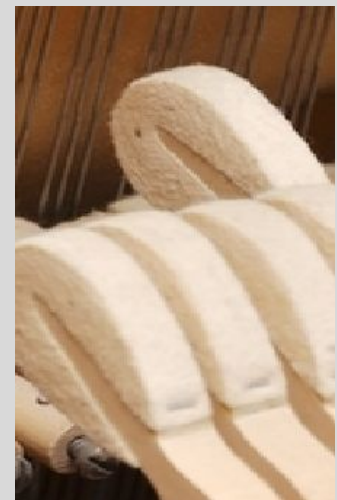
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

On admet que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t = 0) \sin(k_n x) dx$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{dy}{dt}(x, t = 0) \sin(k_n x) dx$$

- 1) Justifier la forme de la solution générale de l'équation d'onde. Relier k_n et ω_n à n , L , T_0 et μ_ℓ .
- 2) Déterminer les coefficients A_n et B_n .
- 3) Tracer l'allure du spectre de cette corde frappée et commenter.



- 1) Les solutions d'ondes stationnaires monochromatiques sont

$$y(x, t) = y_0 \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$.

La condition aux limites en $x = 0$ impose :

$$y(x = 0, \forall t) = 0 \Rightarrow y(x, t) = y_0 \sin(k x) \cos(\omega t + \varphi_G)$$

La condition aux limites en $x = L$ impose :

$$y(x = L, \forall t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

donc $k_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L}$.

2) On peut réécrire

$$C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

3) On en déduit déjà que tous les A_n sont nuls. D'autre part, le calcul des coefficients B_n donne :
 $B_n = \frac{2.u.e}{n.\pi.c} \sin\left(\frac{n.\pi.x_0}{L}\right)$.

Les harmoniques décroissent comme $\frac{1}{n}$: le spectre est riche. On peut s'arranger pour éliminer la 7ième harmonique si $\frac{7.\pi.x_0}{L} = \pi$, soit $x_0 = \frac{L}{7}$ (par exemple).



application
directe

Exercice 9.17 pour s'entraîner Spectre d'une guitare

On s'intéresse à une corde de guitare de longueur L (entre $x = 0$ et $x = L$), sur laquelle se propagent des ondes avec la célérité c . On lâche cette corde sans vitesse initiale en la pinçant en son milieu (en $x = \frac{L}{2}$), après l'avoir éloignée de la distance h de l'axe Ox .

Déterminer le spectre de cette corde pincée.

Les conditions initiales en position et vitesse sont :

$$\begin{cases} y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \\ \frac{dy}{dt}(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) = 0 \end{cases}$$

On en déduit déjà que tous les B_n sont nuls. D'autre part, on crée une fonction $s(x)$ périodique de période $2L$, impaire, qui correspond à $y(x, t = 0)$ pour $x \in [0; L]$, qui est :

$$\begin{cases} \text{si } x \in \left[-L; -\frac{L}{2}\right] s(x) = -\frac{2h}{L}x - 2h \\ \text{si } x \in \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right] s(x) = +\frac{2h}{L}x \\ \text{si } x \in \left[\frac{L}{2}; L\right] s(x) = -\frac{2h}{L}x + 2h \end{cases}$$

Le calcul des coefficients $A_n = B'_n$ donne : $A_{2p} = 0$ et $A_{2p+1} = (-1)^p \frac{8h}{\pi^2 \cdot (2p+1)^2}$. Les harmoniques décroissent comme $\frac{1}{n^2}$: le spectre est assez pur.



application
directe

Exercice 9.18 pour s'entraîner Spectre d'une harpe

On s'intéresse à une corde de harpe de longueur L (entre $x = 0$ et $x = L$), sur laquelle se propagent des ondes avec la célérité c . On lâche cette corde sans vitesse initiale en la frottant en son milieu (en $x = \frac{L}{2}$), après l'avoir éloignée de l'axe Ox , de telle sorte que la position initiale soit définie par la fonction parabole : $y(x, t = 0) = \frac{4h}{L^2}x \cdot (L - x)$.

Déterminer le spectre de cette corde frottée.

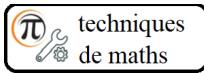
Les conditions initiales en position et vitesse sont :

$$\begin{cases} y(x, t = 0) = \frac{4h}{L^2}x \cdot (L - x) \\ \frac{dy}{dt}(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n \cdot \pi \cdot c}{L} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) = 0 \end{cases}$$

On en déduit déjà que tous les B_n sont nuls. D'autre part, on crée une fonction $s(x)$ périodique de période $2L$, impaire, qui correspond à $y(x, t = 0)$ pour $x \in [0; L]$, qui est :

$$\begin{cases} s(x) = -\frac{4h}{L^2}x \cdot (L - x) \text{ si } x \in [-L; 0] \\ s(x) = +\frac{4h}{L^2}x \cdot (L - x) \text{ si } x \in [0; +L] \end{cases}$$

Le calcul des coefficients $A_n = B'_n$ donne : $A_{2p} = 0$ et $A_{2p+1} = \frac{32h}{\pi^3 \cdot (2p+1)^3}$. Les harmoniques décroissent comme $\frac{1}{n^3}$: le spectre est très pur.



Techniques mathématiques à maîtriser
Synthèse de Fourier

Fonction périodique

Toutes les fonctions périodiques peuvent être écrites comme une somme de fonctions trigonométriques.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$$

est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (cf. exemple ci-contre).

Autre présentation
puisque

$$\cos(n\omega t + \phi_n) = \cos(n\omega t) \cos(\phi_n) - \sin(n\omega t) \sin(\phi_n)$$

on peut réécrire

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t)] + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sin(n\omega t)]$$

avec

- $\frac{A_0}{2} = C_0$,
- $A_n = C_n \cos(\phi_n) \quad \forall n > 0$,
- $B_n = -C_n \sin(\phi_n) \quad \forall n > 0$.

Définitions physiques

- le continu, la moyenne, l'offset : $f_{continu} = C_0$;
- l'ondulation : $f_{ond}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$;
- le fondamental : $f_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi_1)$;
- l'harmonique de rang n : $f_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$;
- la valeur efficace : $f_{eff} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}$ (formule de Parseval).

Suite C_n

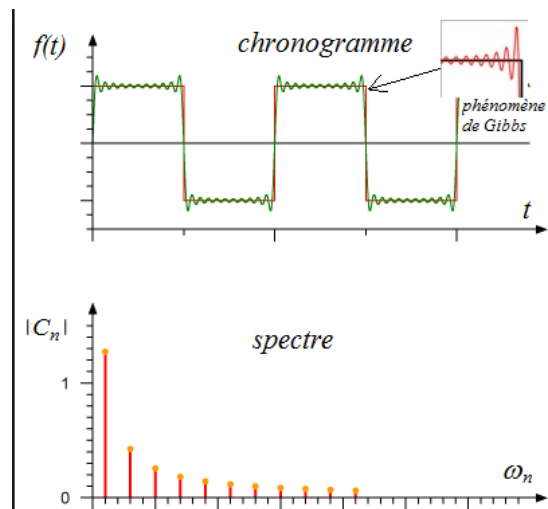
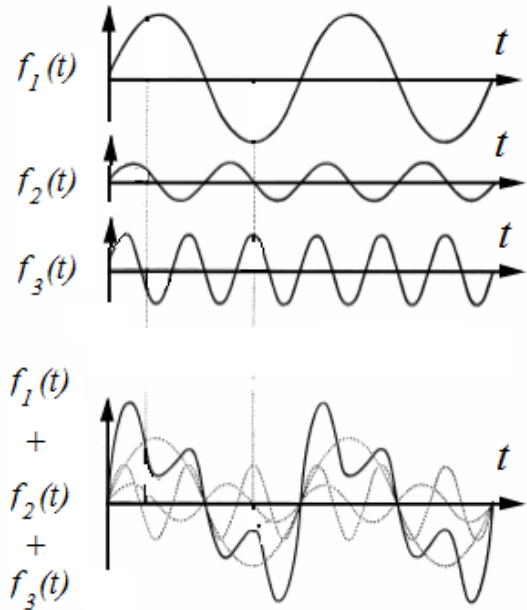
La représentation de $|C_n|$ en fonction de n , ω_n ou de la fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ est le spectre de f .

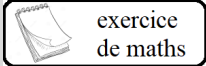
La série converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$.

Si f est continue (mathématiquement), $C_n \approx \frac{1}{n^2}$ si $n \rightarrow +\infty$;

Si f est discontinue (mathématiquement), $C_n \approx \frac{1}{n}$ si $n \rightarrow +\infty$.

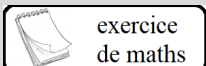
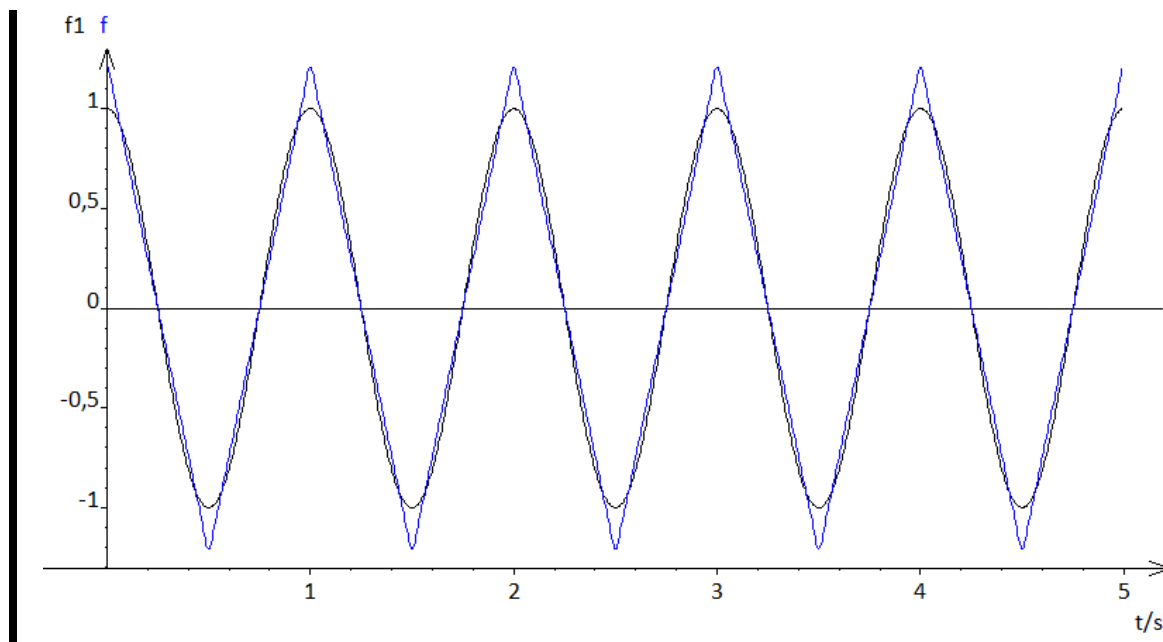
Il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité : pour représenter convenablement une fonction discontinue, il faudrait une infinité d'harmoniques.



exercice
de maths**Exercice 9.19** pour s'entraîner**Synthèse de Fourier d'une fonction triangle**1) Vérifier que la fonction triangle de période T peut s'écrire :

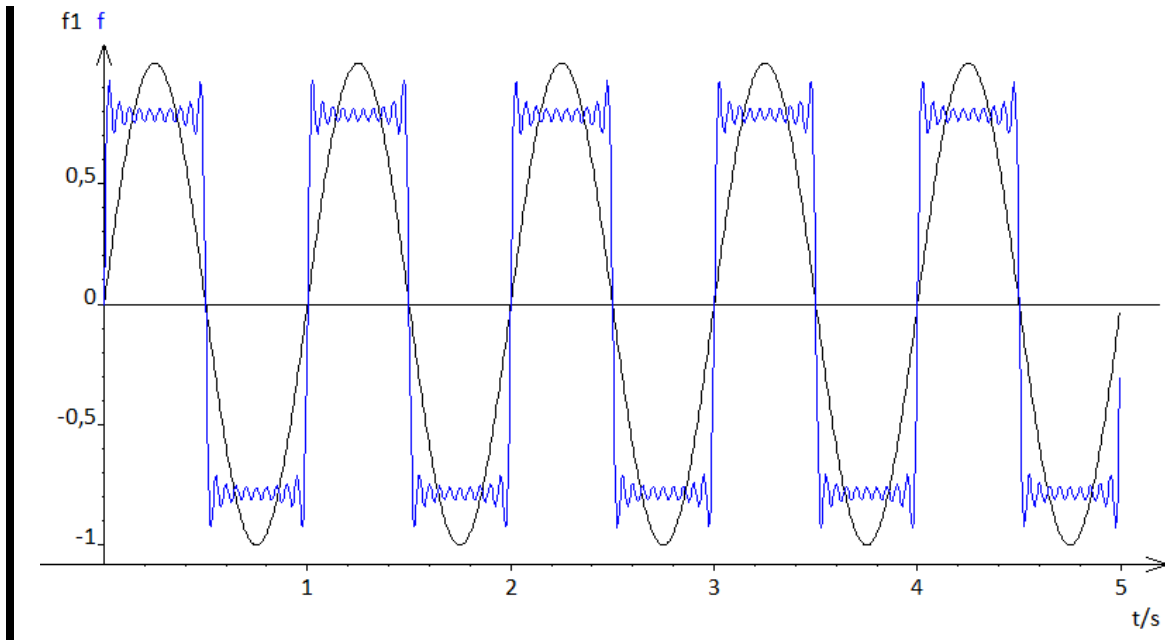
$$\text{triangle}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$$

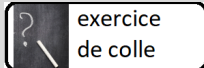
On utilisera un ordinateur pour calculer et tracer la synthèse $f_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$ avec les $N \approx 10$ premiers harmoniques.

exercice
de maths**Exercice 9.20** pour s'entraîner**Synthèse de Fourier d'une fonction carré**1) Vérifier que la fonction carrée de période T peut s'écrire :

$$\text{carre}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$$

On utilisera un ordinateur pour calculer et tracer la synthèse $f_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$ avec les $N \approx 10$ premiers harmoniques.

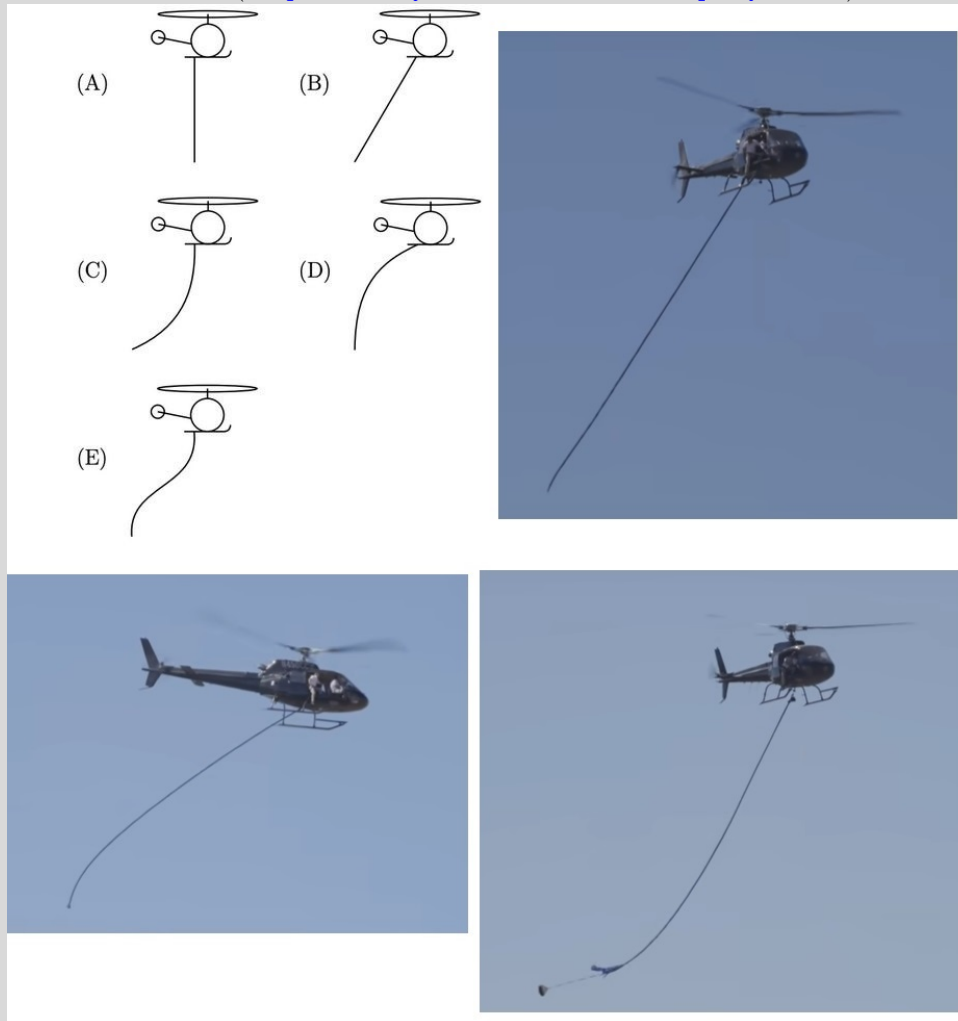




exercice
de colle

Exercice 9.21 Un câble sous un hélico

D'après une vidéo veritasium (https://www.youtube.com/watch?v=q-_7y0WUnW4) :



Un hélicoptère vole à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$ horizontale par rapport au sol. Un câble parfaitement flexible, de longueur ℓ , de masse linéique μ , pend de cet hélicoptère. Il est soumis aux frottements de l'air ($-\lambda \vec{v}$ par unité de longueur).

Le champ de pesanteur est $\vec{g} = +g \vec{u}_z$. On se place en régime stationnaire : la corde est fixe dans le référentiel de l'hélicoptère. On se demande quelle forme prendra la corde (A, B, C, D ou E sur la photo).

On repère un point de la corde par son abscisse curviligne s , avec $s = 0$ au point d'accroche sur l'hélicoptère (et $s = \ell$ au bout de la corde). La corde à l'abscisse curviligne s fait un angle $\alpha(s)$ avec la verticale. On note $\vec{T}(s_0)$ la tension exercée par la partie supérieure ($s < s_0$) de la corde sur la partie inférieure ($s > s_0$) de la corde.

1) Faire une étude mécanique d'un brin infinitésimal de corde. En déduire que

$$\begin{cases} T(s) \sin(\alpha(s)) = T(s = \ell) \sin(\alpha(s = \ell)) + A (s - \ell) \\ T(s) \cos(\alpha(s)) = T(s = \ell) \cos(\alpha(s = \ell)) + B (s - \ell) \end{cases}$$


On exprimera A et B .

2) Si l'extrémité de la corde est libre :

- 2.a) déterminer la condition à la limite $s = \ell$;
- 2.b) déterminer les expressions des fonctions $\alpha(s)$ et $T(s)$;
- 2.c) en déduire la forme de la corde
- 2.d) vérifier que l'expression trouvée de $T(s = 0)$ est en accord avec la condition à la limite sur l'hélicoptère.

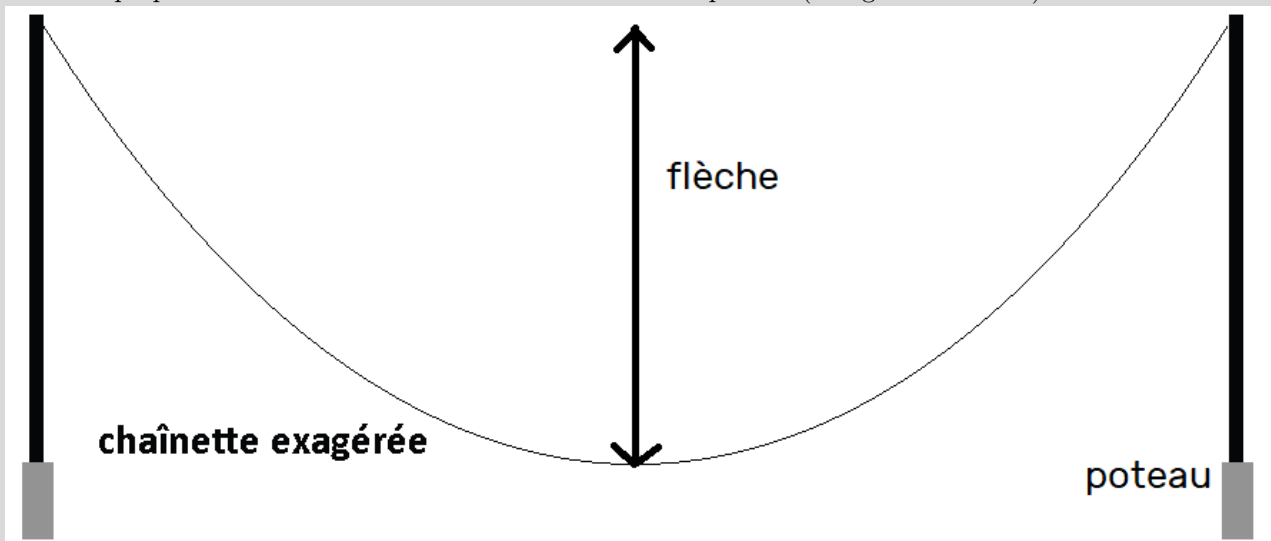
3) Mêmes questions si l'on accroche au bout de la corde une masse m_0 .

4) Mêmes questions si l'on accroche au bout de la corde un parachute qui impose une force $-\beta \vec{v}$.

 **exercice de colle**

Exercice 9.22
Un câble suspendu (chaînette)

On se propose de déterminer la forme d'une chaînette suspendue (cf. figure suivante :)



On note μ la masse linéique du câble, $\vec{T}(x_0)$ la force exercée par la partie gauche ($x < x_0$) du câble sur la partie droite ($x > x_0$), tangente au câble, $T_h(x_0)$ et $T_v(x_0)$ respectivement les valeurs absolues des composantes horizontales et verticales de $\vec{T}(x_0)$.

Si on pose $y(x)$ l'équation de la "chaînette" (qu'on va essayer de déterminer), $T_v(x_0) = T_h(x_0) y'(x_0)$.

1) En faisant l'étude mécanique statique d'un tronçon de câble entre x et $x + dx$, déterminer $\frac{dT_h}{dx}$ ainsi que $\frac{dT_v}{dx}$.

2) En déduire que T_h est constant et que $\frac{dT_v}{dx} = \mu g \sqrt{1 + (y'(x))^2}$.

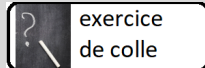
On rappelle que la dérivée de l'arc sinus hyperbolique est $\text{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) Déterminer l'expression de $y''(x)$. Montrer alors que l'équation de la chaînette s'écrit

$$y(x) = a \text{acosh} \left(\frac{x}{a} + \alpha \right) + \beta$$

avec α et β , les constantes d'intégration et a un paramètre à expliciter.

4) Application numérique : déterminer la valeur numérique de la flèche, pour une distance entre 2 poteaux de 60 m, avec une tension de 20 kN.

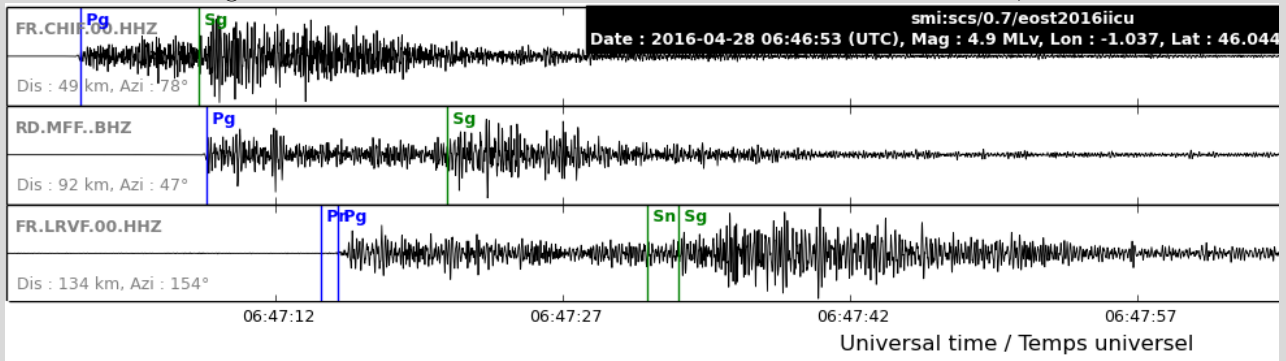


exercice
de colle

Exercice 9.23

Modélisation de la propagation d'un tremblement de terre

On donne l'enregistrement du tremblement de terre de La Rochelle du 28 avril 2016, en trois endroits :



1) On assimile le milieu de propagation à une tige solide de masse volumique μ , qui suit la loi de Hooke avec le module d'Young E . On néglige la pesanteur.

1.a) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ avec } c_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

1.b) Montrer qu'une OPPM est solution d'une telle équation différentielle.

1.c) Les enregistrements font-ils apparaître une OPPM ?

2) En s'appuyant sur les enregistrements donnés, estimer :

2.a) la vitesse de phase V_p des ondes P (repérées sur les enregistrements par "Pg") ;

2.b) la vitesse de phase V_s des ondes S (repérées sur les enregistrements par "Sg") ;

2.c) la vitesse de groupe (à définir).

2.d) Le milieu de propagation (la Terre!) est-il dispersif ?

3) Pour déterminer la position du séisme, il suffit de connaître les distances (notées d_1 , d_2 et d_3) de celui-ci à trois stations qui l'ont enregistré : trois sphères de rayon d_1 , d_2 et d_3 se croisent en un seul point qui est le foyer du séisme.

On pose, pour une station d'enregistrement :

d , la distance à l'épicentre (à déterminer) ;

t_0 , la date du séisme (inconnue) ;

la vitesse de phase V_p des ondes P (supposée connue) ;

la vitesse de phase V_s des ondes S (supposée connue aussi).

3.a) Exprimer les dates d'arrivée des ondes P (t_p) et S (t_s) à la station.

3.b) Exprimer d en fonction de variables connues (V_p , V_s , t_s et t_p).

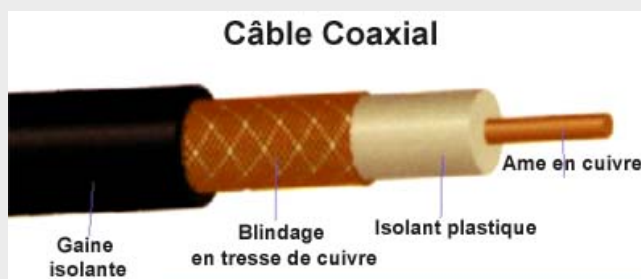
exercice de colle

Exercice 9.24
Onde dans un câble coaxial

Le câble coaxial (en anglais coaxial cable) a longtemps été le câblage de prédilection, pour la simple raison qu'il est peu coûteux et facilement manipulable (poids, flexibilité, ...).

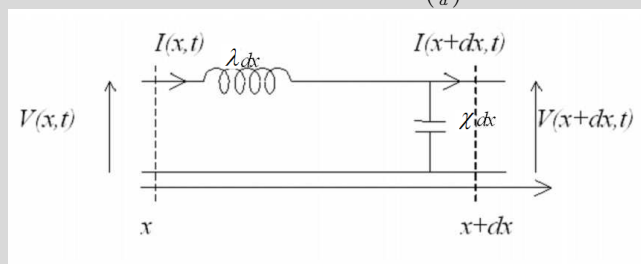
Un câble coaxial est constitué d'une partie centrale (appelée âme), c'est-à-dire un fil de cuivre, enveloppé dans un isolant, puis d'un blindage métallique tressé et enfin d'une gaine extérieure.

- La gaine isolante permet de protéger le câble de l'environnement extérieur. Elle est habituellement en caoutchouc (parfois en chlorure de polyvinyle (PVC), éventuellement en téflon).
- Le blindage en tresse de cuivre (enveloppe métallique) entourant les câbles permet de protéger les données transmises sur le support des parasites (autrement appelé bruit) pouvant causer une distorsion des données.
- L'isolant plastique entourant la partie centrale est constitué d'un matériau diélectrique permettant d'éviter tout contact avec le blindage, provoquant des interactions électriques (court-circuit).
- L'âme en cuivre, accomplissant la tâche de transport des données, est généralement composée d'un seul brin en cuivre ou de plusieurs brins torsadés.

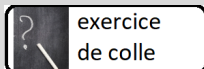


Document disponible à l'adresse <http://www.cnipe.nat.tn>

Un élément de longueur dx d'un câble coaxial dont la gaine isolante, qui est comprise entre les rayons a et b , a une permittivité relative $\epsilon_r = 2,25$, a pour capacité $\chi dx = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{b}{a})} dx$ et pour inductance $\lambda dx = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{b}{a}) dx$.



1) Déterminer la célérité c_0 des ondes électriques qui se propagent dans ce câble coaxial et la comparer à celle de la lumière dans le vide.



exercice
de colle

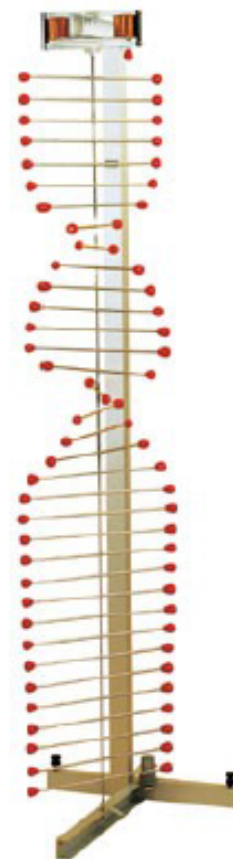
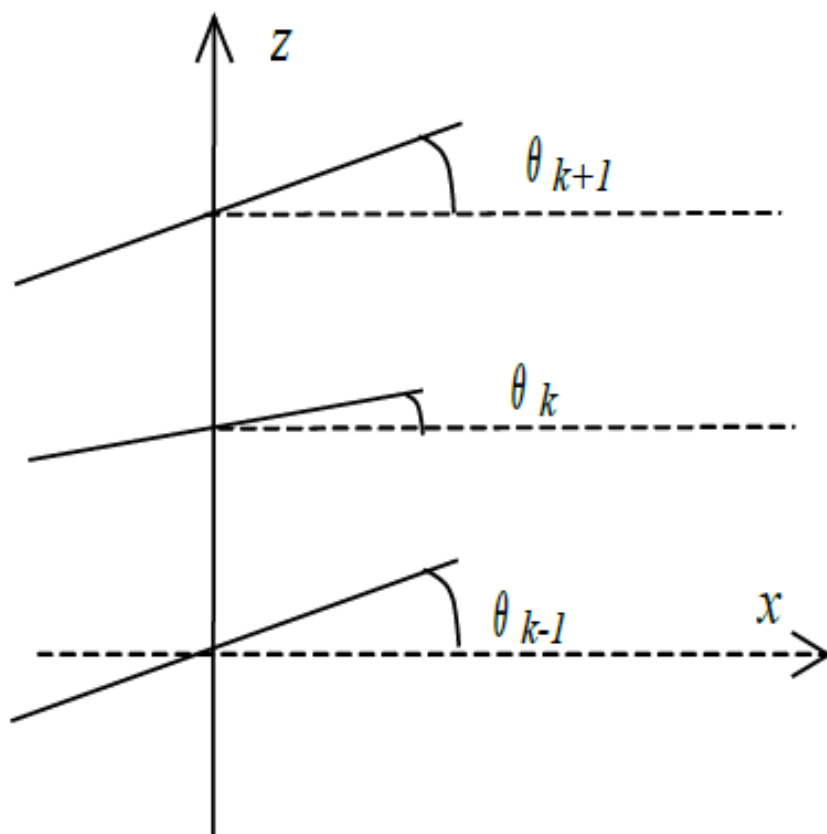
Exercice 9.25

Ondes sur une échelle de perroquet

On s'intéresse à un fil de torsion suivant un axe Oz vertical, le long duquel sont disposées à des distances a des barrettes horizontales identiques, de moment d'inertie J par rapport à Ox .

La barrette numéro n fait un angle $\theta_n(t)$ avec un axe Ox horizontal. Le fil entre les barrettes numéro n et $n + 1$ exerce sur la barrette numéro n le moment

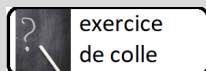
$$\vec{M}_{n+1 \rightarrow n} = \Gamma \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n) \vec{u}_z$$



échelle de perroquet

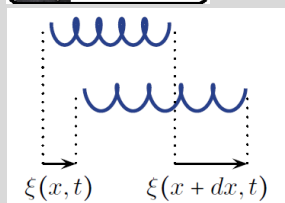
- 1) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$



exercice
de colle

Exercice 9.26 Ondes dans un ressort

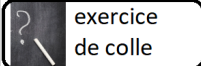


Un ressort à spires non jointives de longueur L et de masse linéique μ a une raideur K . Le ressort est placé sur un axe horizontal. Le déplacement des spires se fait sans frottement.

On étudie une longueur élémentaire dx du ressort au repos qui, au passage d'une onde de déformation, voit ses extrémités se déplacer de $\xi(x, t)$ et $\xi(x + dx, t)$.

- 1) On considère deux ressorts associés en série de raideur k . L'ensemble est considéré comme un ressort unique de raideur K .
 - 1.a) Déterminer la relation entre k et K .
 - 1.b) En déduire que l'expression de la raideur d'une longueur dx du ressort est $k_{dx} = K \frac{L}{dx}$.
- 2) On s'intéresse à un élément de ressort de longueur dx .
 - 2.a) Exprimer l'allongement de cet élément de ressort en fonction de $\frac{d\xi}{dx}$.
 - 2.b) Exprimer les forces de rappel s'exerçant aux extrémités de cet élément.
 - 2.c) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x, t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans le ressort.
- 3) On considère le ressort fixé en $x = 0$ et relié à une masse ponctuelle m , libre de se déplacer en $x = L$.
 - 3.a) Déterminer la forme des solutions d'ondes stationnaires.
 - 3.b) Montrer que $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$.
 - 3.c) Montrer que la pulsation ω de ces ondes stationnaires obéit à

$$\tan\left(\frac{\omega}{c_0} L\right) = \frac{K L}{m c_0 \omega}$$

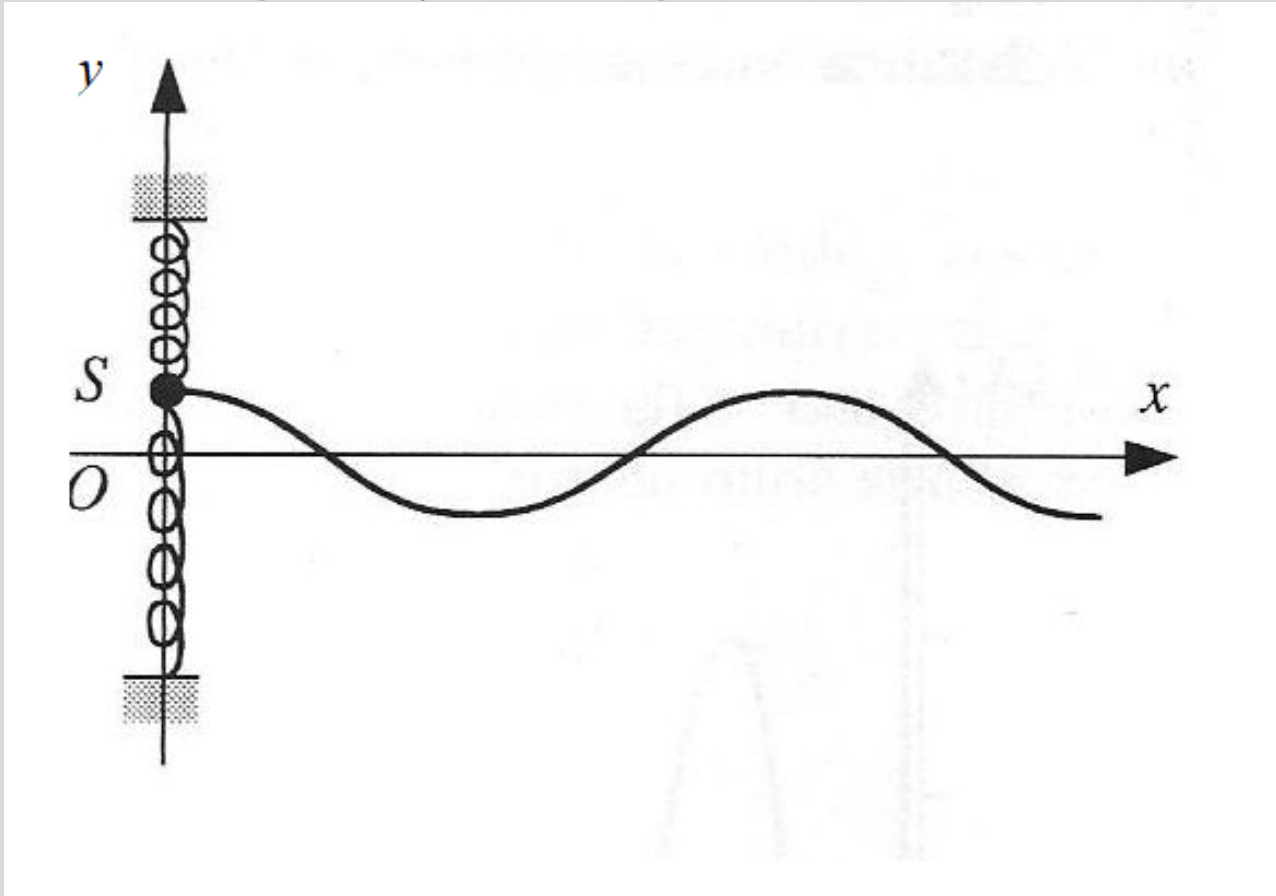


exercice
de colle

Exercice 9.27

Corde attachée à un point matériel oscillant

Une corde inextensible de longueur infinie, de masse linéique μ_ℓ , avec une tension T_0 est fixée en $x = 0$ à un point matériel de masse m en S d'ordonnée $y_S(t)$ qui peut se mouvoir suivant Oy sans frottement. S subit la force de deux ressorts parallèles à Oy de raideur k . Lorsque S est en O , la force des ressorts est nulle.



1) Etude de la corde

On néglige la pesanteur. On note $y(x, t)$ les déplacements transversaux, supposés petits et $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$ petit.

1.a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $y(x, t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans la corde.

1.b) Montrer que $Z_c = \frac{T_y}{v_y}$ est indépendant de la position x sur la corde et de la date t .

1.c) Vérifier l'équation locale suivante et en donner la signification physique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_\ell v_y^2 + \frac{T_y^2}{2T_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (v_y T_y)$$

2) Etude du point matériel en S

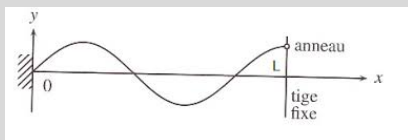
2.a) Exprimer la force exercée par la corde sur le point matériel en S en fonction de μ_ℓ , T_0 et $\frac{dy_S}{dt}$.

2.b) Montrer que S suit l'équation d'un oscillateur : $\ddot{y}_S + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y}_S + \omega_0^2 y_S = 0$.

2.c) En donner une solution si l'amortissement est faible.

?
exercice
de colle

Exercice 9.28 Vibrations dans une corde accrochée à un anneau



Une corde inextensible de longueur L , de masse linéique μ_ℓ , avec une tension T_0 est fixée en $x = 0$. En $x = L$, elle est liée à un anneau de masse M pouvant glisser sans frottement sur une tige. On note $y(x, t)$ les déplacements transversaux, supposés petits.

On néglige la pesanteur. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$ petit.

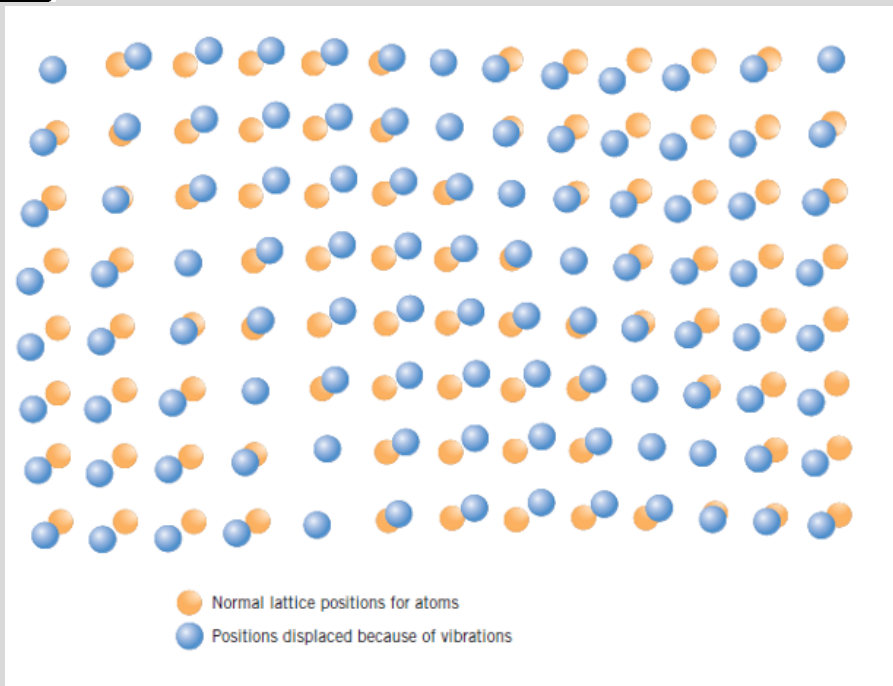
- 1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $y(x, t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans la corde.
- 2) Déterminer la forme des solutions d'ondes stationnaires $y(x, t) = F(x) G(t)$.
- 3) Montrer que $y(x, t) = y_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$.
- 4) Montrer que la pulsation ω de ces ondes stationnaires obéit à

$$\tan(a\omega) = \frac{b}{\omega}$$

- 5) Proposer une solution pour trouver les pulsations ω .

exercice de colle

Exercice 9.29
Phonons dans une barre



On s'intéresse à une tige solide de section S , de masse volumique μ , suivant la loi de Hooke avec le module de Young E . On néglige la pesanteur.

1) Etablissement de la forme des ondes

1.a) Rappeler la loi de Hooke.

1.b) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation est celle de D'Alembert avec la célérité c_0 dont on donnera l'expression.

La tige est libre (sans contraintes à ses extrémités $x = 0$ et $x = \ell$).

1.c) Montrer que les solutions de l'équation d'onde sont de la forme $\xi(x, t) = \xi_0 \cos\left(\frac{\omega_p x}{c_0}\right) \cos(\omega_p t)$ où l'on donnera l'expression de ω_p .

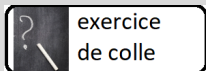
2) Etude énergétique.

2.a) Exprimer l'énergie cinétique due à la vibration dans la tige.

2.b) En déduire la moyenne temporelle de l'énergie totale, sachant que le théorème d'équipartition stipule que l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique.

L'énergie de vibration du réseau est quantifiée, la quantum d'énergie est appelé phonon par analogie au photon de la mécanique quantique. On démontre en mécanique quantique que l'énergie d'un mode élastique de pulsation ω est $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ lorsque le mode est dans l'état excité caractérisé par le nombre n , c'est à dire lorsque le mode est occupé par n photons.

2.c) Exprimer le carré de l'amplitude du phonon ξ_0^2 .



Exercice 9.30
Modélisation d'un instrument à corde

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L . Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

1) La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.

1.a) Déterminer l'équation aux dérivées partielles que vérifie l'ébranlement $y(x, t)$.

1.b) Calculer la célérité c pour une corde de piano de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de tension $T_0 = 850 \text{ N}$, de diamètre $\phi = 1,2 \text{ mm}$.

2) La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$. On cherche une solutions de l'équation différentielle précédente sous la forme d'une onde harmonique caractérisée par la pulsation ω et la norme du vecteur d'onde k .

2.a) Quelle doit être la forme de cette onde harmonique ?

2.b) Montrer que seulement certaines fréquences sont possibles, qu'on appellera fréquences propres de la corde.

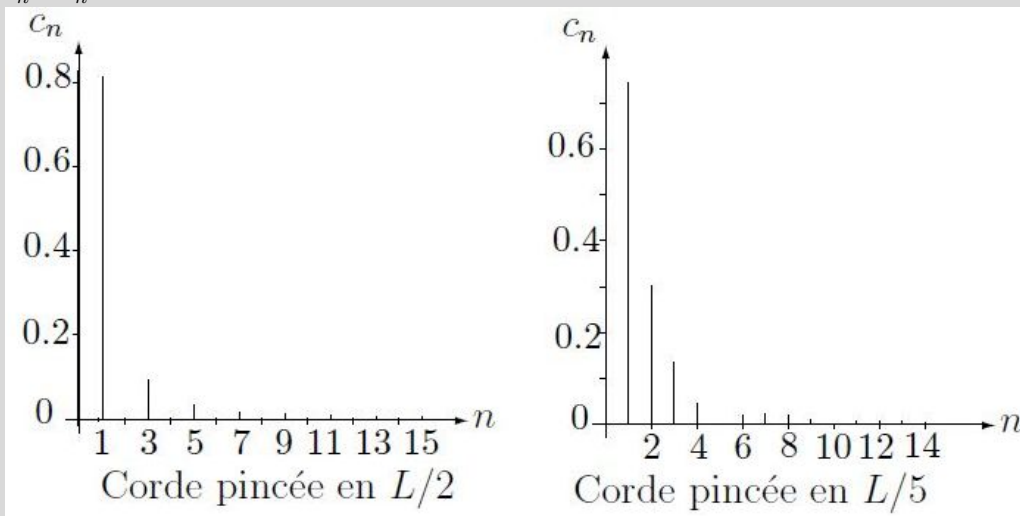
2.c) Pour un mode propre donné, définir les ventres et les nœuds de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

3) Solution générale

On écrit la solution correspondant aux conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ comme une superposition des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

On donne les spectres calculés pour une corde pincée à la moitié de sa longueur puis au cinquième de celle-ci, où $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$:



3.a) Comment peut-on expliquer l'absence de certains harmoniques dans ces spectres ?

On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée décroissent globalement comme $1/n^2$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $1/n$ (au moins à partir d'une certaine valeur de n).

3.b) Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées). Quel caractère du son est alors ressenti à l'oreille ?

?
exercice
de colle

Exercice 9.31
Spectre d'une harpe



On s'intéresse à une corde de harpe de longueur L (entre $x = 0$ et $x = L$), sur laquelle se propagent des ondes avec la célérité c . On lâche cette corde sans vitesse initiale en la frottant en son milieu (en $x = \frac{L}{2}$), après l'avoir éloignée de l'axe Ox , de telle sorte que la position initiale soit définie par la fonction parabole :

$$y(x, t = 0) = \frac{4h}{L^2} x(L - x)$$

où $h > 0$.

Déterminer le spectre de cette corde frottée.

?
exercice
de colle

Exercice 9.32 Spectre d'un piano



Une corde de piano, inextensible, de longueur L , de masse linéique μ_ℓ , est tendue avec une tension T_0 . On note $y(x, t)$ les déplacements transversaux, supposés petits. On néglige la pesanteur. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$ petit.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $y(x, t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans la corde.

La corde de piano, de longueur L , est fixée en $x = 0$ et en $x = L$.

2) Montrer que l'équation d'onde admet comme solutions les OPSM :

$$y_n(x, t) = C_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

On donnera les expressions de k_n et ω_n .

3) Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation d'onde est

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

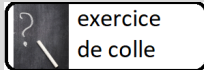
On admet que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t=0) \sin(k_n x) dx \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{dy}{dt}(x, t=0) \sin(k_n x) dx$$

On frappe cette corde initialement à l'équilibre avec un marteau de largeur $e \ll L$ (en $x \in [x_0; x_0 + e]$), qui a une vitesse u . On supposera $e \ll x_0$.

4) Déterminer les coefficients A_n et B_n .

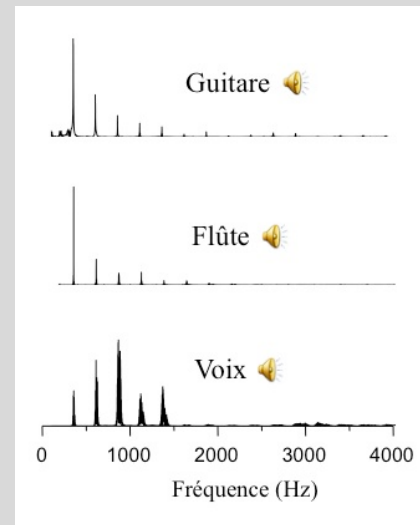
5) Tracer l'allure du spectre de cette corde frappée et commenter.



Exercice 9.33 Spectre d'une guitare

Sur la figure sont représentés les spectres de plusieurs instruments de musique. Ils correspondent tous à la même note « do » interprétée par une guitare, une flûte et la voix. On écoute la même note mais le ressenti est différent, et cette information est traduite dans le spectre. La même note est jouée, c'est à dire que l'on va retrouver la même fréquence fondamentale et une répartition semblable des harmoniques dans le spectre, mais avec des différences d'amplitude dans les harmoniques.

Issu de <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Formaterre2012-spectre-signal-Vidal.xml>.



Une corde de guitare, inextensible, de longueur L , de masse linéique μ_ℓ , est tendue avec une tension T_0 . On note $y(x, t)$ les déplacements transversaux, supposés petits. On néglige la pesanteur. On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x . Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$ petit.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $y(x, t)$ ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans la corde.

La corde de guitare, de longueur L , est fixée en $x = 0$ et en $x = L$.

2) Montrer que l'équation d'onde admet comme solutions les OPSM :

$$y_n(x, t) = C_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

On donnera les expressions de k_n et ω_n .

3) Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation d'onde est

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))$$

On admet que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t=0) \sin(k_n x) dx \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \frac{dy}{dt}(x, t=0) \sin(k_n x) dx$$

On lâche cette corde sans vitesse initiale en la pinçant en son milieu (en $x = \frac{L}{2}$), après l'avoir éloignée de la distance h de l'axe Ox .

4) Déterminer les coefficients A_n et B_n .

5) Tracer l'allure du spectre de cette corde pincée et commenter.