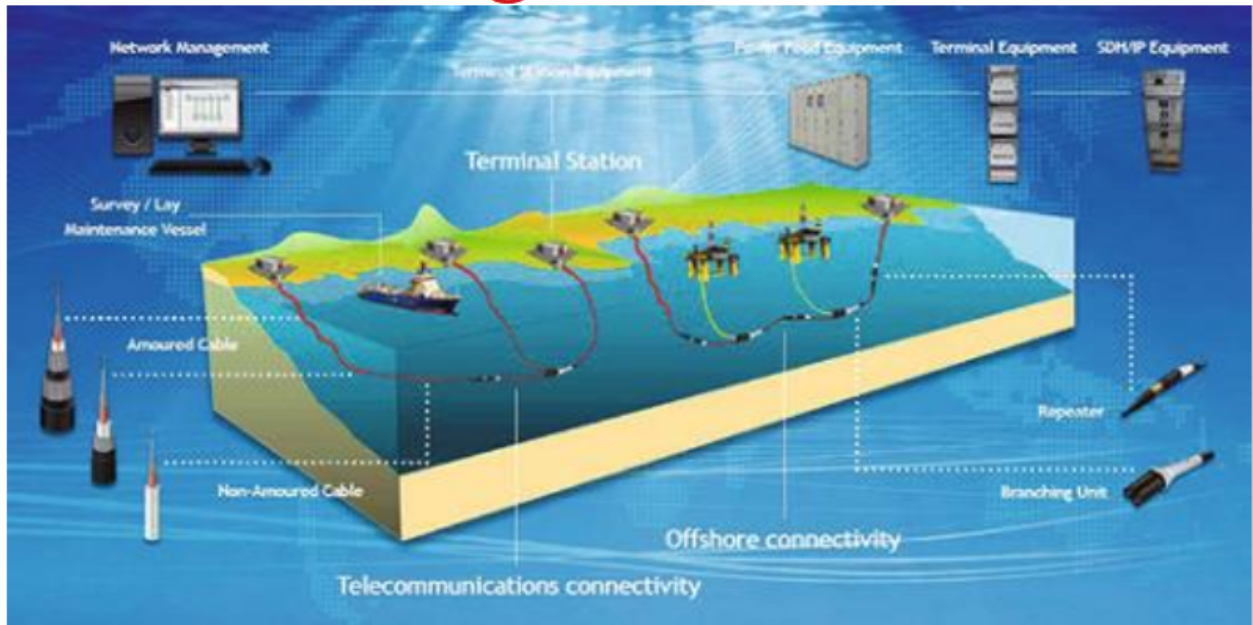
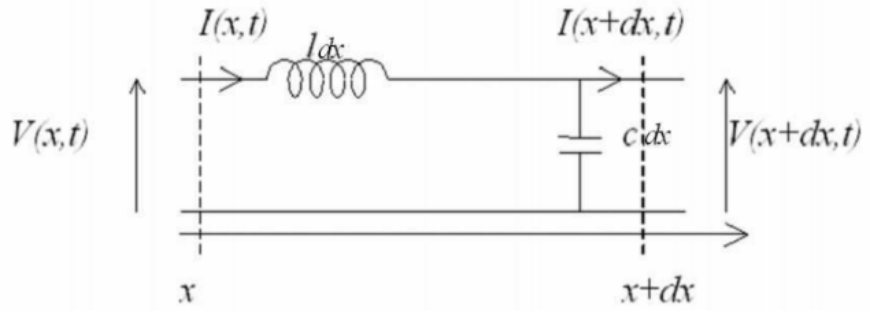


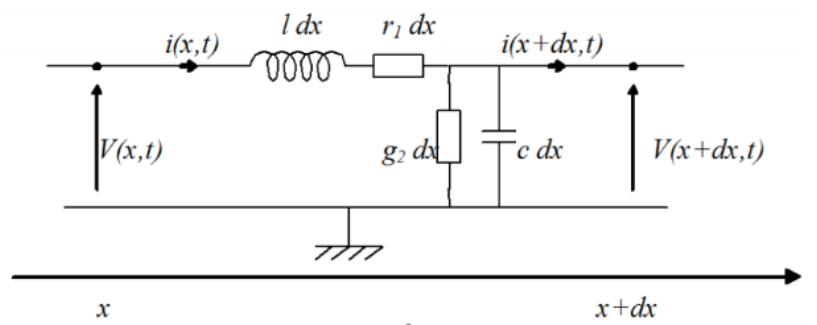
Comment transmettre des informations grâce aux ondes ?



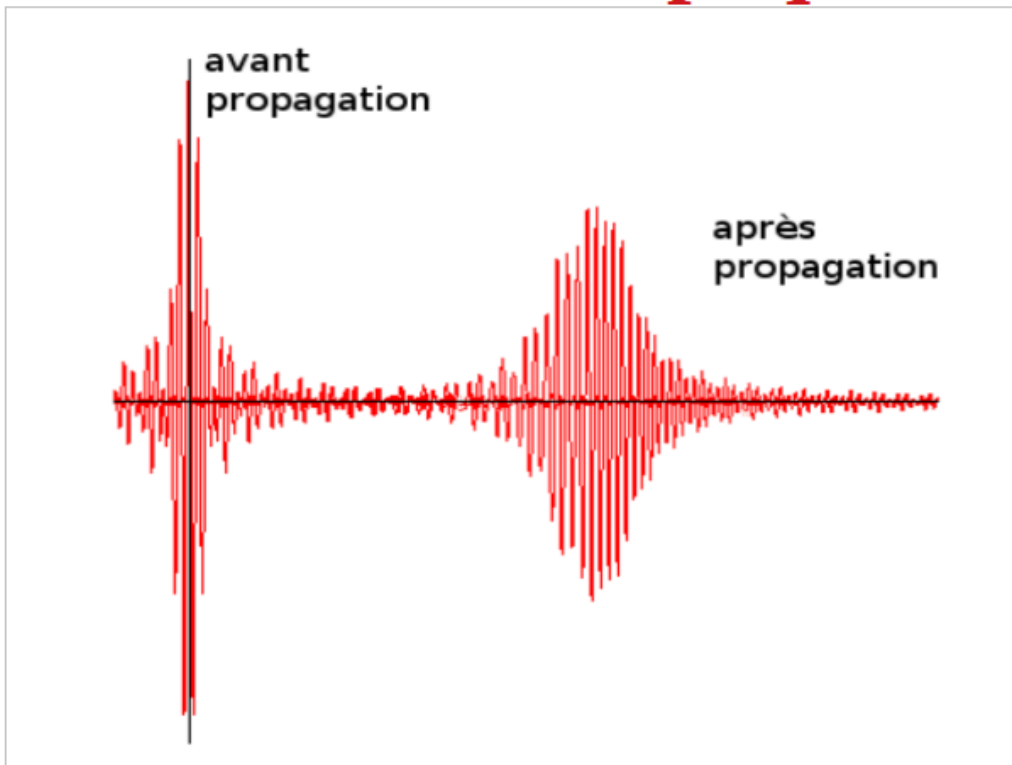
Modéliser un câble coaxial simplement



Modéliser un câble coaxial plus finement



S'intéresser à un paquet d'ondes




Ondes électriques

Les points du cours à connaître

I- Réflexion et transmission

1. Propriétés d'une OPPM (cas d'un câble coaxial)

 **Structure du câble coaxial** *schéma*

La figure 1 représente un câble coaxial. Celui-ci est constitué de trois cylindres de même axe Oz :

- l'âme, conducteur électrique, pour $r < a$;
- la " gaine ", isolant de permittivité relative ϵ_r , pour $r \in [a; b]$;
- la masse, conducteur, pour $r > b$.

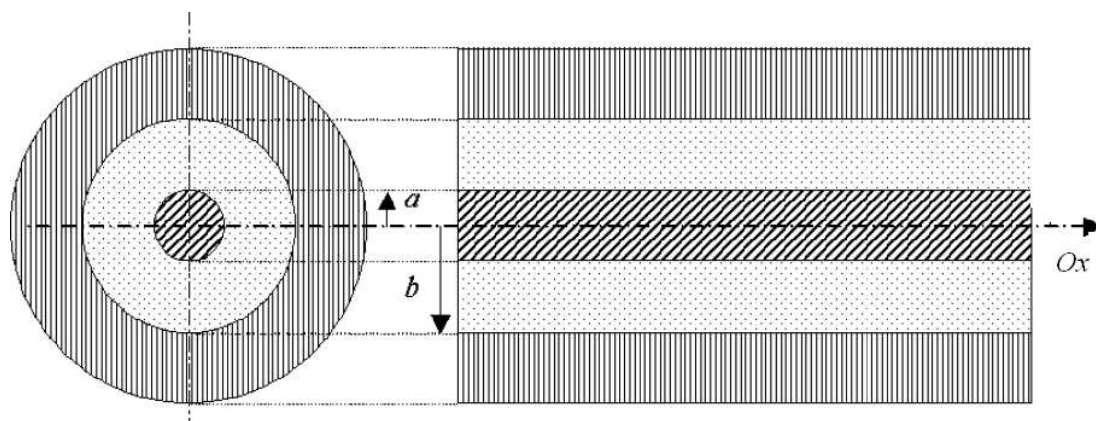



FIGURE 1 – Structure du câble coaxial

 **Modélisation électrique du câble coaxial sans pertes** *schéma*

La figure 2 représente Les éléments du circuit (dipôles) sont des constantes localisées : on notera l'inductance propre par unité de longueur l et la capacité propre par unité de longueur c .

 **Impédance caractéristique d'un câble coaxial** *s'y retrouver*

L'impédance ne dépend que des caractéristiques du câble :

$$Z_c = \ell c_0 = \sqrt{\frac{\ell}{c}} = \frac{1}{c c_0}$$

car $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}$. Elle est réelle, positive et s'exprime en Ω .

Dans le cas du câble d'antenne $Z_c \sim 50\Omega$.

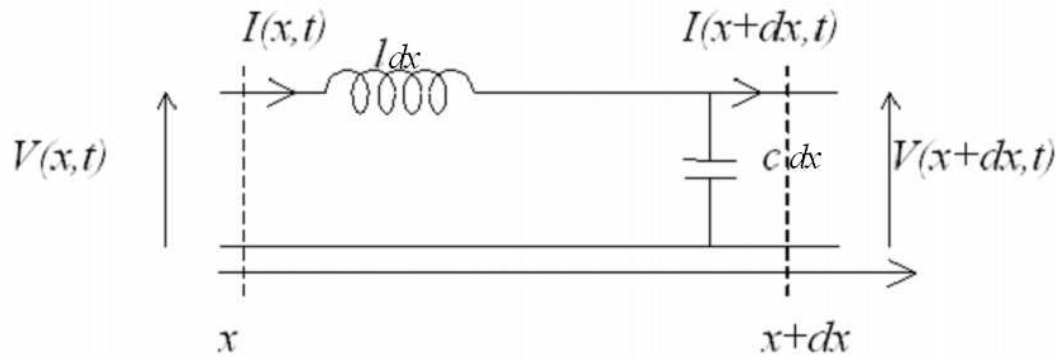


FIGURE 2 – Modélisation électrique du câble coaxial sans pertes



remarque

Attention au signe!

Pour une onde plane quelconque, il y a superposition d'une onde se propageant vers les x croissants (I_+) et d'une onde se propageant vers les x décroissants (I_-) :

$$I(t, x) = I_+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + I_- \left(t + \frac{x}{c_0} \right)$$

$$\Rightarrow V(t, x) = Z_c I_+ \left(t - \frac{x}{c_0} \right) - Z_c I_- \left(t + \frac{x}{c_0} \right)$$

**Densités d'énergies** *s'y retrouver*

l'énergie dans ℓdx est $dE_L = \frac{1}{2} \ell dx I^2$, qui donne une densité linéique d'énergie inductive

$$e_L = \frac{1}{2} \ell I^2$$

L'énergie dans $c dx$ est $dE_C = \frac{1}{2} c dx V^2$, qui donne une densité linéique d'énergie capacitive

$$e_C = \frac{1}{2} c V^2$$

L'énergie dans le petit élément de longueur dx est $dE = dE_L + dE_C = \frac{1}{2} \ell dx I^2 + \frac{1}{2} c dx V^2$ qui fait apparaître la densité linéique d'énergie

$$e = e_L + e_C = \frac{1}{2} \ell I^2 + \frac{1}{2} c V^2$$

**Puissance transférée d'un morceau à l'autre du câble** *s'y retrouver*

la partie du câble pour les abscisses $x < x_0$ transfère une puissance à la partie $x > x_0$:

$$P(t) = V(x_0, t) I(x_0, t)$$

On peut le retrouver en électricité : c'est la puissance qu'échange un dipôle, celui qui correspond à la partie $x > x_0$ du câble.

2. Réflexion en bout de ligne (cas d'un câble coaxial)

👁️ Câble coaxial terminé par une impédance *schéma*

La figure 3 représente un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c relié en $x = x_0$ à une impédance \tilde{Z} .

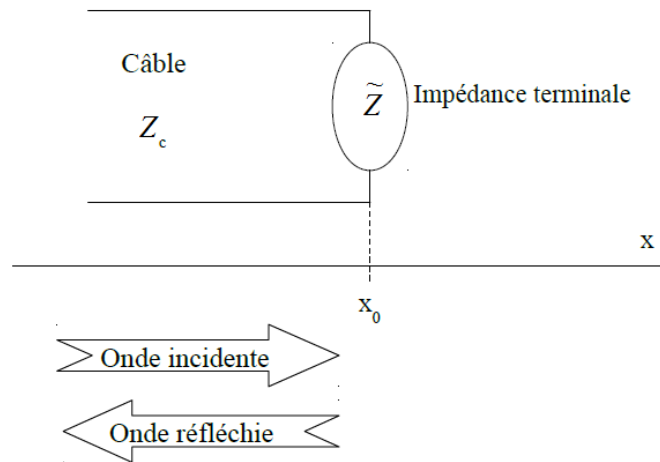


FIGURE 3 – Câble coaxial terminé par une impédance

⊗ Coefficients de réflexion en amplitude *s'y retrouver*

On définit le coefficient de réflexion

$$\text{en intensité : } r_I = \frac{\tilde{I}_r(x = x_0, t)}{\tilde{I}_i(x = x_0, t)} \text{ et en tension : } r_V = \frac{\tilde{V}_r(x = x_0, t)}{\tilde{V}_i(x = x_0, t)}$$

⊗ Coefficient de réflexion en énergie *s'y retrouver*

on définit le coefficient de réflexion énergétique par

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| \in [0, 1]$$

où la puissance moyenne est $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V} \tilde{I}^*)$.

⊗ Adaptation d'impédance *s'y retrouver*

On dit qu'il y a "adaptation d'impédance" si toute l'énergie est absorbée dans l'impédance terminale. C'est le cas si $\tilde{Z} = Z_c$.

3. Réflexion et transmission à une interface (cas d'un câble coaxial)

👁 Deux câbles coaxiaux *schéma*

La figure 4 représente un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_1 relié en $x = x_0$ à un autre câble coaxial d'impédance caractéristique Z_2 .

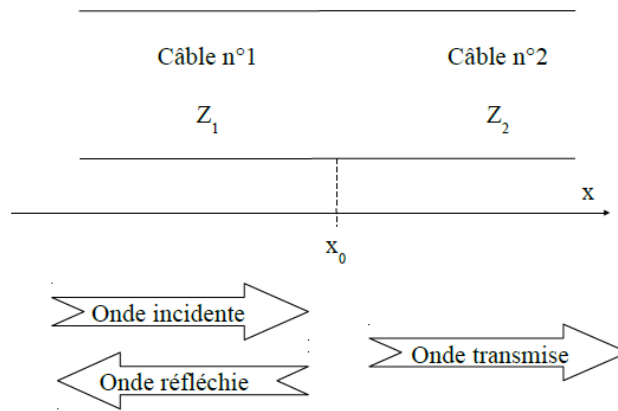


FIGURE 4 – Deux câbles coaxiaux

⊗ Coefficient de transmission en amplitude *s'y retrouver*

on définit le coefficient de transmission par

$$\text{en intensité : } t_I = \frac{I_t(x = x_0, t)}{I_i(x = x_0, t)} \text{ et en tension : } t_V = \frac{V_t(x = x_0, t)}{V_i(x = x_0, t)}$$

⊗ Coefficient de transmission en énergie *s'y retrouver*

on définit le coefficient de transmission énergétique par

$$T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| \Rightarrow R + T = 1$$

II- Dispersion et absorption

1. Equations d'onde et relation de dispersion

👁 Modélisation d'un câble coaxial résistif *schéma*

La figure 5 représente On s'intéresse à un câble coaxial dispersif. Ce câble a une inductance propre par unité de longueur ℓ , une capacité propre par unité de longueur c , une résistance par unité de longueur r_1 et une conductance par unité de longueur g_2 .

⊗ Recherche des solutions d'une équation d'onde *s'y retrouver*

On va chercher des solutions sous la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\tilde{\psi}(\vec{r}, t) \right)$$

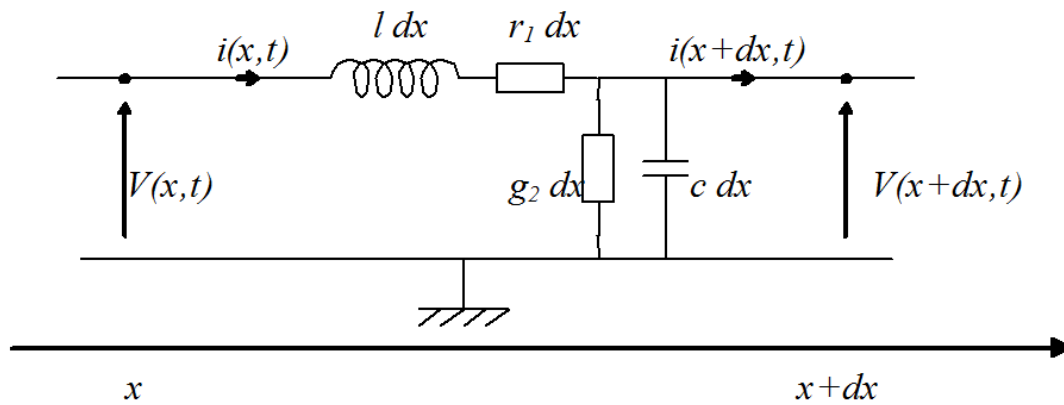


FIGURE 5 – Modélisation d'un câble coaxial résistif

où

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j(\tilde{k}x - \omega t + \varphi_0)}$$

où ψ_0 et φ sont des constantes. Cette fois, \tilde{k} est *a priori* complexe.



Relation de dispersion *définition*

La relation de dispersion est l'équation entre le vecteur d'onde complexe \tilde{k} et la pulsation ω des OPPM qui composent l'onde qui se propage dans ce milieu.



Solution d'une équation de dispersion *s'y retrouver*

En général, on cherche un vecteur d'onde complexe

$$\tilde{k} = k_r + j k_i \text{ avec } k_r = \text{Re}(\tilde{k}) \text{ et } k_i = \text{Im}(\tilde{k})$$

La forme de l'onde sera :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 e^{-k_i x} e^{-j(\omega t - k_r x - \varphi_0)}$$

2. Milieu absorbant / Onde amortie



Onde amortie *s'y retrouver*

L'onde est de la forme :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 e^{-k_i x} e^{-j(\omega t - k_r x - \varphi_0)}$$

Donc l'amplitude de l'onde est

$$\psi_0 e^{-k_i x} = \psi_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$$

L'amplitude de l'onde décroît sur une taille caractéristique (appelée longueur de pénétration)

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{1}{\text{Im}(\tilde{k})}$$

Puisque l'amplitude de l'onde décroît avec x si l'onde se propage vers les x croissants, on parle d'onde absorbée.



"Photographie" d'une onde amortie sur une corde *schéma*

La figure 6 représente la "photographie" d'une onde amortie sur une corde. L'atténuation a lieu dans le sens de propagation de l'onde. L'onde perd de l'énergie au profit du milieu de propagation : il y a absorption de l'onde.

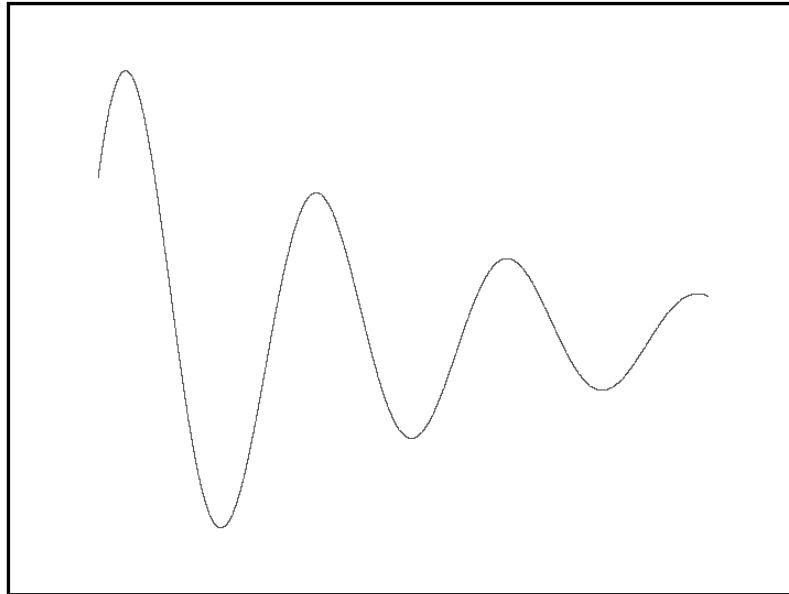


FIGURE 6 – "Photographie" d'une onde amortie sur une corde

3. Milieu dispersif



Vitesse de phase *définition*

Pour une onde plane de pulsation ω ayant une partie réelle du vecteur d'onde k_r , on définit une vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r}$$



Milieu dispersif *définition*

Un milieu est dit dispersif si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'onde plane.



Exemple de la loi de Cauchy *s'y retrouver*

en optique, on définit l'indice optique par $n = \frac{c}{v}$ où v est la vitesse de l'onde électromagnétique dans un milieu (transparent) et c la vitesse de la lumière dans le vide. La loi

empirique de Cauchy relie n à la longueur d'onde (dans le vide) $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}$:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

où A et B sont des constantes.

On voit donc que les milieux matériels sont dispersifs pour les ondes lumineuses : $v_\varphi = \frac{c}{n}$ est fonction de λ donc de ω .

III- Paquet d'ondes

1. Notion de paquet d'ondes

Nécessité du paquet d'ondes *s'y retrouver*

une OPPM n'est pas physique car elle a une extension infinie dans l'espace et dans le temps. Elle ne finit jamais, et a débuté il y a un temps infini ! // L'OPPM est un outil mathématique intéressant car on peut décomposer une onde sous la forme de superposition d'OPPM.

Forme mathématique d'un paquet d'onde *définition*

La décomposition continue d'une onde plane complexe se propageant suivant Ox par une superposition d'OPPM peut s'écrire

$$\tilde{\psi} = \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega t - k \cdot x)} d\omega$$

où $\tilde{A}(\omega)$ est le spectre de cette onde.

Extension d'un paquet d'ondes *s'y retrouver*

Bien souvent $\tilde{A}(\omega) \neq 0$ dans un domaine très limité, de largeur $\Delta\omega$: on parle de paquet d'ondes.

Dans le domaine des fréquences, le paquet d'ondes a une extension $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$.

Paquet d'ondes *schéma*

La figure 7 représente un paquet d'ondes. Il a été généré en superposant une vingtaine d'OPPM.

"Petit" paquet d'ondes *s'y retrouver*

On peut montrer que le paquet d'onde a, en un endroit, une durée Δt telle que

$$\Delta t \Delta\omega \approx 1$$

De la même façon, un instantané montrerait que l'extension spatiale de l'onde est Δx ,

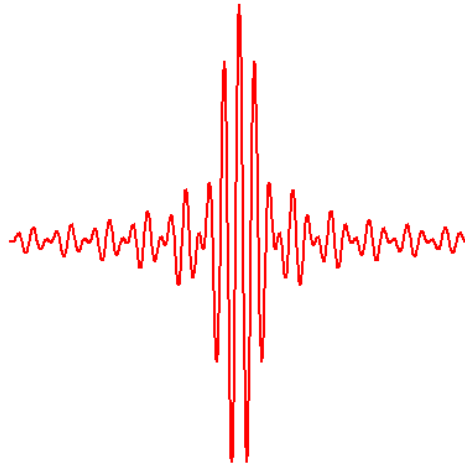


FIGURE 7 – Paquet d’ondes

reliée à la largeur en vecteur d’onde Δk par :

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

2. Vitesse de groupe

✳ Petit paquet d’ondes *s’y retrouver*

On s’intéresse à un petit paquet d’ondes : on suppose que $k = k_0 + \delta k$ et $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, avec $\delta\omega \ll \omega_0$ et $\delta k \ll k_0$

📎 Vitesse de groupe *définition*

On définit la vitesse de groupe par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

au voisinage de $(k_0; \omega_0)$.

✳ Interprétation du paquet d’onde *s’y retrouver*

on a donc trouvé une onde moyenne (autour de $(k_0; \omega_0)$: $e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$), modulée par une enveloppe \hat{A}' qui se déplace donc vers les x croissants à la vitesse de groupe v_g car on retrouve le facteur $e^{j\delta\omega\left(t - \frac{x}{v_g}\right)}$.

3. Propagation d’un paquet d’ondes

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant se caractérise par la transmission du paquet d'ondes identique à lui-même au cours de la propagation. Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *schéma*

La figure 8 représente la propagation dans un milieu absorbant. Le paquet d'onde va se déformer : il va s'étaler et s'amenuiser.

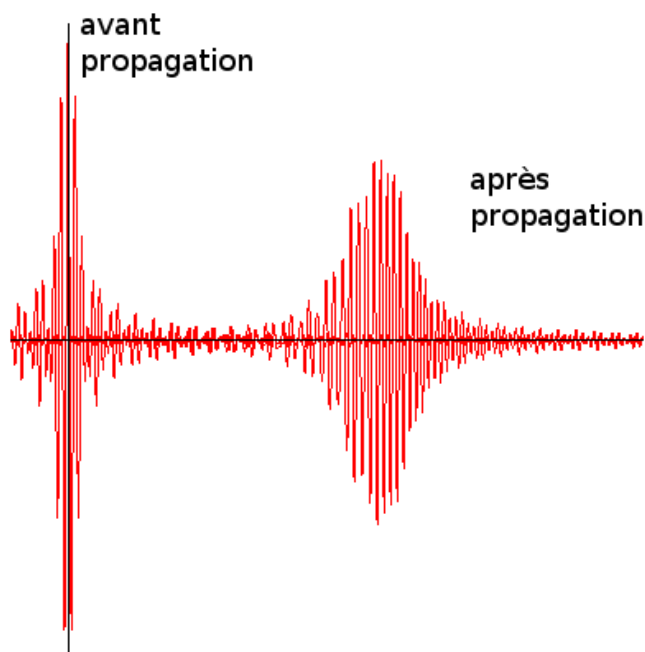


FIGURE 8 – Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif fait apparaître un élargissement de ce paquet d'ondes. Le fait que le milieu soit absorbant se caractérise par l'affaiblissement de l'amplitude du paquet d'ondes au cours de la propagation.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Transmission de l'information *s'y retrouver*

pour transmettre une information, un émetteur doit envoyer à un récepteur une onde limitée dans le temps et l'espace : une impulsion, un petit paquet d'ondes.

Le récepteur détectera le passage de ce paquet d'onde, c'est à dire, en gros, le passage du maximum de l'enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe.

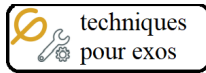
La transmission de l'information se fait donc à la vitesse v_g .



Valeurs numériques (compléments) Ondes électriques

Dans un câble coaxial :

- impédance caractéristique $Z_c \approx 50\Omega$;
- célérité de l'onde : $c_0 \approx \frac{2}{3}c \approx 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Etablir une équation de propagation dans un câble électrique

On part de l'étude d'un petit élément de longueur dx , et on écrit la loi des mailles et celle des nœuds grâce au modèle à constantes réparties.

On découple les deux équations couplées en les dérivant à nouveau.

Chercher des solutions à une équation de propagation linéaire

Détermination la relation de dispersion

On cherche une onde de la forme : $\underline{\psi} = \psi_0 e^{-j(\omega t - \underline{k}x - \varphi_0)} = \underline{\psi}_0 e^{-j(\omega t - \underline{k}x)}$.

NB : on aurait pu tout aussi bien choisir $\underline{\psi} = \underline{\psi}_0 e^{+j(\omega t - \underline{k}x)}$. Mais une fois fait le choix, on n'en change plus !

On injecte $\underline{\psi}$ dans l'équation de propagation On en déduit la relation de dispersion $\underline{k} = f(\omega)$.

Détermination de l'onde solution

- Il faut trouver la solution de la relation de dispersion de en utilisant $\underline{k} = k_r + j k_i$ (avec k_r et k_i deux réels) qui donne deux équations réelles.

- Une fois déterminés k_r et k_i , on réinjecte dans la forme de l'onde :

$$\underline{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega t - \underline{k}x - \varphi_0)} = \psi_0 e^{-k_i x} e^{-j(\omega t - k_r x - \varphi_0)}$$

Remarque : s'il y a plusieurs possibilités pour k_r et k_i , on somme les solutions (superposition).

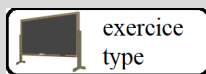
- On repasse ensuite aux réels.
- Les conditions aux limites donnent les constantes (ψ_0 et φ_0).

Paquets d'ondes

L'onde complexe est la superposition d'ondes monochromatiques : $\underline{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega t - k \cdot x)} d\omega$ où $|\underline{A}(\omega)|$ est le spectre de cette onde.

En faisant le développement limité autour de (ω_0, k_0) : $\omega = \omega_0 + u$ et $k(\omega) \approx k_0 + \frac{\partial k}{\partial \omega} u = k_0 + \frac{u}{v_g}$ on peut déterminer le paquet d'ondes par le changement de variable $\omega \rightarrow u$:

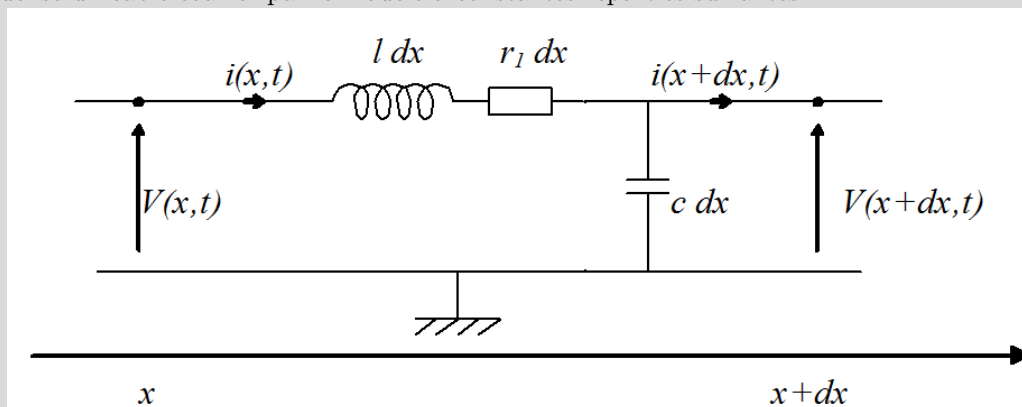
$$\underline{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega_0 + u) \cdot e^{j \cdot (u t - \frac{u}{v_g} x)} e^{j \cdot (\omega_0 t - k_0 x)} du$$



Exercice 10.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Milieu dispersif et / ou absorbant

On modélise un câble coaxial par le modèle à constantes réparties suivantes :



- 1) Déterminer la forme des ondes électriques.
- 2) Interpréter la forme trouvée.

1) Détermination des ondes

1.a) Etablissement de l'équation de propagation

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + r_1 \cdot dx \cdot I(x,t) = -V(x+dx,t) + V(x,t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x,t) - I(x+dx,t) = c \cdot dx \cdot \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t}$$

soit

$$-\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

On arrive à deux équations couplées :

$$c \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad l \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + r_1 \cdot I(x,t) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps t et à l'espace x commutant. En dérivant la seconde par rapport à x , on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} \right) - r_1 \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

et en utilisant la première,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial V}{\partial t} \right) + r_1 \left(c \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Ce qui nous mène à l'équation que $I(x,t)$ suit aussi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + r_1 c \frac{\partial V}{\partial t}$$

1.b) Détermination de la relation de dispersion

En injectant $\underline{V} = \underline{V}_0 e^{-j(\omega t - \underline{k}x)}$, cela donne l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \ell c \omega^2 + j r_1 c \omega$$

1.c) Résolution de la relation de dispersion

En utilisant $\underline{k} = k_r + j k_i$ (avec k_r et k_i deux réels), on trouve deux équations réelles :

$$k_r^2 - k_i^2 = \ell c \omega^2 \quad \text{et} \quad 2 k_r k_i = r_1 c \omega$$

qui donne une relation bicarrée sur k_r .

2) Interprétation :

$k_i \neq 0$: le milieu est absorbant (partie résistive)

$k_r = f(\omega)$: le milieu est dispersif.



Exercice 10.2 pour s'entraîner

Equation de dispersion de Klein Gordon

On s'intéresse à un milieu qui vérifie la relation de dispersion de Klein-Gordon :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 \cdot c^2$$

1) Calculer en fonction de ω , ω_p et c :

1.a) la vitesse de phase v_φ ,

1.b) la vitesse de groupe v_g .

2) Exprimer v_g en fonction de c et v_φ .

3) Comparer chacune des vitesses à c .

1)

1.a) la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

1.b) la vitesse de groupe :

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

2)

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

3) $v_g < c < v_\varphi$.**Exercice 10.3** pour s'entraîner**Equation de propagation dans un câble coaxial sans perte**

On s'intéresse à un câble coaxial sans perte. On notera l'inductance propre par unité de longueur l et la capacité propre par unité de longueur c .

Montrer que tension V et intensité I vérifient l'équation de D'Alembert. Que vaut la célérité des ondes dans le câble ?

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \cdot \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} \text{ soit } -\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

L'étude électrocinétique du petit élément de longueur dx qui présente une inductance $l \cdot dx$ et une capacité $c \cdot dx$ nous amène à deux équations couplées :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps t et à l'espace x commutant. Ainsi, en dérivant par rapport à x la première et par rapport à t la seconde, on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant par rapport à x la seconde équation et par rapport à t la première, on trouve :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ainsi, tension V et intensité I vérifient ainsi la même équation de propagation, celle de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

avec la célérité $c_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$.

**Exercice 10.4** pour s'entraîner**Equation de dispersion dans le cas de l'équation de propagation de D'Alembert**

Déterminer l'équation de dispersion dans le cas de l'équation de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow \tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$



Exercice 10.5 pour s'entraîner Caractéristiques d'un câble

Les rayons de l'âme et de la gaine d'un câble coaxial de télévision valent respectivement $a = 1\text{mm}$ et $b = 3,5\text{mm}$.

L'espace séparant l'âme et la gaine n'est pas vide mais rempli d'un matériau isolant non magnétique (polyéthylène) de permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 2,26$. La capacité et l'inductance linéiques du câble sont respectivement :

$$\begin{cases} c = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

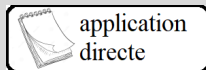
- 1) Calculer la vitesse c_0 de propagation des signaux électriques.
- 2) Calculer l'impédance caractéristique Z_c du câble.

- 1) La célérité des ondes est :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} = 2 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 2) L'impédance caractéristique est :

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Exercice 10.6 pour s'entraîner Equation de propagation dans un câble coaxial avec perte

On s'intéresse à un câble coaxial dispersif. Ce câble a une inductance propre par unité de longueur l , une capacité propre par unité de longueur c , une résistance par unité de longueur r_1 et une conductance par unité de longueur g_2 .

- 1) Déterminer l'équation "des télégraphistes" suivie par la tension et l'intensité dans le câble.
- 2) Vérifier que l'on retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où $r_1 = 0$ et $g_2 = 0$.

- 1) Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + r_1 \cdot dx \cdot I(x, t) = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x + dx, t)$$

soit

$$-\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x, t)$$

On arrive à deux équations couplées :

$$c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) = -\frac{\partial I}{\partial x} \text{ et } l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + r_1 \cdot I(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps t et à l'espace x commutant. En dérivant la seconde par rapport à x , on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \right) - r_1 \frac{\partial I(x, t)}{\partial x}$$

et en utilisant la première,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) \right) + r_1 \left(c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) \right)$$

Ce qui nous mène à l'équation "des télégraphistes" que $I(x, t)$ suit aussi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (r_1 \cdot c + l \cdot g_2) \frac{\partial V}{\partial t} + r_1 \cdot g_2 \cdot V(x, t)$$

2) On retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où $r_1 = 0$ et $g_2 = 0$.



application
directe

Exercice 10.7 pour s'entraîner

Equation de dispersion dans le cas d'un câble coaxial résistif

Dans le cas d'un câble coaxial résistif, on aboutit à l'équation de propagation dite des "télégraphistes" :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} + (r_1 \cdot c + l \cdot g_2) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + r_1 \cdot g_2 \cdot \tilde{\psi}$$

Déterminer alors l'équation de dispersion.

Cela donne l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = l \cdot c \cdot \omega^2 + j \cdot (r_1 \cdot c + l \cdot g_2) \omega - r_1 \cdot g_2$$



application
directe

Exercice 10.8 pour s'entraîner

Corde avec frottement

On considère une corde inextensible tendue principalement suivant un axe Ox , de masse linéique μ_l soumise à une tension T_0 avec une force de frottement fluide par unité de longueur $\vec{f}_f = -\lambda \cdot \vec{v}$.

On note $\vec{T}(x, t)$ la tension qu'exerce à l'instant t la partie de fil d'abscisse supérieure à x sur la partie de fil d'abscisse inférieure à x .

Déterminer l'équation de propagation des ondes sur une telle corde.

Le petit élément de longueur dx entre les abscisses x et $x + dx$ est à l'altitude $y(x, t)$ à l'instant t . Cet élément fait avec l'axe Ox un angle

$$\alpha(t) \approx \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

car cet angle est petit. Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) - \lambda \cdot dx \cdot \vec{v}$$

dont la projection suivant \vec{u}_x donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

car le déplacement de la corde se fait selon une direction Oy perpendiculaire à Ox . Aussi, on pourra considérer $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$, constante. Donc, la projection suivant \vec{u}_y de la tension est $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$, ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t}$$

Comme l'angle est $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$, soit une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_i}}$ et le temps caractéristique d'amortissement $\tau = \frac{\mu_i}{\lambda}$.



Exercice 10.9 pour s'entraîner

Equation de dispersion dans le cas d'une corde subissant un frottement fluide

Dans le cas de la corde subissant une force de frottement fluide, on aboutit à l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}$$

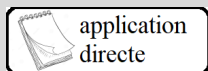
Déterminer alors l'équation de dispersion.

Cela donne l'équation de dispersion

$$(-j.\omega)^2 + \frac{-j.\omega}{\tau} = c_0^2 \cdot (j.\tilde{k})^2$$

soit l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{j.\omega}{\tau.c_0^2}$$



Exercice 10.10 pour s'entraîner

Equation de dispersion dans le cas d'une chaîne de pendules couplés

La propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse M et longueur L , couplés par des ressorts de raideur K , disposés à une distance a les uns des autres dans l'approximation des milieux continus suit l'équation : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ avec $c^2 = a^2 \cdot \omega_p^2$.

Déterminer l'équation de dispersion.

L'équation de dispersion est celle de Klein Gordon :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 \cdot k^2$$



Exercice 10.11 pour s'entraîner

Diverses ondes à la surface de l'eau

On peut montrer que la relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :

$$\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma \cdot k^3}{\mu} \right) th(k.h)$$

où $g = 9,81 m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur, $\mu = 1,0 kg/L$ la masse volumique de l'eau et $\gamma = 72.10^{-3} SI$ la tension superficielle à l'interface eau-air.

1) Calculer la vitesse de groupe d'une onde :

1.a) de marée ($\lambda = 1000 km$ et $h = 5 km$),

1.b) de houle ($\lambda = 5 m$),

1.c) de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau profonde ($\lambda = 1 cm$),

1.d) de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe sur une cuve à onde ($\lambda = 2 cm$ et $h = 1 mm$).

1) NB : en eaux profondes, $th(k.h) \approx 1$. On trouve :

1.a) pour une onde de marée de $\lambda = 1000km$ et $h = 5km$,

$$v_g = 800km/h$$

1.b) pour une onde de houle ($\lambda = 5m$),

$$v_g = 5km/h$$

1.c) pour une onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau profonde ($\lambda = 1cm$),

$$v_g = 30cm.s^{-1}$$

1.d) et pour une onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe sur une cuve à onde ($\lambda = 2cm$ et $h = 1mm$),

$$v_g = 20cm.s^{-1}$$



application
directe

Exercice 10.12 pour s'entraîner

Onde absorbée

1) Une onde plane se déplace dans un milieu absorbant. On suppose que la puissance absorbée par un volume élémentaire est proportionnelle à ce volume et à l'intensité de l'onde au voisinage du volume considéré.

1.a) Montrer alors que l'intensité de l'onde décroît exponentiellement avec la distance parcourue dans le milieu (loi de Beer-Lambert).

1.b) Que dire alors de l'intensité en décibels ?

2) Application : une fibre optique présente une absorption de $0,1dB.km^{-1}$. Au bout de quelle longueur l'intensité d'entrée aura-t elle diminué de moitié ?

1) La puissance incidente sur une tranche de section transversale S comprise entre les abscisses z et $z+dz$ est $I(z).S$ où $I(z)$ est l'intensité de l'onde à l'abscisse z . De même, la puissance transmise est $I(z+dz).S$.

La puissance absorbée est proportionnelle au volume $S.dz$ traversé et à l'intensité incidente, on a donc : $I(z+dz).S - I(z).S = -\beta.S.I(z).dz$ où β est un coefficient positif.

1.a) On a donc $\frac{dI}{dz} = -\beta.I(z)$ qui s'intègre en :

$$I(z) = I_0.e^{-\beta.z}$$

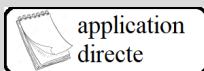
L'intensité décroît exponentiellement.

1.b) L'intensité en décibels est $I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I(z)}{I_{ref}} \right)$. C'est donc une fonction affine décroissante de z de pente $-\frac{10.\beta}{\ln(10)}$:

$$I_{dB} = 10.\log \left(\frac{I_0}{I_{ref}} \right) - \frac{10.\beta}{\ln(10)} z$$

2) $\frac{10.\beta}{\ln(10)} = 0,1dB.km^{-1}$. La longueur L au bout de laquelle $\frac{I(L)}{I_0} = \frac{1}{2}$ est :

$$L = \frac{2}{\beta} = 30km$$



application
directe

Exercice 10.13 pour s'entraîner

Interférence d'un paquet d'onde

On s'intéresse à un paquet d'onde de largeur spectrale $\Delta\omega$, faible devant la pulsation « moyenne » ω_m du

paquet.

- 1) Calculer l'amplitude du paquet d'ondes suivant :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{n=+\frac{N-1}{2}} A_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t - k_n \cdot x)$$

où $\omega_n = \omega_m + \frac{n}{N} \Delta\omega$. On supposera pour simplifier les calculs que N est impair.

- 2) Quelle durée caractéristique Δt peut être attribuée aux bouffées d'ondes de ce paquet ? Commenter sa dépendance vis-à-vis de sa largeur spectrale $\Delta\omega$.

- 1) On peut changer $\psi(x, t)$ en :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot \operatorname{Re} \left(e^{j \cdot (\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{n=+\frac{N-1}{2}} e^{j \cdot \frac{n}{N} \Delta\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} \right)$$

Il s'agit ensuite de calculer la série géométrique. On trouve pour finir :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot \frac{\sin \left[\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right]}{\sin \left[\frac{\Delta\omega}{2 \cdot N} \left(t - \frac{x}{v_g}\right) \right]} \cdot \cos(\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)$$

- 2) On peut associer à chaque " bouffée " du paquet d'ondes une durée

$$\Delta t \approx \frac{1}{\Delta\omega}$$

d'autant plus courte que la largeur spectrale est étendue.



Exercice 10.14 pour s'entraîner

Vitesses de phase et de groupe

- 1) Démontrer la relation de Rayleigh entre vitesses de phase et de groupe qui fait intervenir comme variable la longueur d'onde λ :

$$v_g = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}$$

- 2) On suppose que la relation de dispersion s'écrit $\omega = A \cdot k^\alpha$ où A et α sont indépendants de k . Exprimer la vitesse de groupe en fonction de v_ϕ et α .

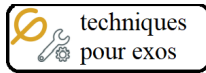
- 1) On peut écrire

$$v_g = \frac{d(v_\phi \cdot k)}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = v_\phi + k \frac{d\lambda}{dk} \frac{dv_\phi}{d\lambda}$$

qui donne la formule de Rayleigh car $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, d'où $k \frac{d\lambda}{dk} = k \frac{-2\pi}{k^2} = -\lambda$.

- 2) On peut faire la dérivée logarithmique de la relation de dispersion, et on trouve :

$$v_g = \alpha \cdot v_\phi$$



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Ondes en présence à une interface

On écrit les ondes incidente, transmise et réfléchie en complexe.

NB : souvent les ondes sont sous deux formes (tension \tilde{V} et intensité \tilde{I} par exemple pour les ondes électriques).

Cas des ondes électriques sur un câble

- onde incidente se propageant vers la droite dans le milieu 1 : $\tilde{V}_i = \tilde{V}_0 e^{-j(\omega t - k_1 x)} = Z_1 \tilde{I}_i$;
- onde réfléchie se propageant vers la gauche dans le milieu 1 : $\tilde{V}_r = r_V \tilde{V}_0 e^{-j(\omega t + k_1 x)} = -Z_1 \tilde{I}_r$;
- onde incidente se propageant vers la droite dans le milieu 1 : $\tilde{V}_t = t_V \tilde{V}_0 e^{-j(\omega t - k_2 x)} = Z_2 \tilde{I}_t$.

Conditions de continuité à l'interface

Il s'agit d'abord de déterminer la condition à l'interface.

Transmission et réflexion pour une onde électrique sur un câble

Dans ce cas, les conditions de continuité à l'interface sont :

- la continuité de la tension $V(x = x_0^-, t) = V(x = x_0^+, t) \forall t$;
- la continuité de l'intensité $I(x = x_0^-, t) = I(x = x_0^+, t) \forall t$.

Transmission et réflexion pour une onde mécanique sur une corde

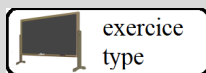
Dans ce cas, les conditions de continuité à l'interface sont :

- la continuité de la déformation $y(x = x_0^-, t) = y(x = x_0^+, t) \forall t$;
- la continuité de la force $T_y(x = x_0^-, t) = T_y(x = x_0^+, t) \forall t$.

Détermination des coefficients

Le tout donne un système d'équations qui permet de déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude.

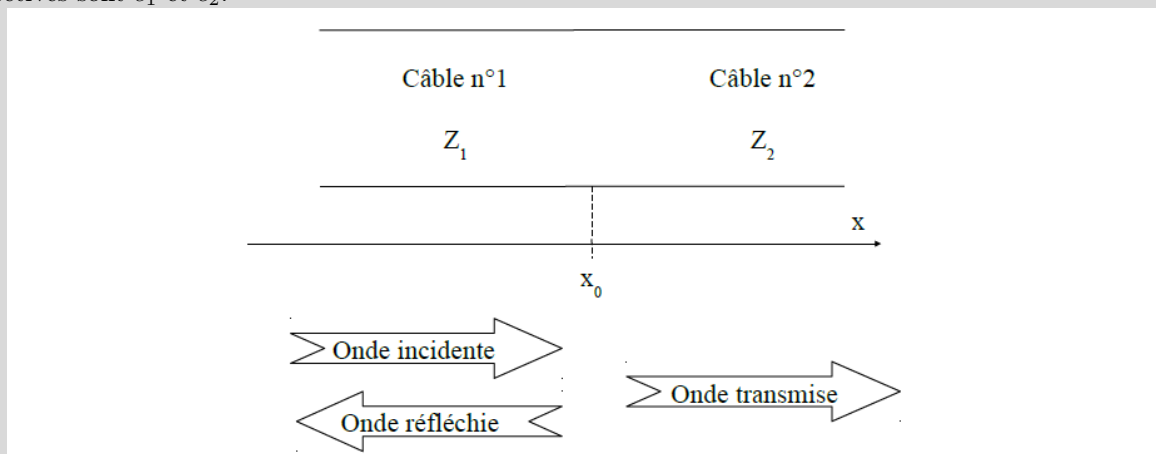
Le calcul du coefficient de réflexion énergétique mène à $R = |r|^2$. On en déduit le coefficient de transmission énergétique par $T = 1 - R$.



Exercice 10.15 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Passage d'un milieu à un autre pour une onde

On s'intéresse à un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_1 relié en $x = x_0 = 0$ à un autre câble coaxial d'impédance caractéristique Z_2 . Chacun des deux câbles coaxiaux suit l'équation de d'Alembert. Les célérités respectives sont c_1 et c_2 .



- 1) Déterminer les coefficients de transmission et de réflexion.

1)

1.a) Ondes en présence à une interface

On écrit les ondes incidente, transmise et réfléchi en complexe :

- onde incidente se propageant vers la droite dans le milieu 1 : $\underline{V}_i = \underline{V}_0 e^{-j(\omega t - k_1 x)} = Z_1 \underline{I}_i$;
- onde réfléchi se propageant vers la gauche dans le milieu 1 : $\underline{V}_r = r_V \underline{V}_0 e^{-j(\omega t + k_1 x)} = -Z_1 \underline{I}_r$;
- onde incidente se propageant vers la droite dans le milieu 2 : $\underline{V}_t = t_V \underline{V}_0 e^{-j(\omega t - k_2 x)} = Z_2 \underline{I}_t$.

1.b) Conditions de continuité à l'interface

Les conditions de continuité à l'interface sont :

- la continuité de la tension $V(x = x_0^-, t) = V(x = x_0^+, t) \forall t$;
- la continuité de l'intensité $I(x = x_0^-, t) = I(x = x_0^+, t) \forall t$.

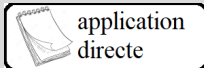
ce qui donne :

$$\begin{aligned} \underline{V}_0 e^{-j(\omega t)} + r_V \underline{V}_0 e^{-j(\omega t)} &= t_V \underline{V}_0 e^{-j(\omega t)} \\ \frac{\underline{V}_0}{Z_1} e^{-j(\omega t)} + \frac{r_V \underline{V}_0}{-Z_1} e^{-j(\omega t)} &= \frac{t_V \underline{V}_0}{Z_2} e^{-j(\omega t)} \end{aligned}$$

1.c) RésolutionSoit $1 + r_V = t_V$ et $1 - r_V = \frac{Z_1}{Z_2} t_V$. On trouve donc $t_V = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $r_V = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$.

On trouverait les coefficients en amplitude pour l'intensité facilement. Les coefficients énergétiques sont :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \text{ et } T = 1 - R.$$

application
directe**Exercice 10.16** pour s'entraîner**Coefficients de réflexion au bout d'un câble coaxial**

On considère un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c , pour $x < x_0$. Le câble se termine sur une impédance \tilde{Z} en $x = x_0$.

- 1) Déterminer les coefficients de réflexion en amplitude pour la tension et l'intensité.
- 2) En déduire le coefficient de réflexion en énergie.

1) En $x = x_0$, le câble se termine sur une impédance \tilde{Z} . Cette impédance impose comme condition à la limite

$$\tilde{V}(x_0, t) = \tilde{Z} \cdot \tilde{I}(x_0, t) \forall t$$

Pour réaliser une telle condition, il faut supposer que se superposent

- une onde incidente qui se propage vers les x croissants : $\tilde{V}_i = Z_c \cdot \tilde{I}_i$;
- une onde réfléchi qui se propage vers les x décroissants : $\tilde{V}_r = -Z_c \cdot \tilde{I}_r$.

L'onde dans le câble (pour $x < x_0$), est

$$\begin{cases} \tilde{I} = \tilde{I}_i + \tilde{I}_r \\ \tilde{V} = \tilde{V}_i + \tilde{V}_r = Z_c \cdot (\tilde{I}_i - \tilde{I}_r) \end{cases}$$

Donc, en x_0 , $\forall t$,

$$Z_c \cdot (\tilde{I}_i - \tilde{I}_r) = \tilde{Z} \cdot (\tilde{I}_i + \tilde{I}_r)$$

En x_0 , $\forall t$,

$$\tilde{I}_i \cdot (Z_c - \tilde{Z}) = \tilde{I}_r \cdot (Z_c + \tilde{Z})$$

Il vient d'après la condition à la limite précédemment énoncée

$$r_I = \frac{Z_c - \tilde{Z}}{Z_c + \tilde{Z}} \quad \text{et} \quad r_V = \frac{\tilde{Z} - Z_c}{Z_c + \tilde{Z}} = -r_I$$

2) Aussi,

$$R = \left| \frac{-Z_c \cdot \tilde{I}_r}{Z_c \cdot \tilde{I}_i} \right| = \left| \frac{\tilde{I}_r}{\tilde{I}_i} \right| = \left| \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{V}_i} \right|$$

ce qui permet de conclure

$$R = |r_V|^2 = |r_I|^2 = \frac{|\tilde{Z} - Z_c|^2}{|Z_c + \tilde{Z}|^2}$$

**Exercice 10.17** pour s'entraîner**Coefficients de réflexion et transmission à la jonction de deux cordes**

On s'intéresse à une corde très longue qui est composée de deux tronçons de masses linéiques μ_1 (si $x < 0$) et μ_2 (si $x > 0$), la tension étant toujours T_0 ; le nœud en $x = 0$ est sans masse.

- 1) Déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude.
- 2) Entre quelles limites peuvent-ils varier ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$.

1) On écrit

- la continuité de la déformation en $x = 0$: $y(x = 0^-, t) = y(x = 0^+, t) \quad \forall t$;
- la continuité des projections des tensions puisqu'il n'y a pas de masse discrète en $x = 0$: $T_y(x = 0^-, t) = T_y(x = 0^+, t) \quad \forall t$.

Or $F_y = Z_c \cdot v_y$ avec $Z_c = \sqrt{\mu \cdot T_0}$. Pour réaliser une telle condition, il faut supposer que coexistent

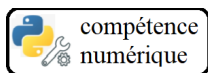
- une onde incidente qui se propage dans le premier câble (pour $x < x_0$) vers les x croissants : $\tilde{T}_{y_i} = Z_{c_1} \cdot \tilde{v}_{y_i} = \sqrt{\mu_1 \cdot T_0} \cdot j \cdot \omega \cdot \tilde{y}_i$;
- une onde réfléchie qui se propage dans le premier câble (pour $x < x_0$) vers les x décroissants : $\tilde{T}_{y_r} = -Z_{c_1} \cdot \tilde{v}_{y_r} = -\sqrt{\mu_1 \cdot T_0} \cdot j \cdot \omega \cdot \tilde{y}_r$.
- une onde transmise qui se propage dans le second câble (pour $x > x_0$) vers les x croissants : $\tilde{T}_{y_t} = Z_{c_2} \cdot \tilde{v}_{y_t} = \sqrt{\mu_2 \cdot T_0} \cdot j \cdot \omega \cdot \tilde{y}_t$.

Ainsi, la première relation donne : $\tilde{y}_i + \tilde{y}_r = \tilde{y}_t$ soit $1 + \tilde{r} = \tilde{t}$. D'autre part, la seconde relation donne : $\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_1} \tilde{r} = \sqrt{\mu_2} \tilde{t}$. Ces deux conditions donnent :

$$\begin{cases} \tilde{r} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \\ \tilde{t} = \frac{2 \cdot \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{2}{1 + \alpha} \end{cases}$$

2)

- $\alpha = 1$ correspond à une seule corde de dimension infinie, d'où $\tilde{r} = 0$ et $\tilde{t} = 1$;
- $\alpha = 0$ correspond à une extrémité libre en $x = 0$ (attention l'onde transmise ne transporte pas d'énergie puisque la masse de la deuxième corde est nulle), d'où $\tilde{r} = 1$ et $\tilde{t} = 0$;
- $\alpha = \infty$ correspond à un objet rigide en $x = 0$, d'où $\tilde{r} = -1$ et $\tilde{t} = 0$.



Exercice 10.18 (le prof présente les résultats jeudi) Propagation d'une onde

Extrait de l'aide fournie au concours CentraleSupélec

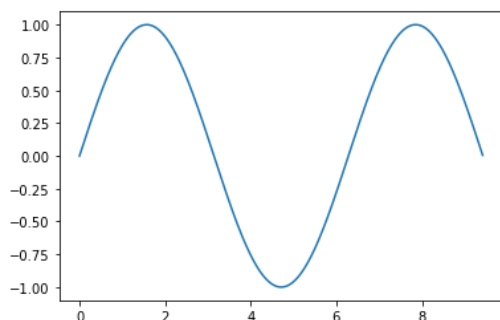
Les fonctions présentées dans ce document permettent la réalisation de tracés. Elles nécessitent l'import du module **numpy** et du module **matplotlib.pyplot**.

Il est généralement plus intéressant d'utiliser les fonctions du module **numpy**, plutôt que celles du module **math**, car elles permettent de travailler aussi bien avec des scalaires qu'avec des tableaux (on les appelle fonctions universelles).

```

▶ def f(x) :
    return np.sin(x)
X = np.arange(0, 3*np.pi, 0.01)
Y = f(X)
plt.clf()
plt.plot(X, Y)
plt.show()

```



Une autre solution consiste à utiliser la fonction `vectorize` du module `numpy` qui permet de transformer une fonction scalaire en une fonction capable de travailler avec des tableaux.

Il est à noter que les opérateurs python (+, -, *, etc.) peuvent s'appliquer à des tableaux, ils agissent alors terme à terme. Ainsi la fonction `f` définie ci-dessous est une fonction universelle, elle peut travailler aussi bien avec deux scalaires qu'avec deux tableaux et même avec un scalaire et un tableau.

```

[ ] def f(x, y) :
    return np.sqrt(x**2 + y**2)
f(3, 4)

5.0

```

Exemple de code python à adapter

```

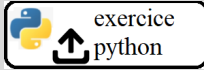
▶ # importation des bibliothèques
import numpy as np # pour les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques

# définition d'une fonction
def f(x_1,x_2):
    return (x_1**2-2*x_2)
f_vect = np.vectorize(f) # pour "vectorialiser" la fonction (ainsi on peut lui appliquer un tableau)
print(f"la valeur de f en x_1=1 et x_2=2 est f(1,2)={f(1,2)}\n")

# tableau
x_1_vec=np.arange(0,5,0.1) # tableau des x_1

# affichage de deux courbes
plt.clf() # effaçage des courbes précédentes
plt.plot(x_1_vec,f_vect(x_1_vec,2)) # première courbe
plt.plot(x_1_vec,f_vect(x_1_vec,3)) # deuxième courbe
plt.title('Courbes de $f(x_1,x_2)$') # titre
plt.xlabel('$x_1$') # nom des abscisses
plt.ylabel('$f(x_1,x_2)$ à $x_2$ fixé') # nom des ordonnées
plt.show() # affichage des courbes

```



Exercice 10.18 (code python à téléverser avant dimanche 24h sur cahier de prépas) Propagation d'une onde

La propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

La dispersion des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère terrestre est connue pour altérer les performances des radars à synthèse d'ouverture (SAR) avec leurs antennes montées sur des satellites (par opposition aux radars aéroportés conventionnels). Ce problème a attiré l'attention de la communauté scientifique depuis le début de la technologie SAR spatiale [...] en particulier, il est difficile d'atteindre une image de haute résolution pour les radars fonctionnant dans les bandes de fréquences VHF et UHF, c'est-à-dire en dessous de 1GHz. [...]

La propagation des ondes électromagnétiques transversales à haute fréquence dans le plasma dilué, par exemple, l'ionosphère de la Terre, est régie par l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} + \omega_{pe}^2 \vec{E} = \vec{0}$$

La quantité ω_{pe} dans l'équation précédente est appelée fréquence de Langmuir, ou fréquence des électrons du plasma.

Les valeurs typiques de la fréquence de Langmuir dans l'ionosphère terrestre se situent entre 3MHz et 15MHz. Pour l'application qui nous intéresse, un satellite SAR, les valeurs typiques de la fréquence porteuse commencent à plusieurs centaines de mégahertz (VHF et bandes UHF) et vont jusqu'à la gamme gigahertz (bande micro-onde). La relation de dispersion pour l'équation de Klein-Gordon est

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$$

(Traduction de l'introduction de l'article de S. V. Tsynkov "On SAR Imaging through the Earth's Ionosphere", Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 2, No. 1, pp. 140-182)

1) Préparation du script

- Ouvrir les bibliothèques nécessaires
- Ecrire des fonctions pour les relations de dispersion dans le cas de l'équation de d'Alembert ($k = \frac{\omega}{c}$) et celle de Klein-Gordon ($k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{c}$).
- Ecrire une fonction calculant une OPPM $\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - k(\omega) x)$.
- Ecrire des fonctions permettant de définir un spectre carré ou gaussien $e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$.

2) Choix du paquet d'ondes

- Définir un paquet d'ondes, somme d'OPPM pour un spectre donné suivant une relation de dispersion donnée.
- Calculer les vitesses de phase et de groupe.

3) Evolution du paquet d'ondes

- Définir les paramètres spatiaux et temporels idoines en vue de l'affichage.
- Superposer différentes allures dans l'espace du paquet d'ondes à différentes dates.
- Comparer l'évolution du paquet d'ondes suivant le spectre et l'équation de dispersions choisis.

1) Préparation du script

```
[1] # ouverture des bibliothèques
import numpy as np          # pour les tableaux
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques

# données
c=1                        # célérité en m/s
omega_coupure=1           # pulsation coupure pour Klein-Gordon

def oppm(x,t,omega,k,amplitude): # définition d'une OPPM
    return amplitude*np.cos(omega*t - k*x)

def dalembert(omega):         # vecteur d'onde dans le cas de d'Alembert
    return omega/c

def klein_gordon(omega):     # vecteur d'onde dans le cas de Klein-Gordon
    return np.sqrt(omega**2-omega_coupure**2)/c
```

```
def spectre_carre(omega):
    if np.abs(omega-omega_centrale)>delta_omega/2:
        return 0
    else:
        return 1
Spectre_carre=np.vectorize(spectre_carre)

def Spectre_gaussien(omega):
    return np.exp(-((omega-omega_centrale)/(delta_omega))**2)
```

2) Choix du paquet d'ondes

```
# choix des paramètres physiques
omega_centrale= 1.5        # pulsation centrale du paquet d'ondes (choisir entre 0 et 5)
delta_omega=0.2           # largeur du paquet d'ondes (choisir <omega_centrale)
spectre=Spectre_gaussien  # choisir Spectre_carre ou Spectre_gaussien
dispersion=klein_gordon   # choisir dalembert ou klein_gordon

# calculs physiques
v_phi=omega_centrale/dispersion(omega_centrale)
print(f"La vitesse de phase pour la pulsation centrale est {v_phi:.2e} m/s\n")
v_g=(1.001*omega_centrale-omega_centrale)/(dispersion(1.001*omega_centrale)-dispersion(omega_centrale))
print(f"La vitesse de groupe est {v_g:.2e} m/s\n")

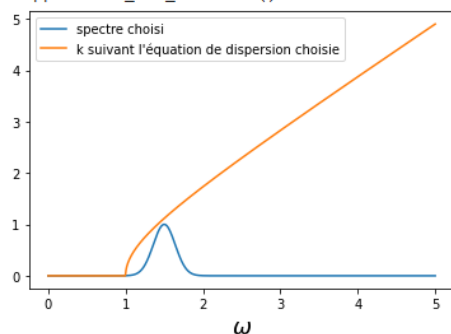
# calculs du paquet d'ondes
Omega=np.linspace(0,5,1000) # vecteur de tous les omega considérés
K=dispersion(Omega)         # vecteurs de tous les k considérés
K=np.nan_to_num(K)          # problème de définition pour omega<omega_coupure
Amplitude=spectre(Omega)    # amplitude des OPPM à omega donnée

plt.clf()
plt.xlabel("$\omega$",size=18)
plt.plot(Omega,Amplitude,label="spectre choisi")
plt.plot(Omega,K,label="k suivant l'équation de dispersion choisie")
plt.legend(loc="best")
plt.show()
```

↳ La vitesse de phase pour la pulsation centrale est 1.34e+00 m/s

La vitesse de groupe est 7.46e-01 m/s

/usr/local/lib/python3.7/dist-packages/ipykernel_launcher.py:16: RuntimeWarning: invalid value encountered in sqrt
app.launch_new_instance()



3) Evolution du paquet d'ondes

```

▶ t_c=2*np.pi/omega_centrale      # période caractéristique
  delta_t=t_c/20.                  # pas temporel
  Delta_t=2*np.pi/delta_omega     # largeur temporelle du paquet d'ondes

  lambda_c=c*2*np.pi/omega_centrale # longueur d'onde caractéristique
  delta_x=lambda_c/20.             # pas spatial
  Delta_x=c*Delta_t                # largeur spatiale du paquet d'ondes

  # différentes dates
  t_min=0
  t_max=5*Delta_t

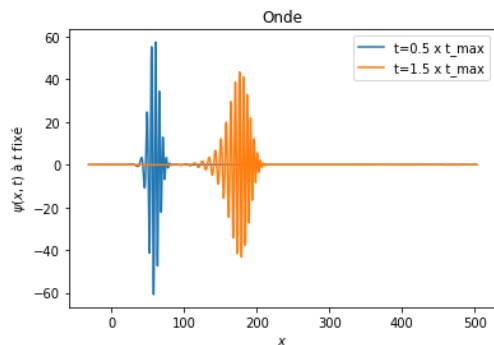
  # différentes positions
  x_min=c*t_min-1*Delta_x
  x_max=3*c*t_max+1*Delta_x
  X_vec=np.arange(x_min,x_max,delta_x) # vecteur des positions

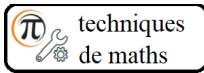
▶ date=0.5 # fraction de t_max
  Train_onde=np.zeros(len(X_vec)) # initialisation du vecteur "Onde à t fixé"
  for indice in range(len(Omega)): # somme d'OPPM
    Train_onde+=oppm(X_vec,date*t_max,Omega[indice],K[indice],Amplitude[indice])
  plt.plot(X_vec,Train_onde,label=f"t={date} x t_max") # première courbe

  date=1.5 # fraction de t_max
  Train_onde=np.zeros(len(X_vec)) # initialisation du vecteur "Onde à t fixé"
  for indice in range(len(Omega)): # somme d'OPPM
    Train_onde+=oppm(X_vec,date*t_max,Omega[indice],K[indice],Amplitude[indice])
  plt.plot(X_vec,Train_onde,label=f"t={date} x t_max") # deuxième courbe

  plt.title('Onde') # titre
  plt.xlabel('$x$') # nom des abscisses
  plt.ylabel('$\psi(x,t)$ à $t$ fixé') # nom des ordonnées
  plt.legend(loc="best")
  plt.show() # affichage des courbes

```





Techniques mathématiques à maîtriser Intégration d'équations aux dérivées partielles

Equation aux dérivées partielles

On cherche à déterminer une fonction ψ qui dépend de plusieurs variables et sur laquelle porte une équation aux dérivées partielles (EDP).

◆ Exemples d'EDP :

- équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$;
- équation de diffusion : $\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$;
- équation de Laplace : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$.

Méthode de la séparation des variables

La méthode de séparation des variables consiste à poser $\psi(x, t) = f(x)g(t)$ et à remplacer dans l'EDP, pour voir si on arrive à obtenir des équations différentielles sur $f(x)$ et sur $g(t)$ indépendamment.

◆ Exemple pour l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) \Rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g''(t) - K g(t) = 0 \text{ et } f''(x) - \frac{K}{c^2} f(x) = 0$$

On a ainsi obtenu deux équations à variables séparées...

Méthode des complexes

La méthode des complexes consiste à poser $\psi(x, t) = \text{Re}(\tilde{\psi})(x, t)$ avec $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)}$ et à remplacer dans l'EDP (uniquement si elle est linéaire).

Cela mène à une équation reliant \tilde{k} à ω (relation de dispersion). Il s'agit ensuite de résoudre cette équation, en posant $\tilde{k} = k_r + j k_i$ (où $k_r = \text{Re}(\tilde{k})$ et $k_i = \text{Im}(\tilde{k})$).

Il faut ensuite exprimer $\tilde{\psi}(x, t)$ puis $\psi = \text{Re}(\tilde{\psi})$.

◆ Exemple pour l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -j\omega = -D \tilde{k}^2$$

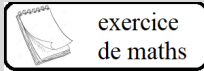
On pose donc $\tilde{k} = k_r + j k_i$, qui donne dans la relation de dispersion :

$$j\omega = D(k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 = k_i^2 \text{ et } k_r k_i = \frac{\omega}{2D}$$

Etc...



Exercice 10.19 pour s'entraîner

Détermination de solution de l'équation de D'Alembert par séparation des variables

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions $\psi(x, t)$ à l'EDP $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ pour le domaine de définition $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1) $\psi(x, t) = F(x).G(t)$ vérifie : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, qui devient

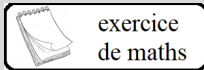
$$F''(x).G(t) = \frac{1}{c_0^2} F(x).G''(t) \Leftrightarrow c_0^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de x , le second que de t : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera $-\omega^2$. On trouve la solution de $\frac{G''(t)}{G(t)} = -\omega^2$: $G(t) = G_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_G)$. De même, la solution de $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega^2}{c_0^2}$ est : $F(x) = F_0 \cos\left(\frac{\omega}{c_0}x + \varphi_F\right)$.

On peut donc réécrire

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_G)$$

avec $k = \frac{\omega}{c_0}$.



Exercice 10.20 pour s'entraîner

Détermination de solution de l'équation de diffusion par séparation des variables

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions $\psi(x, t)$ à l'EDP $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ pour le domaine de définition $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

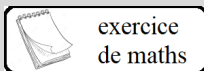
1) $\psi(x, t) = F(x).G(t)$ vérifie : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \psi}{\partial t}$, qui devient

$$F''(x).G(t) = \frac{1}{D} F(x).G'(t) \Leftrightarrow D \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de x , le second que de t : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera $-\omega$. On trouve la solution de $\frac{G'(t)}{G(t)} = -\omega$: $G(t) = G_0 e^{-\omega t}$. De même, la solution de $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega}{D}$ est : $F(x) = F_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}x + \varphi\right)$.

On peut donc réécrire

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\omega t} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}x + \varphi\right)$$



Exercice 10.21 pour s'entraîner

Détermination de solution de l'équation de Laplace en polaire par séparation des variables

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions $\psi(r, \theta)$ à l'EDP

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

pour le domaine de définition $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0; 2\pi]$.

1) $\psi(r, \theta) = F(r).G(\theta)$ vérifie :

$$\frac{G(\theta)}{r} \frac{d}{dr} (r F'(r)) + \frac{F(r)}{r^2} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow -\frac{G''}{G} = +\frac{r}{F} \frac{d}{dr} (r F'(r)) = cste = K$$

en effet, le premier terme ne dépend que de θ , le second que de r : il ne peut s'agir que d'une constante.

$$G'' + K G = 0$$

Si cette constante est négative, les fonctions sont exponentielles, et ne peuvent être 2π -périodiques : ce n'est pas acceptable. Donc

$$G(\theta) = A \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi)$$

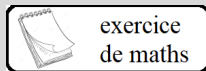
avec $\sqrt{K} \in \mathbb{N}$. D'autre part,

$$\frac{d}{dr} (r F'(r)) = F'(r) + r F'' = K \frac{F}{r} \Rightarrow r^2 F'' + r F' - K F = 0$$

On note que $F = cste$ est solution. On peut aussi chercher des solutions sous la forme $F(r) = B r^n$:

$$\Rightarrow n(n-1) + n - K = 0 \Rightarrow n^2 = K \Rightarrow n = \pm\sqrt{K}$$

Soit : $\psi = C e^{-\sqrt{K}r} \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi) + C' e^{+\sqrt{K}r} \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi')$. NB : les solutions en $e^{+\sqrt{K}r}$ divergent à l'infini, on ne garde que : $\psi = C e^{-\alpha r} \cos(\alpha\theta + \varphi)$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$.



exercice
de maths

Exercice 10.22 pour s'entraîner

Détermination de solution de l'équation de D'Alembert grâce aux complexes

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions $\psi(x, t)$ à l'EDP

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

pour le domaine de définition $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1) On pose $\psi(x, t) = \text{Re}(\tilde{\psi})(x, t)$ avec $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)}$ et on remplace dans l'EDP :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 = -c^2 \tilde{k}^2$$

On pose donc $\tilde{k} = k_r + j k_i$, qui donne dans la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2 (k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 - k_i^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \text{ et } k_r k_i = 0$$

Donc :

- soit $k_r = 0$, et la première équation devient $-k_i^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, ce qui est impossible,

- soit $k_i = 0$, et la première équation devient $k_r^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, ce qui est possible : $k_r = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right)$

Aussi, on trouve :

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)} = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t \pm (\frac{\omega}{c})x)}$$

soit la superposition de deux types de solutions :

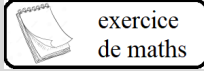
$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t + (\frac{\omega}{c})x)} + A' e^{j\varphi'} e^{-j(\omega t - (\frac{\omega}{c})x)}$$

qu'on doit réécrire

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{-j(\omega t + (\frac{\omega}{c})x - \varphi)} + A' e^{-j(\omega t - (\frac{\omega}{c})x - \varphi')}$$

pour passer à la partie réelle :

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t + \left(\frac{\omega}{c}\right)x - \varphi\right) + A' \cos\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right)x - \varphi'\right)$$



Exercice 10.23 pour s'entraîner

Détermination de solution de l'équation de diffusion grâce aux complexes

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions $\psi(x, t)$ à l'EDP

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

pour le domaine de définition $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

1) On pose $\psi(x, t) = \text{Re}(\tilde{\psi})(x, t)$ avec $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)}$ et on remplace dans l'EDP :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -j\omega = -D \tilde{k}^2$$

On pose donc $\tilde{k} = k_r + j k_i$, qui donne dans la relation de dispersion :

$$j\omega = D(k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 = k_i^2 \text{ et } k_r k_i = \frac{\omega}{2D}$$

Donc :

- soit $k_r = -k_i$, et la seconde équation devient $-k_r^2 = \frac{\omega}{2D}$, ce qui est impossible,

- soit $k_r = +k_i$, et la seconde équation devient $k_r^2 = \frac{\omega}{2D}$, ce qui est possible : $k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

Aussi, on trouve :

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)} = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x \pm j\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x)}$$

soit la superposition de deux types de solutions :

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x + j\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x)} + A' e^{j\varphi'} e^{-j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - j\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x)}$$

qu'on doit réécrire

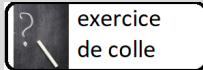
$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{-j(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - \varphi)} e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} + A' e^{-j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - \varphi')} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$$

pour passer à la partie réelle :

$$\psi(x, t) = A e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - \varphi\right) + A' e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - \varphi'\right)$$

Le premier type de solution divergeant à l'infini, il reste :

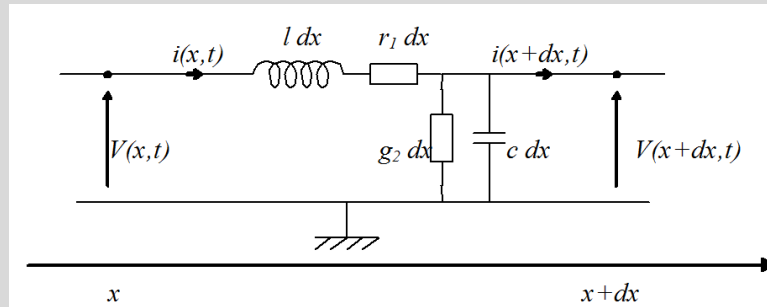
$$\psi(x, t) = C e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x - \alpha\right).$$



exercice
de colle

Exercice 10.24

Modélisation de la propagation dans un câble coaxial



On s'intéresse à un câble coaxial dispersif. Ce câble a une inductance propre par unité de longueur ℓ , une capacité propre par unité de longueur c , une résistance par unité de longueur r_1 et une conductance par unité de longueur g_2 .

1) Etude générale

1.a) Déterminer l'équation "des télégraphistes" suivie par la tension et l'intensité dans le câble.

1.b) Déterminer la relation de dispersion qui correspond à l'équation d'onde des télégraphistes. En déduire que le milieu est absorbant et dispersif.

2) Cas non résistif.

On suppose $r_1 = 0$ et $g_2 = 0$.

2.a) Montrer que l'on retrouve l'équation d'onde de D'Alembert et que la relation de dispersion nous permet de réécrire une OPPM.

2.b) Montrer qu'il y a équipartition de l'énergie sous ses deux formes (inductive et capacitive) pour une onde plane dans un câble coaxial.

3) Réflexion en bout de ligne

Le câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c non résistif est relié en $x = x_0$ à une impédance \tilde{Z} .

3.a) Calculer les coefficients de réflexion en amplitude r_I et r_V .

3.b) En déduire le coefficient de réflexion en énergie R .

3.c) Que vaut R dans le cas :

- d'une ligne ouverte
- d'une ligne en court-circuit
- d'une ligne fermée sur une inductance pure
- d'une ligne fermée sur une capacité pure
- d'une ligne fermée sur une impédance égale à l'impédance caractéristique du câble ?

4) On suppose maintenant le câble résistif mais $r_1 c + \ell g_2 \approx 0$.

4.a) Montrer que la relation de dispersion est celle de Klein-Gordon :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 + \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2$$

En déduire que le milieu est non absorbant.

4.b) tracer ω en fonction de k et donner une interprétation géométrique aux vitesses de phase et de groupe. En déduire que le milieu est dispersif.

4.c) Montrer que vitesses de phase et de groupe sont différentes et que

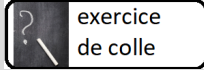
$$v_g v_\varphi = c^2$$

L'information se propage-t-elle plus vite que la lumière ?

5) On suppose enfin le câble résistif mais $g_2 = 0$.

5.a) Réécrire la relation de dispersion.

5.b) Pour une propagation vers les x croissants, montrer que $k_i > 0$. En déduire que le milieu est absorbant. Pourquoi faut-il régénérer le signal au bout d'une certaine distance ?

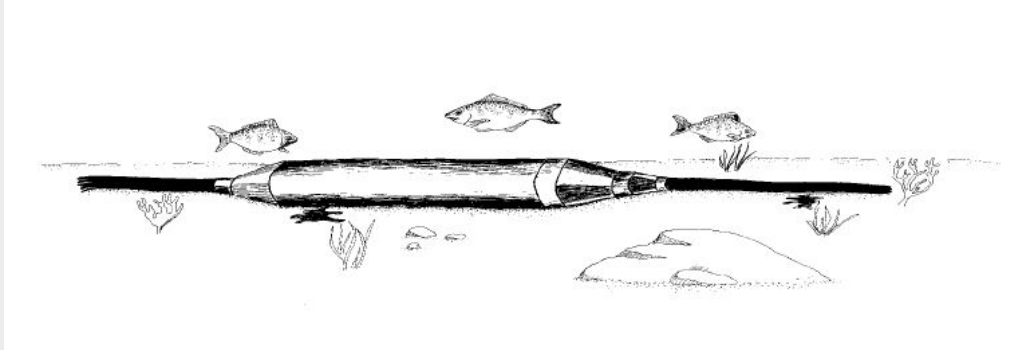


exercice
de colle

Exercice 10.25 Onde dans un câble sous-marin

Un signal relayé par un satellite géostationnaire doit voyager environ 72,000 km (45.000 miles) jusqu'au satellite puis revenir sur terre, il y a donc un temps de retard notable (au moins un quart de seconde) dans la plupart des conversations transmises par satellite. En revanche, le délai d'un signal voyageant 8,000 km (5,000 miles) à travers un océan par câble est seulement d'environ 1 / 30 de seconde, ce qui n'est pas perceptible dans une conversation.

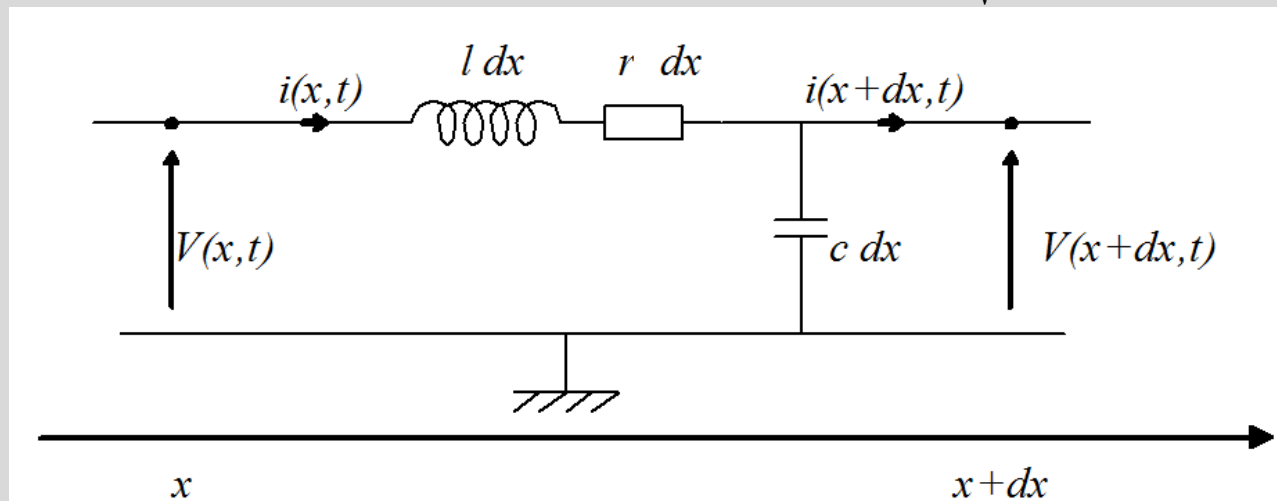
Dans les premiers câbles téléphoniques sous-marins, les signaux étaient transportés par des fils de cuivre. Ils ont été appelés câbles coaxiaux ou analogiques et pouvaient durer plus de 30 ans. Beaucoup de ces câbles ont été posés entre 1950 et 1988. Quelques-uns sont encore en usage aujourd'hui.



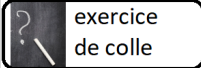
Afin d'éviter la perte de signal à travers de très longs câbles, des amplificateurs, appelés répéteurs, ont été insérés dans le câble à des intervalles allant de 2 à 40 miles le long de câbles coaxiaux. Un répéteur ressemble à une torpille.

Document disponible sur le site "www.iscpc.org/"

On modélisera les câbles sous marins comme ci-dessous, avec une impédance $Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}} = 50 \Omega$:

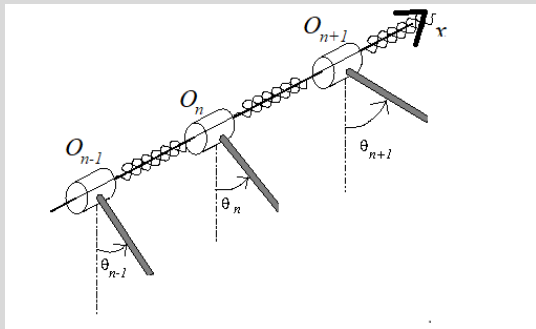


- 1) Déterminer les ordres de grandeur des caractéristiques des câbles sous marins :
 - 1.a) l'inductance par unité de longueur l ;
 - 1.b) la capacité par unité de longueur c ;
 - 1.c) la résistance par unité de longueur r .



exercice
de colle

Exercice 10.26 Chaîne de pendules couplés

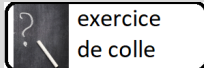


On réalise une chaîne de pendules simples couplés par des ressorts de torsion, schématisée sur la figure ci-contre.

Chaque pendule n , accroché en O_n , d'abscisse $x_n = na$, est constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur ℓ et de moment d'inertie $J = \frac{m\ell^2}{3}$ par rapport à l'axe Ox .

Il oscille dans un plan zO_ny par rapport à l'axe horizontal Ox . On repère par θ_n la position angulaire du pendule par rapport à sa position d'équilibre verticale. Les liaisons entre les pendules et l'axe sont supposées de type pivot parfaites. Chaque pendule est relié à ses voisins par un fil de torsion de constante K , confondu avec Ox . Ainsi, le pendule $n-1$ exerce un couple $\Gamma_{n-1 \rightarrow n} = -K(\theta_n - \theta_{n-1})$ sur le pendule n qui tend à ramener le fil vers une torsion nulle. On néglige tout frottement avec l'air.

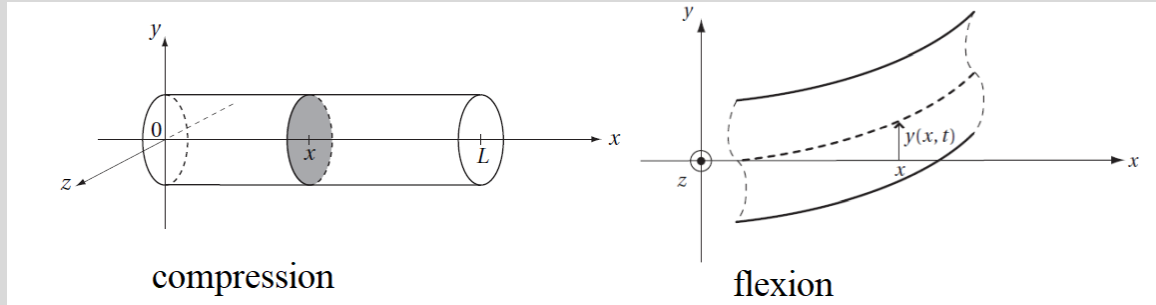
- 1) Quelle est l'équation différentielle liant les petits angles $\theta_n, \theta_{n-1}, \theta_{n+1}$?
- 2) Montrer que, dans l'approximation des milieux continus, l'équation d'onde est $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \psi = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$. On donnera les expressions de c_0 et ω_p .
- 3) Quelle est la relation de dispersion ?
- 4) Préciser la bande permise pour les pulsations d'oscillations libres de la chaîne de pendules couplés.
- 5) Calculer en fonction de ω, ω_p et c_0 :
 - 5.a) la vitesse de phase v_φ ,
 - 5.b) la vitesse de groupe v_g .
- 6) Exprimer v_g en fonction de c et v_φ .
- 7) Comparer chacune des vitesses à c_0 .



exercice
de colle

Exercice 10.27 Ondes dans une tige solide élastique

On étudie les modes de vibration d'une tige élastique, cylindrique de section S . Sa longueur est L . On note E le module de Young et ρ_0 la masse volumique du matériau qui la constitue. On néglige l'influence de la pesanteur.



1) Ondes de compression

On étudie la propagation selon l'axe (Ox) des déformations locales de la tige. La section de la tige qui, au repos, se situe à l'abscisse x , se trouve, à l'instant t , **déplacée** d'une quantité algébrique $u(x, t)$ lorsque la tige est déformée. On se limite à de petites déformations : $|u(x, t)| \ll L$ et $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \ll 1$. On ne gardera que des termes du premier ordre en $u(x, t)$ et en ses dérivées.

1.a) Expliquer pourquoi la déformation envisagée est qualifiée de longitudinale. Pourquoi parle-t-on de compression ? Pour quelle raison se limite-t-on à de faibles déformations ?

On note $\vec{F}_P(x_0, t)$ la force que la partie droite de la tige ($x > x_0$) exerce sur la partie gauche ($x < x_0$) à l'abscisse x_0 et à l'instant t .

1.b) Rappeler l'expression de cette force en fonction du module de Young E , de la section S et de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t)$.

On étudie le mouvement de l'élément de tige situé au repos entre les abscisses x et $x + dx$, la quantité dx étant choisie très petite devant la distance caractéristique de variation de $u(x, t)$.

1.c) Montrer que le déplacement $u(x, t)$ vérifie une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la célérité c_P en fonction de E et de ρ_0 .

2) Onde de flexion

La tige présente d'autres types de déformations, comme sa flexion, que l'on propose d'étudier maintenant. Dans ce mode de déformation, la tige se courbe localement, et le centre de la section d'abscisse x qui se situe au repos sur l'axe de la tige $y = 0$ se trouve **déplacé**, dans la direction transverse Oy , d'une quantité algébrique $y(x, t)$. On s'intéresse à de faibles déformations de flexion : $|y(x, t)| \ll L$ et $|\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)| \ll 1$. On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et ses dérivées.

Les actions mécaniques exercées en x_0 par la partie droite ($x > x_0$) de la tige sur la partie gauche ($x < x_0$) sont correctement décrites, pour ce type de déformation, par :

- une résultante (effort tranchant) : $\vec{N}(x_0, t) = N(x_0, t) \vec{e}_y$;
- un moment fléchissant : $\vec{C}(x_0, t) = C_z(x_0, t) \vec{e}_z = I E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0, t) \vec{e}_z$.

La grandeur I dépend de la géométrie de la tige ; E est le module de Young de la tige.

2.a) Quelle est la dimension du paramètre I ? quelle interprétation géométrique peut-on donner à la quantité $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$? Comment interprétez-vous la présence de cette dérivée dans l'expression du moment fléchissant ?

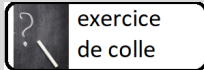
On considère l'élément de la tige qui au repos se situe entre les abscisses x et $x + dx$, dx étant choisi très petit devant la distance caractéristique de variation de $y(x, t)$. On travaillera au premier ordre en dx .

On définit le référentiel barycentrique de cet élément comme le référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire dans lequel le centre de masse G de ce système est fixe. On admet que la force d'inertie d'entraînement est appliquée au centre de masse.

2.b) Justifier que le moment d'inertie de ce système par rapport à un axe qui passe par son centre de masse est proportionnel à $(dx)^3$. Appliquer alors la loi du moment cinétique en G , dans le référentiel barycentrique et établir la relation : $N(x, t) = -\frac{\partial C_z}{\partial x}(x, t)$.

2.c) Appliquer alors la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire à cet élément de tige et établir l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + \frac{I}{S} c_P^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = 0. \quad (1)$$



exercice
de colle

Exercice 10.28 Etude d'une corde de piano avec raideur



Les cordes de piano sont des cordes filées dans le grave et des fils d'acier de diamètre relativement important dans le médium et dans l'aigu. Ces fils d'acier, du fait de leur raideur, ont une inharmonicité d'autant plus grande que la corde est plus courte (leur partiel no 2 est à une fréquence un peu plus grande que deux fois leur fondamental).

Posé sur une table, un morceau de fil d'acier utilisé pour corder l'aigu du piano accepte de se plier mais, si on le lâche, il reprend tout seul sa forme rectiligne. Quand cette corde est sous tension, à la force de rappel due à la tension s'ajoute une autre force de rappel, due à la raideur. La fréquence des modes vibratoires s'en trouve donc augmentée. Les modes ne sont plus harmoniques : on parle de partiels et non plus d'harmoniques.

issu de l'article wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Inharmonicité_du_piano.

On suppose que la corde est cylindrique de rayon a et qu'elle est faite en acier, de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 190 \times 10^9 \text{ U.S.I.}$.

1) Equation d'onde

On considère une déformation de cette corde dans le plan $xOyt$. L'élasticité impose que la tension \vec{T} n'est pas tangente à la corde et que, pour permettre la courbure de la corde, il faut un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma_z(x, t) \vec{e}_z$ qui s'exprime par :

$$\Gamma_z(x, t) = ES K^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où S la section de la corde et K un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde, égal à $K = \frac{a}{2}$ pour une corde cylindrique. La portion de corde comprise entre les points d'abscisse x et $x + dx$ est donc soumise aux deux tensions et deux couples :

$$\begin{aligned} \text{en } x : \quad & \vec{T}_g(x, t) = -(T_x(x, t) \vec{e}_x + T_y(x, t) \vec{e}_y) & \vec{\Gamma}_g(x, t) &= -\Gamma_z(x, t) \vec{e}_z \\ \text{en } x + dx : \quad & \vec{T}_d(x + dx, t) = T_x(x + dx, t) \vec{e}_x + T_y(x + dx, t) \vec{e}_y & \vec{\Gamma}_d(x + dx, t) &= \Gamma_z(x + dx, t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.a) Donner les unités de E . Vérifier alors l'homogénéité de l'expression de Γ_z .

1.b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la tranche comprise entre x et $x + dx$, montrer que T_x ne dépend que du temps. On supposera que T_x est constante et on la prendra égale à T_0 .

1.c) Etablir une relation différentielle entre T_y et y .

1.d) En appliquant le théorème du moment cinétique au centre de masse de la tranche comprise entre x et $x + dx$, établir une nouvelle relation différentielle entre T_y , Γ_z et y . On prendra un moment d'inertie nul pour ce système car il est d'ordre 3 en dx donc négligeable à l'ordre d'approximation envisagé.

1.e) En déduire l'équation de propagation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ES K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

2) Modification des fréquences propres

2.a) En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi)$, donner la relation entre ω et k .

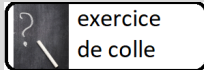
2.b) Dans le cas où la raideur de la corde reste faible, montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + B n^2}$$

où c est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et B une constante à exprimer en fonction de E , S , K , T_0 et L .

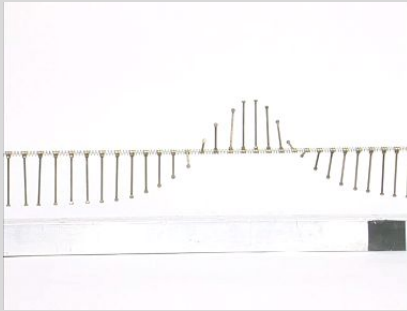
2.c) Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant f_n en fonction de n pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

2.d) Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4 \times 10^{-4}$. A partir de quelle valeur de n la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ?



exercice
de colle

Exercice 10.29 Les solitons sur une chaîne de pendules couplés



Un soliton est une onde de grande amplitude et de relativement faible extension spatiale capable de se propager sur de longues distances sans déformation. Contrairement aux ondes planes, leur évolution spatiale n'est pas une oscillation périodique, mais un seul passage de 0 à 2π . On parle donc d'ondes solitaires. Enfin, le fait que l'on puisse associer à ces ondes, une position, une vitesse et même une masse, suggère qu'elles ont les propriétés de particules. Cela explique l'utilisation du suffixe « on », comme dans électrons, bosons, phonons,... Ces ondes solitaires ayant des propriétés de particules sont donc appelées des solitons.

"Illustration expérimentale de la propagation de solitons le long d'une chaîne de pendules couplés" par Thierry Dauxois disponible sur le site "Culture - sciences physique de l'ENS Lyon".

On réalise une chaîne de pendules simples couplés par des ressorts de torsion. Chaque pendule n , accroché en O_n , d'abscisse $x_n = na$, est constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur ℓ et de moment d'inertie $J = \frac{m\ell^2}{3}$ par rapport à l'axe Ox .

Il oscille dans un plan zO_ny par rapport à l'axe horizontal Ox . On repère par θ_n la position angulaire du pendule par rapport à sa position d'équilibre verticale. Les liaisons entre les pendules et l'axe sont supposées de type pivot parfaites.

Chaque pendule est relié à ses voisins par un fil de torsion de constante K , confondu avec Ox . Ainsi, le pendule $n-1$ exerce un couple $\Gamma_{n-1 \rightarrow n} = -K(\theta_n - \theta_{n-1})$ sur le pendule n qui tend à ramener le fil vers une torsion nulle.

On néglige tout frottement avec l'air.

1) Equation différentielle

1.a) Quelle est l'équation différentielle liant les angles $\theta_n, \theta_{n-1}, \theta_{n+1}$?

1.b) Montrer que, dans l'approximation des milieux continus, l'équation d'onde est celle de Sine-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \sin \psi = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

On donnera les expressions de c_0 et ω_p .

1.c) Que devient l'équation de Sine-Gordon dans le cas des petits angles ? Quelle est alors la relation de dispersion ?

2) Solutions dans le cas général (angles non petits)

On admet que l'équation de Sine-Gordon admet des solutions exactes de la forme :

$$\psi(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\pm \left(\frac{\omega_p (x - vt)}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} \right) \right) \right]$$

pour toute valeur de v telle que $|v| < c_0$.

2.a) Etudier $\psi(s)$ où $s = x - vt$.

2.b) Tracer l'allure de l'onde à un instant t donné, la forme de la chaîne des pendules correspondante.

A quelle propriété géométrique est associée le signe $+$ ou $-$ dans l'expression de $\psi(x, t)$?

2.c) Quelle est la particularité essentielle de ce type de solutions appelée soliton ou onde solitaire ?

3) Energie

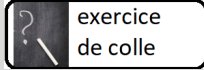
3.a) Montrer que l'énergie cinétique E_c d'une solution $\psi(x, t)$ de l'équation de Sine-Gordon est donnée par :

$$E_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J}{2a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx$$

3.b) Calculer cette énergie.

3.c) Montrer qu'on peut écrire, comme pour une particule relativiste, $E_c = \gamma m_0 v^2$ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$ et

m_0 est une constante ayant la dimension d'une masse que l'on déterminera à partir de paramètres du problème.

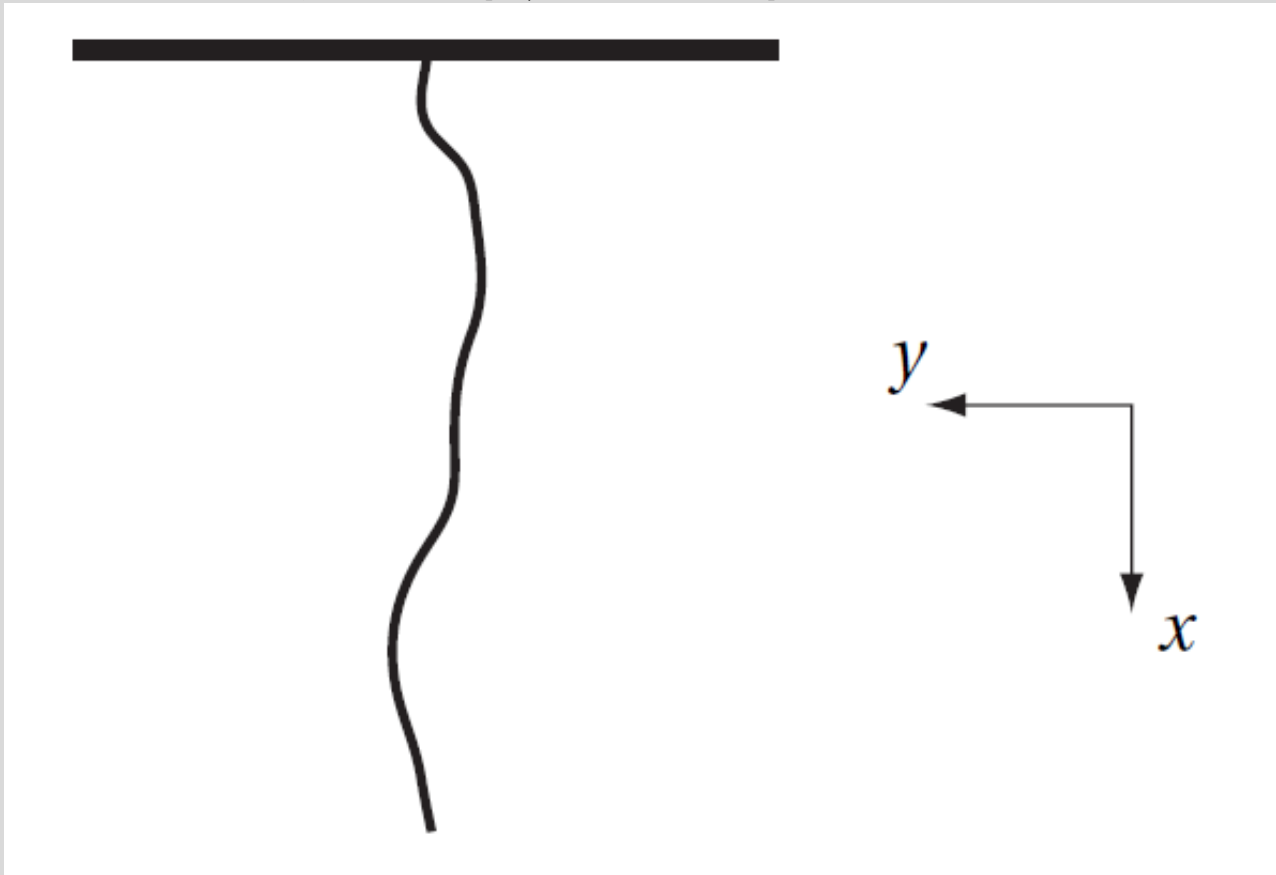


exercice
de colle

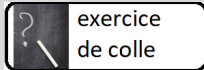
Exercice 10.30
Oscillations libres d'une corde verticale

(Version oral X-ESPCI récent)

Une corde inextensible, de masse linéique μ_l est située dans le plan vertical.



Chercher le mode propre de vibration (selon \vec{u}_y) de plus faible fréquence.



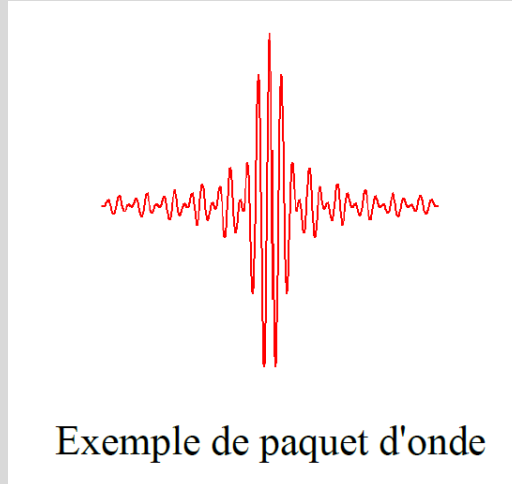
Exercice 10.31 Paquets d'ondes

La décomposition continue d'une onde plane complexe se propageant suivant Ox par une superposition d'OPPM peut s'écrire

$$\tilde{\psi} = \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

où $\tilde{A}(\omega)$ est le spectre de cette onde.

Bien souvent $\tilde{A}(\omega) \neq 0$ dans un domaine très limité, de largeur $\Delta\omega$: on parle de paquet d'ondes.



On s'intéresse à des paquets d'ondes de largeur spectrale $\Delta\omega$, faible devant la pulsation « moyenne » ω_m du paquet.

1) Dans chacun des cas suivants :

- tracer l'allure du spectre
- calculer l'amplitude du paquet d'ondes,
- déterminer la durée caractéristique Δt qui peut être attribuée aux bouffées d'ondes et commenter sa dépendance vis-à-vis de sa largeur spectrale $\Delta\omega$.

1.a) Somme discrète :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{n=+\frac{N-1}{2}} A_0 \cos(\omega_n t - k_n x)$$

où $\omega_n = \omega_m + \frac{n}{N} \Delta\omega$. On supposera pour simplifier les calculs que N est impair.

1.b) Paquet d'ondes à spectre $A(\omega)$ rectangulaire :

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{A_0}{\Delta\omega} & \text{si } \omega \in [\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ A(\omega) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

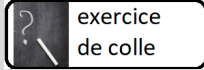
1.c) Paquet d'ondes à spectre $A(\omega)$ gaussien :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi} \Delta\omega} e^{-\frac{(\omega - \omega_m)^2}{2\Delta\omega^2}}$$

On donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2 + j\beta x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

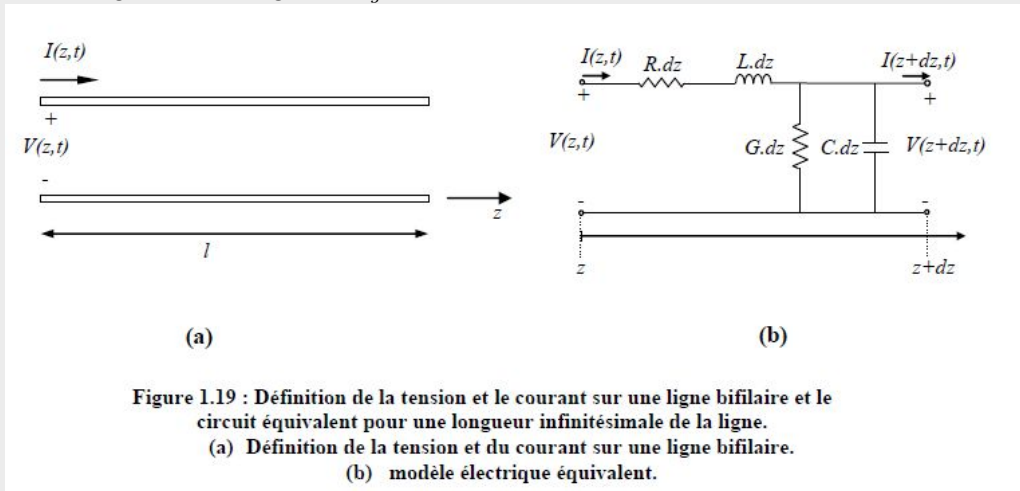
pour tout réel β et tout complexe α d'argument compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.



exercice
de colle

Exercice 10.32 Transmission de l'onde électrique dans un câble

En haute fréquence une ligne de transmission peut se modéliser à l'aide de quatre paramètres qui constituent le modèle à constantes réparties. La figure suivante montre le modèle équivalent. Il n'est valable que pour une longueur infinitésimale de ligne, à condition que la longueur L de la ligne de transmission soit inférieure ou égale au dixième de la longueur d'onde guidée λ_g .



Chaque discontinuité dans un câble est associée à un coefficient de réflexion qui donne une information sur la polarité des champs dans le milieu de propagation et la quantité d'énergie renvoyée vers le plan le générateur.

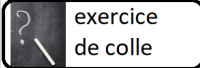
Tableau 1.2 : Valeurs de L et C de quelques types de câble

Référence câble	C (pF/m)	L (μ H/m)	Facteur de vitesse	Impédance Caractéristique en ohm
RG58CU Câble coaxial	100	0,250	0,659	50
AWG22 Paire torsadée blindée quaduple	106,5	0,517	0,690	54
AWG24 Paire torsadée blindée	47,28	0,587	0,710	120
AWG26 Paire torsadée	49,61	0,659	0,640	105
AWG20 une seule paire dans un faisceau	31,76	0,976	0,740	150

On définit, le facteur de vitesse X , avec, $v_p = X \cdot c$, où v_p est la vitesse de propagation dans la ligne et c la vitesse de la lumière. Ce facteur dépend de la géométrie et des propriétés intrinsèques du câble. En général ce facteur de vitesse est donné par les fabricants de câbles.

Extraits de "Développement d'une méthodologie dédiée à la réflectométrie en vue du diagnostic filaire" - thèse de doctorat de MOSTAFA KAMEL SMAÏL soutenue le mardi 7 décembre 2010

- 1) A l'aide du modèle électrique équivalent donné dans le document, déterminer l'équation d'onde (dite "des télégraphistes") suivie par la tension et l'intensité dans les câbles électriques.
- 2) Vérifier que l'on retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas non résistif. En déduire l'expression de la célérité v_p des ondes dans le câble en fonction de L et C .
- 3) A partir des données de L et de C de différents câbles, vérifier les valeurs des vitesses et des impédances caractéristiques $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ indiquées dans le tableau du document.
- 4) On s'intéresse au montage de la figure 1.20 (on supposera le câble sans résistance).
 - 4.a) Donner la formes des OPPM complexes incidentes et réfléchies sur le câble.
 - 4.b) Rappeler la définition des coefficients de réflexion en intensité et en tension en $z = 0$.
 - 4.c) Ecrire les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = -l$.
 - 4.d) Déterminer les coefficients de réflexion en intensité et en tension en $z = 0$ en fonction de Z_L et Z_C .

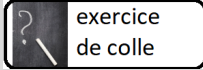


exercice
de colle

Exercice 10.33 Jonction de deux cordes

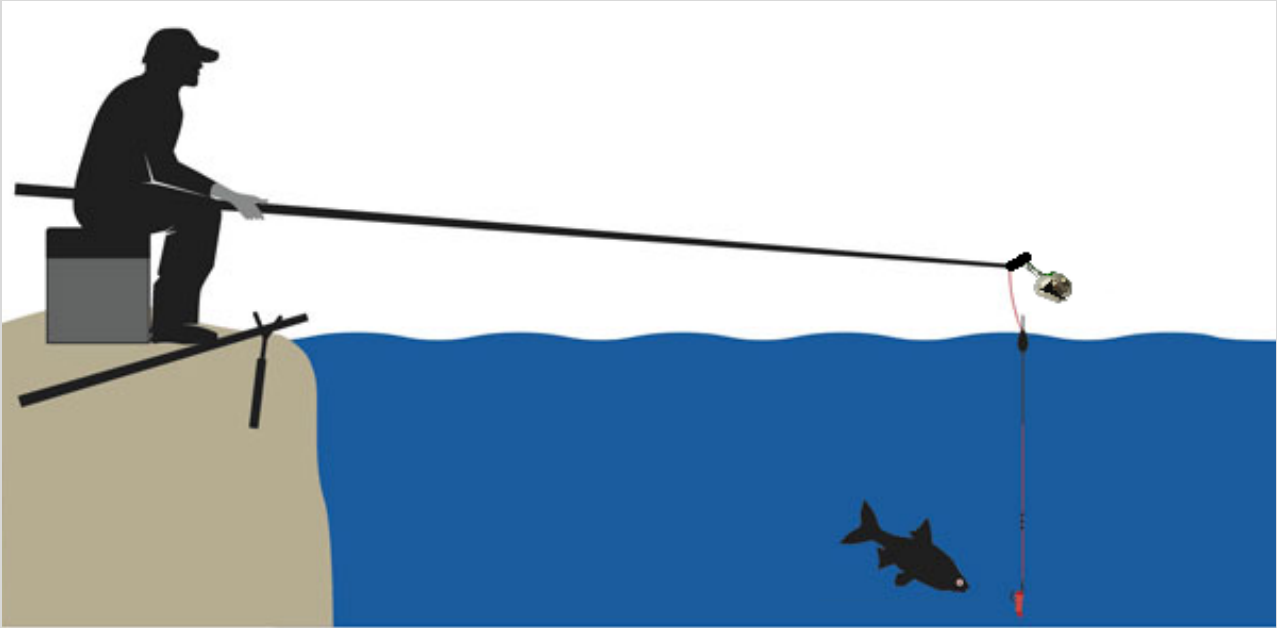


- 1) On s'intéresse à une corde très longue qui est composée de deux tronçons de masses linéiques μ_1 (si $x < 0$) et μ_2 (si $x > 0$), la tension étant toujours T_0 ; le nœud en $x = 0$ est sans masse.
 - 1.a) Déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude.
 - 1.b) Entre quelles limites peuvent-ils varier ? Discuter ces cas suivant la valeur du coefficient $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$.
- 2) On veut transmettre une onde progressive monochromatique d'une corde à une autre, dont l'une a un diamètre double de celui de l'autre. Ces deux cordes sont constituées du même matériau. On fait l'hypothèse que l'ensemble est sans raideur et que la tension est la même dans les deux cordes.
 - 2.a) Quels sont les coefficients de transmission en amplitude dans chacun des deux sens de propagation ?
 - 2.b) Pour avoir le coefficient de transmission maximal, vaut-il mieux envoyer le signal de la petite corde vers la grande ou dans le sens inverse ?
- 3) Même question dans le cas où les deux cordes précédentes sont reliées par un nœud de masse M .



exercice
de colle

Exercice 10.34 Onde dans un fil de pêche



Un fil de pêche inextensible, de masse linéique μ_ℓ , est presque vertical (suivant Oz ascendant). Il est fixé à une canne à pêche en $z = +L_1$. En $z = 0$, il est lié à un bouchon de masse m_b , et il est lesté dans sa partie inférieure (en $z = L_2$) par un hameçon et des plombs de masse m_p . On supposera $m_p \gg m_b$ et $m_p \gg \mu_\ell (L_1 + L_2)$. Le fil ne subit aucune force de la part de l'air sur sa portion $z \in]0; +L_1]$, par contre sa partie immergée (pour $z \in [-L_2; 0]$) subit de la part de l'eau une force de frottement fluide $-\lambda \vec{v}$ par unité de longueur ($\lambda > 0$). On note $y(z, t)$ les déplacements transversaux, supposés petits.

1) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $y(z, t)$

1.a) pour la partie émergée du fil ($z \in]0; +L_1]$) est $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$;

1.b) et pour la partie immergée du fil ($z \in [-L_2; 0]$) est $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t}$.

Par la suite, on supposera que les frottements fluides dus à l'eau sont faibles :

2) Un poisson mort à l'hameçon et provoque en se débattant une onde incidente plane progressive monochromatique de pulsation ω qui se propage vers le haut sur la partie immergée du fil.

2.a) Montrer que l'onde incidente est de la forme

$$\underline{y}_i = \underline{y}_0 e^{-\frac{z}{2\tau c_0}} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right)}$$

2.b) On note respectivement \underline{r} et \underline{t} les coefficients de réflexion et de transmission de l'onde sur le bouchon flottant. Donner l'expression des ondes réfléchie et transmise.

2.c) Montrer que \underline{r} et \underline{t} vérifient $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $\underline{t} \left(1 + \frac{j\omega c_0 m_b}{T_0}\right) = -1 + \underline{r}$.

2.d) En déduire que si le poisson s'agite trop rapidement, la clochette située au sommet de la canne à pêche ne sonnera pas.