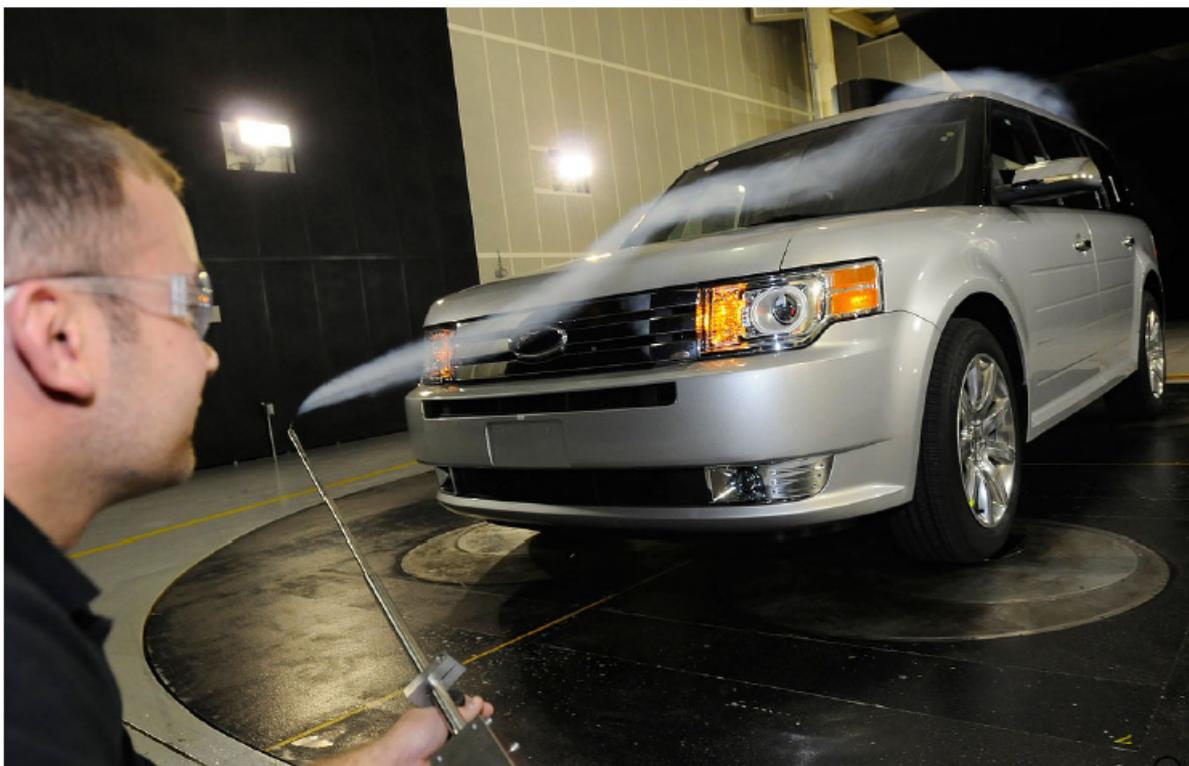


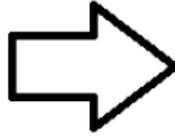
Quelle est la vitesse d'un fluide au voisinage d'un obstacle solide ?



► **passer**
des particules (vision lagrangienne)
aux champs (vision eulérienne)

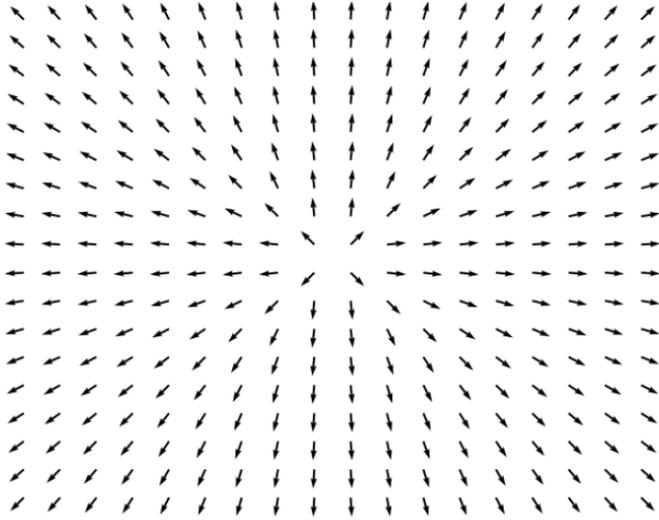


vision lagrangienne

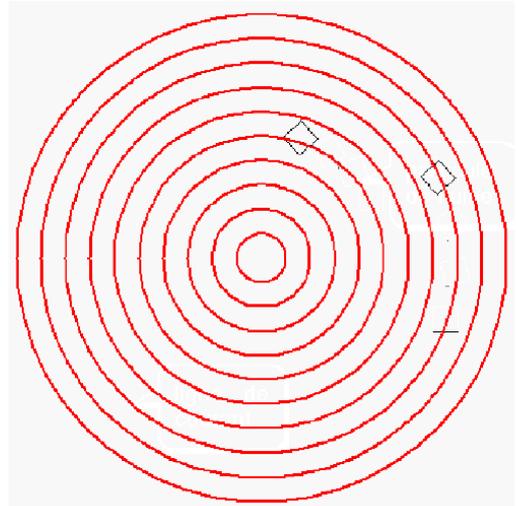


vision eulérienne

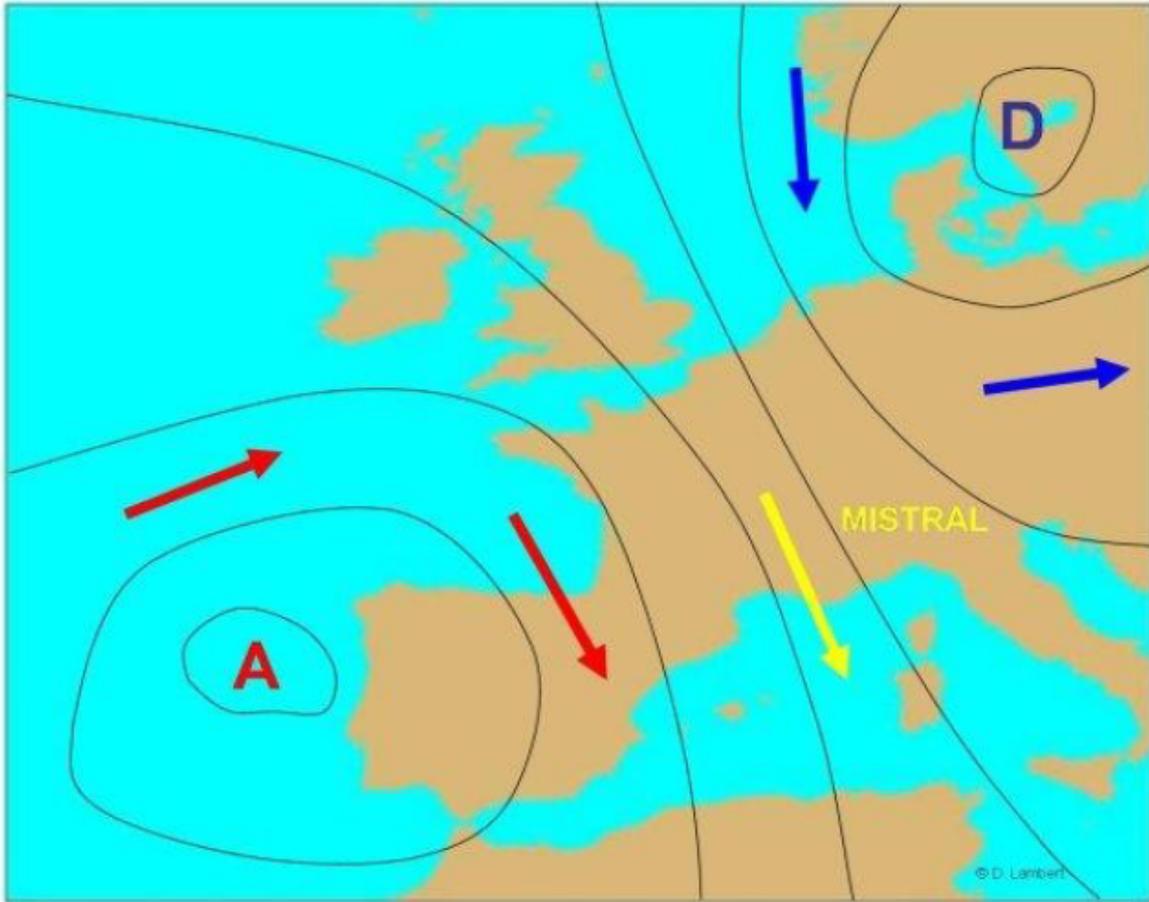
► utiliser la divergence
de la vitesse du fluide



► utiliser le rotationnel
de la vitesse du fluide



► faire un bilan de forces



Introduction à la mécanique des fluides

Les points du cours à connaître

I- Descriptions d'un fluide

1. Passage de la description lagrangienne à la description eulérienne

✳ Description lagrangienne *s'y retrouver*

la description utilisée en mécanique du point ou en mécanique du solide est la description lagrangienne. Il s'agit en mécanique des fluides de "suivre" au cours du temps une particule de fluide. En particulier, on peut s'intéresser à la vitesse \vec{V} de cette particule de fluide.

✳ Description eulérienne *s'y retrouver*

on utilisera en mécanique des fluides la description eulérienne, qui consiste à connaître les champs (scalaires ou vectoriels) définis en chaque point $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ et à chaque instant t .

Ainsi, on parlera de la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ qui coïncide, à l'instant t avec la vitesse \vec{V} de la particule de fluide qui se trouve à t en x, y, z .

✳ Passage de la vision eulérienne à la vision lagrangienne *s'y retrouver*

soit $g(x, y, z, t)$, une grandeur intensive scalaire (ou vectorielle $\vec{g}(x, y, z, t)$), définie en chaque point et à chaque instant.

On va suivre la particule de fluide qui se trouve

- initialement (à t) en $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.
- à un instant ultérieur $t + dt$ en $\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \vec{V} dt = \vec{r} + \vec{v}(x, y, z, t) dt$.

g aura, en suivant la particule de fluide, varié de $g(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - g(\vec{r}, t)$.

📎 Dérivée particulière *définition*

On appellera "dérivée particulière" de g la grandeur :

$$\begin{aligned} \frac{Dg}{Dt} &= \frac{g(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - g(\vec{r}, t)}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) g \end{aligned}$$

✳ Exemple de dérivée particulière : celle de la masse volumique *s'y retrouver*

on peut appliquer ces relations pour déterminer la dérivée particulière de la masse volumique μ :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\mu)$$

1 Accélération d'une particule de fluide *théorème*

on peut exprimer l'accélération d'une particule de fluide :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}$$

Comme

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

⇒

L'accélération de la particule de fluide est :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

2. Visualisation des écoulements

Trajectoire d'une particule de fluide *s'y retrouver*

pour visualiser le comportement cinématique d'un fluide (son écoulement), on peut par exemple tracer les trajectoires de quelques particules de fluide. Cela revient à se placer dans une vision lagrangienne.

Ces trajectoires dépendent *a priori* du choix de la particule de fluide, c'est à dire de ses conditions initiales $X(t=0)$, $Y(t=0)$, $Z(t=0)$.

Ligne de courant *définition*

on définit une ligne de courant comme une ligne de champ de \vec{v} , c'est à dire la courbe passant par un point M_0 qui a en chacun de ses points $\vec{v}(t)$ comme tangente, t étant fixé. Cette courbe est orientée dans le sens de \vec{v} .

Utilisation des lignes de courant *s'y retrouver*

On peut se faire une idée de l'écoulement en traçant un ensemble de lignes de courant. Il faut pour cela se donner un ensemble de points M_0 .

remarque

une ligne de courant peut varier dans le temps, et peut différer d'une trajectoire, même pour une particule de fluide initialement en M_0 . C'est le cas en particulier avec la houle.

Tube de courant *définition*

un tube de courant est un tube de champ de \vec{v} , c'est à dire la surface formée par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée C_0 donnée.

✳ **Ligne d'émission** *s'y retrouver*

la représentation techniquement possible d'un écoulement est donnée par un ensemble de lignes d'émission. On fait par exemple couler des filets d'huile de lin dans de l'huile de vaseline.

Cette représentation visuelle est un ensemble *a priori* variable de trajectoires : on parle alors de lignes d'émission fluctuantes... Les choses se simplifient dans le cas d'un écoulement stationnaire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$), puisque les lignes d'émission sont alors non fluctuantes, et les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

3. Propriétés des écoulements

♥ **Condition aux limites sur la vitesse d'un fluide à l'infini** *à retenir*

si l'on se place suffisamment loin (devant la taille caractéristique du problème), la vitesse est souvent connue. Elle peut être par exemple nulle (fluide immobile) ou bien encore avoir un champ de vitesse homogène :

$$\vec{v}_\infty = v_0 \cdot \vec{u}_x$$

♥ **Condition aux limites sur la vitesse d'un fluide sur un obstacle ou sur une paroi** *à retenir*

dans le référentiel où un obstacle est fixe, il ne peut y avoir de composante normale du fluide sur la paroi (si c'était le cas, le fluide entrerait ou sortirait de l'obstacle...)

Dans le cas où l'obstacle est fixe dans le référentiel d'étude :

$$\vec{v}_\perp(P, t) = \vec{0} \quad \forall t \text{ et } \forall P \in \text{surface de l'obstacle}$$

✳ **Condition aux limites sur la vitesse d'un fluide sur un obstacle ou sur une paroi** *s'y retrouver*

Si au contraire l'obstacle est en mouvement (notons sa vitesse \vec{w}) dans le référentiel d'étude,

$$\vec{v}_\perp(P, t) = \vec{w}_\perp(P, t) \quad \forall t \text{ et } \forall P \in \text{surface de l'obstacle}$$

👁 **Lignes de courant au voisinage d'un solide** *schéma*

La figure ?? représente un exemple de ligne de courant au voisinage d'un solide cylindrique. Au contact d'une paroi solide, la vitesse du fluide est nulle (on parle dans ce cas de "point d'arrêt") ou bien tangente à l'obstacle. L'obstacle est donc matérialisé par une ou plusieurs lignes de courant.

📎 **Écoulements permanents ou stationnaires** *définition*

on parle d'écoulement permanent (ou stationnaire) lorsque les champs eulériens ne dé-

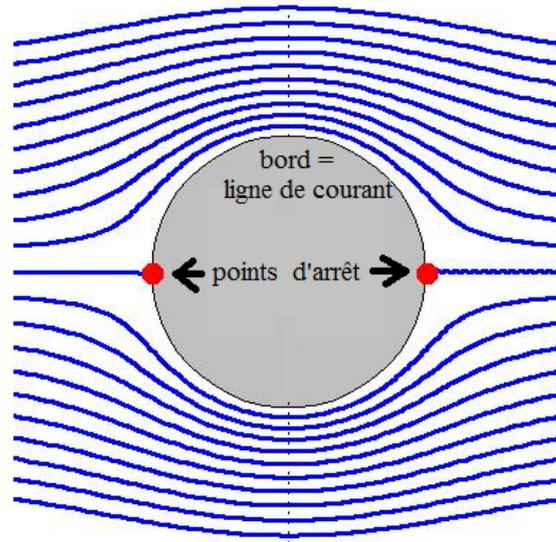


FIGURE 1 – Lignes de courant au voisinage d'un solide

pendent pas explicitement du temps t , et en particulier la vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$



remarque

cela ne veut pas dire que, du point de vue lagrangien, les grandeurs sont invariables. En effet, la particule de fluide se déplaçant,

$$\frac{D}{Dt} \neq 0$$

sa vitesse en particulier peut varier (dans l'espace)...

Exemple : une rivière qui s'écoule suivant l'endroit de façon fluviale ou torrentielle.



Attention photo



Le caractère stationnaire dépend du référentiel.

Exemple : le sillage d'un bateau est stationnaire dans le référentiel d'un bateau, pas dans celui de la rive.



Écoulements plans *définition*

on dira qu'un écoulement est plan (dans le plan xOy) si on a à la fois :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v}(x, y, t) \\ v_z(x, y, t) = 0 \quad \forall (x, y, t) \end{cases}$$

II- Cinématique des fluides

1. Divergence de la vitesse et débit volumique



2 Bilan massique local *théorème*

habituellement, si l'on suit un système fermé, c'est à dire un ensemble de particules de fluide, la masse se conserve :

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial \mu}{\partial t} d^3\tau + \oiint \mu \vec{v} \cdot d^2\Sigma = 0$$

Notons que l'on peut avoir dans certains cas $\frac{DM}{Dt} > 0$ (on parle dans ce cas de "source") ou bien $\frac{DM}{Dt} < 0$ (on parle alors de "puits").

La relation d'Ostrogradsky nous permet de transformer le débit massique : $\oiint \mu \vec{v} \cdot d^2\Sigma = \iiint_V \text{div}(\mu \vec{v}) d^3\tau$. Aussi, le bilan intégral devient :

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_V \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) \right] d^3\tau = 0$$

Comme la précédente relation est valable quel que soit le volume V , on trouve

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

En transformant le terme final $\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = \mu \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\mu)$, on peut faire apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique dans le bilan local :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

⇒

La masse volumique μ suit, dans un écoulement de vitesse \vec{v} :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

2. Utilisation de la divergence de la vitesse

✳ **Définition de la divergence grâce à la formule d'Ostrogradsky** *s'y retrouver*

On se souvient que la divergence est définie par la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) d^3\tau$$

pour un volume V délimité par une surface fermée Σ .

👁 **Application de la formule d'Ostrogradsky** *schéma*

| La figure ?? représente une surface fermée qui délimite un volume.

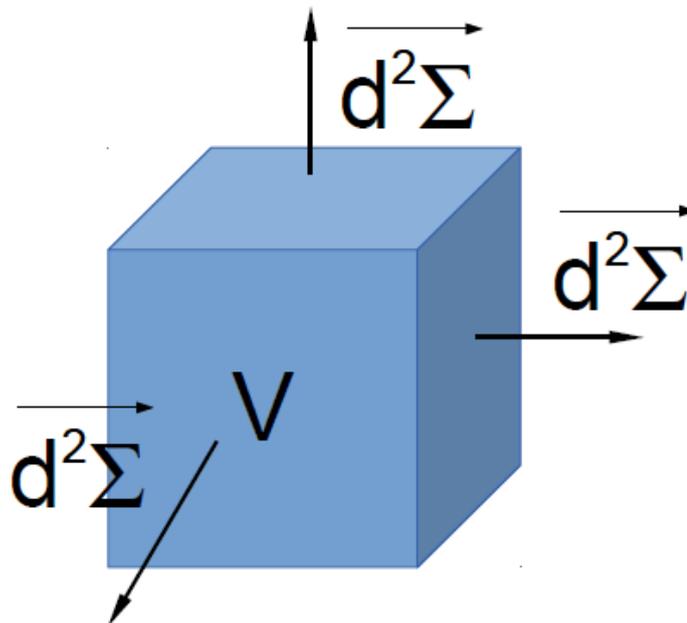


FIGURE 2 – Application de la formule d'Ostrogradsky

3 Variation du volume d'une particule de fluide et divergence de la vitesse

théorème

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$$

Or d'après le bilan massique local :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

donc \Rightarrow

Le volume V d'une particule de fluide suit

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \operatorname{div}(\vec{v})$$

où \vec{v} est la vitesse de l'écoulement.

Interprétation de la divergence de la vitesse *s'y retrouver*

- si $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$, le volume V augmente, il s'agit d'une détente ;
- si $\operatorname{div}(\vec{v}) < 0$, le volume V diminue, il s'agit d'une compression.

remarque

On peut avoir $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ (sauf en certains endroits de l'espace où la vitesse n'est pas définie), alors même que $\iint \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} \neq 0$.

Evolution des particules de fluide lors d'une détente dans un gaz *animation*

Lors d'une détente d'un gaz dans une tuyère, les particules de fluide se dilatent.
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

remarque

On peut avoir $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ (écoulement incompressible), alors même que le fluide est compressible (gaz). C'est le cas si la vitesse d'écoulement est faible devant la célérité du son.

Evolution des particules de fluide lors d'un écoulement dans un dièdre droit *animation*

Il y a déformation des particules de fluide lors de l'écoulement dans un dièdre droit.
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Déformation des particules de fluide *s'y retrouver*

les particules de fluide peuvent conserver un volume constant le long de leur trajectoire, alors même qu'elles se déforment.

3. Écoulements incompressibles



Écoulements incompressibles *définition*

on définit un écoulement incompressible par le fait que le volume, donc la masse volumique μ) de chacune des particules de fluide sont conservés au cours de l'écoulement :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

partout dans le fluide.



remarque

| Le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel.



Application de la formule d'Ostrogradsky avec un tube de courant *schéma*

| La figure ?? représente un tube de courant fermé par deux surfaces S_1 et S_2 orientées dans le même sens.

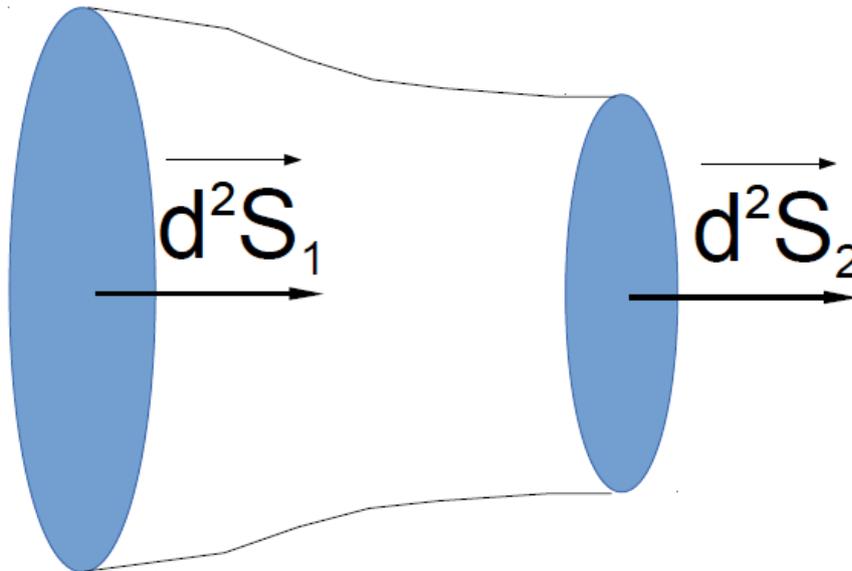


FIGURE 3 – Application de la formule d'Ostrogradsky avec un tube de courant



4 Débit volumique dans le cas d'un écoulement incompressible *théorème*

En intégrant la précédente relation, on trouve d'après la formule d'Ostrogradsky :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) = \oiint \vec{v} \cdot d^2\Sigma = 0. \Rightarrow$$

La vitesse est à flux conservatif, le long d'un tube de courant : le débit volumique se conserve.

Donc plus les lignes de courant d'un écoulement incompressible sont resserrées, plus la vitesse est importante (en norme).

remarque

S'il semble assez naturel de considérer que pour les liquides, incompressibles, $\mu = cste \Rightarrow \frac{D\mu}{Dt} = 0$, tout écoulement est incompressible, certains écoulements de gaz (compressibles) peuvent être considérés comme incompressibles...

$$\left. \begin{array}{l} \text{fluide incompressible} \\ \text{(liquide : } \mu = cste \text{)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \neq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{écoulement incompressible} \\ \frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div}\vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

4. Utilisation du rotationnel de la vitesse

Définition du rotationnel grâce à la formule de Stokes *s'y retrouver*

On se souvient que le rotationnel est défini par la formule de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d^2\vec{S}$$

pour une surface S délimitée par un contour fermé \mathcal{C} (formule de Stokes).

Interprétation du rotationnel de la vitesse *schéma*

La figure ?? représente un écoulement avec deux zones, l'une où le rotationnel est non nul, l'autre où il est nul.

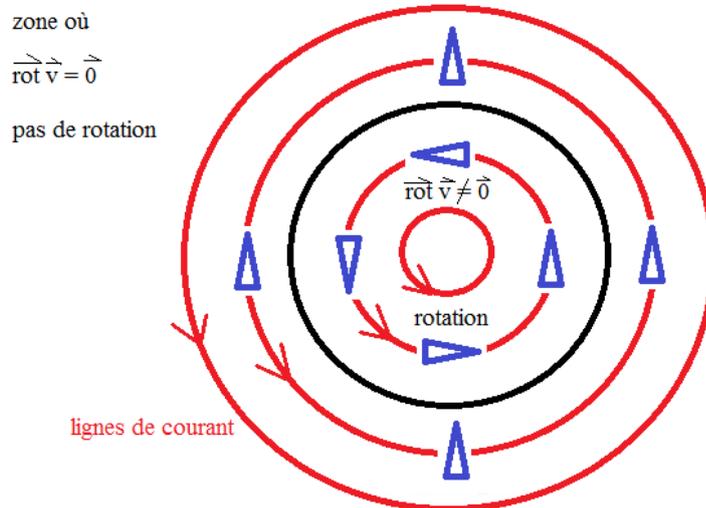


FIGURE 4 – Interprétation du rotationnel de la vitesse

Vecteur tourbillon *définition*

On nommera $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$ "vecteur tourbillon".

✳ **Interprétation du vecteur tourbillon** *s'y retrouver*

Notons que $\vec{\Omega}$ est un pseudo-vecteur, et que sa divergence, comme celle de tout rotationnel, est nulle.

Il y a rotation du fluide (on parlera de "tourbillon") s'il existe un point de l'espace - au moins - où $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$.

⚠ *remarque*

On peut avoir $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ (sauf en certains endroits de l'espace où la vitesse n'est pas définie), alors même que $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$.

⚠ *remarque*

On peut avoir $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ partout avec des lignes de courant incurvées.

👁 **Evolution des particules de fluide lors d'une tornade** *animation*

Il y a rotation des particules de fluide à l'intérieur d'une tornade.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

5. Ecoulements irrotationnels

✳ **Rotationnel d'un gradient** *s'y retrouver*

$$\vec{rot}(\vec{grad}(f)) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Le rotationnel d'un gradient est nul.

📎 **Ecoulements potentiels ou irrotationnels ou non tourbillonnaires** *définition*

un écoulement est irrotationnel (ou non tourbillonnaire) si, partout dans le fluide,

$$\vec{rot}(\vec{v}) = 2.\vec{\Omega} = \vec{0}$$

Le rotationnel de la vitesse étant nulle, on peut faire dériver celle-ci, *via* un gradient, d'un potentiel ϕ :

$$\vec{v} = \vec{grad}(\phi)$$

✳ **Lignes de courant et surfaces iso-potentielles** *s'y retrouver*

Les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces iso-potentielles ($\phi = cste$).

Le champ des vitesses est donc à circulation conservative : les lignes de courant ne peuvent être fermées.

✳ **Divergence d'un rotationnel** *s'y retrouver*

$\left| \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{A})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \right.$ La divergence d'un rotationnel est nulle.

6. Écoulements potentiels incompressibles

✳ **5 Écoulements potentiels incompressibles** *théorème*

on vient de voir qu'un écoulement irrotationnel (ou non tourbillonnaire) est potentiel :

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi)$$

où ϕ est le potentiel des vitesses. Si on considère de plus que l'écoulement est incompressible,

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\phi) = \Delta\phi = 0$$

donc \Rightarrow

pour un écoulement irrotationnel incompressible, le potentiel ϕ obéit à l'équation de Laplace : $\Delta\phi = 0$.

✳ **Écoulements potentiels, permanents, incompressibles et plans** *s'y retrouver*

les écoulements permanents, plans, potentiels et incompressibles permettent de décrire efficacement un grand nombre d'écoulements réels. On pourra les caractériser par :

- le champ de vitesse \vec{v} ;
- le potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi)$;

On peut montrer que

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases}$$

La vitesse se déduit donc aisément du potentiel des vitesses ϕ .

D'autre part, on a déjà vu que : $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0$ (ϕ obéit à l'équation de Laplace).

III- Forces exercées sur une particule de fluide

1. Forces volumiques

✳ **6 Force volumique ou massique de pesanteur** *théorème*

un petit élément de volume $d^3\tau$ a un poids $d^3\vec{P} = \mu \cdot \vec{g} d^3\tau$, \Rightarrow
on peut donc associer au poids :

$$\begin{cases} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = \mu \vec{g} \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = \vec{g} \end{cases}$$

7 Force volumique ou massique de Coriolis : *théorème*

si l'étude se fait dans un référentiel R non galiléen, il faut considérer aussi la force de Coriolis à laquelle est soumis $d^3\tau$. Celle-ci est $d^3\vec{f}_{iC} = -2 \cdot \mu \cdot d^3\tau \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, où $\vec{\Omega}_{R/R_g}$ est le vecteur rotation de R par rapport aux référentiels galiléens et \vec{v} la vitesse locale du fluide (dans R). \Rightarrow

On peut donner pour la force de Coriolis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = -2 \mu \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v} \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = -2 \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v} \end{array} \right.$$

2. Forces surfaciques : pression et viscosité

Forces surfaciques *s'y retrouver*

un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de surface de la part de son environnement. Sur l'élément infinitésimal $d^2\Sigma$ s'exerce $\vec{d}^2\vec{F}$ qui a une composante normale, liée à la pression P , et une composante tangentielle, la force de viscosité.

8 Force volumique ou massique de pression *théorème*

la résultante des forces de surface exercées sur un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ est

$$\oint\oint -P \cdot \vec{d}^2\Sigma = \oint\oint_{\Sigma} -P \, d^2\Sigma = \iiint_V \vec{grad}(-P) \, d^3\tau$$

\Rightarrow

on associe aux forces de surfaces pour un fluide parfait (sans viscosité) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = -\vec{grad}(P) \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = -\frac{\vec{grad}(P)}{\mu} \end{array} \right.$$

Constatations expérimentales de la viscosité *s'y retrouver*

si l'on jette de l'eau sur une table, celle-ci glisse puis s'arrête. Ainsi, il existe des forces tangentielles (dites forces de viscosité ou de cisaillement) exercées par les couches de fluides les unes sur les autres. De même, si l'on réitère l'expérience avec de l'huile, ou mieux encore avec du miel, la distance parcourue par le fluide sur la table est plus courte : ces forces de viscosité dépendent de la nature du fluide.

Plus généralement, toutes les expériences montrent que :

- la vitesse d'écoulement d'un fluide est une fonction continue du temps mais aussi de l'espace,
- la vitesse relative du fluide au contact d'un solide est toujours nulle,

ce qui n'était pas vrai dans le cas du fluide parfait.

Il nous faut donc prendre en compte la viscosité du fluide pour s'approcher du comportement réel d'un fluide.

Forces exercées entre veines de fluide dans le cas d'un écoulement unidimensionnel *schéma*

La figure ?? représente un écoulement unidimensionnel.

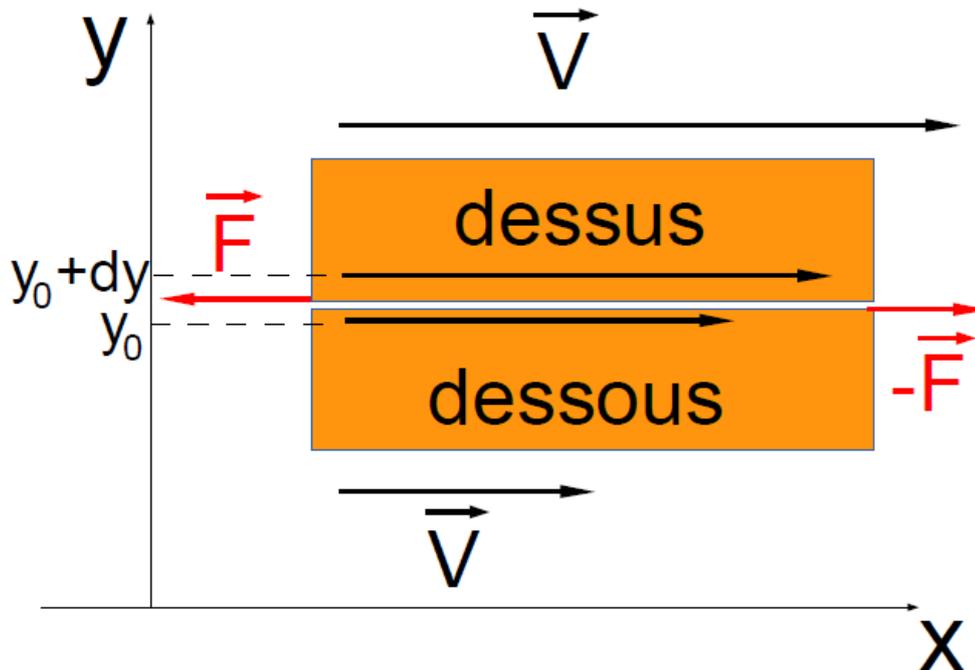


FIGURE 5 – Forces exercées entre veines de fluide dans le cas d'un écoulement unidimensionnel



Expression des forces de viscosité pour un écoulement unidimensionnel *définition*

on peut écrire que la force de viscosité exercée par la veine lente (pour $y < y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine rapide (pour $y > y_0$) est

$$F_x = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

où η est par définition, le coefficient de viscosité dynamique du fluide.



Interprétation *s'y retrouver*

la force de viscosité tend à accélérer les veines lentes et à ralentir les veines rapides. On parle aussi de force de cisaillement. Elles tendent à homogénéiser la vitesse.

NB : les forces de viscosité sont donc nulles pour un fluide au repos. La viscosité ne joue donc aucun rôle dans l'état d'équilibre d'un fluide, contrairement à la pression.

✳ **Fluide newtonien** *s'y retrouver*

on se restreindra aux fluides newtoniens, pour lesquels la viscosité ne dépend pas du champ des vitesses (seulement de la nature du fluide et de sa température).

📎 **Viscosités dynamique et cinématique** *définition*

la viscosité dite dynamique se note η . Elle est positive et s'exprime dans le système international en poiseuille

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ s'exprime en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

ν a la dimension d'un coefficient de diffusion.

👁 **Exemples de valeurs de viscosités** *tableau*

Le tableau ?? présente quelques exemples de valeurs de viscosités dynamiques pour quelques fluides courants.

fluide	air	eau	glycérine	graisse
η en Pl	18×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-3}$	0,870	10^3
ν en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	15×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-6}$	635×10^{-6}	1

TABLE 1 – Quelques viscosités dynamiques η et cinématiques ν à 20°C et $P = 1\text{atm}$

👁 **La viscosité dépend de la température** *tableau*

Le tableau ?? présente la variation de la viscosité avec la température.

température	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
huile de ricin	2420	986	451	231	125	74	43
huile d'olive	138	84	52	36	24,5	17	12,4

TABLE 2 – Quelques viscosités dynamiques η (en mPl) en fonction de la température

👁 **Forces de cisaillement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel** *schéma*

La figure ?? représente le système est un parallépipède rectangle d'épaisseur dy suivant Oy et de surface S pour les plans de cote y_0 et $y_0 + dy$.

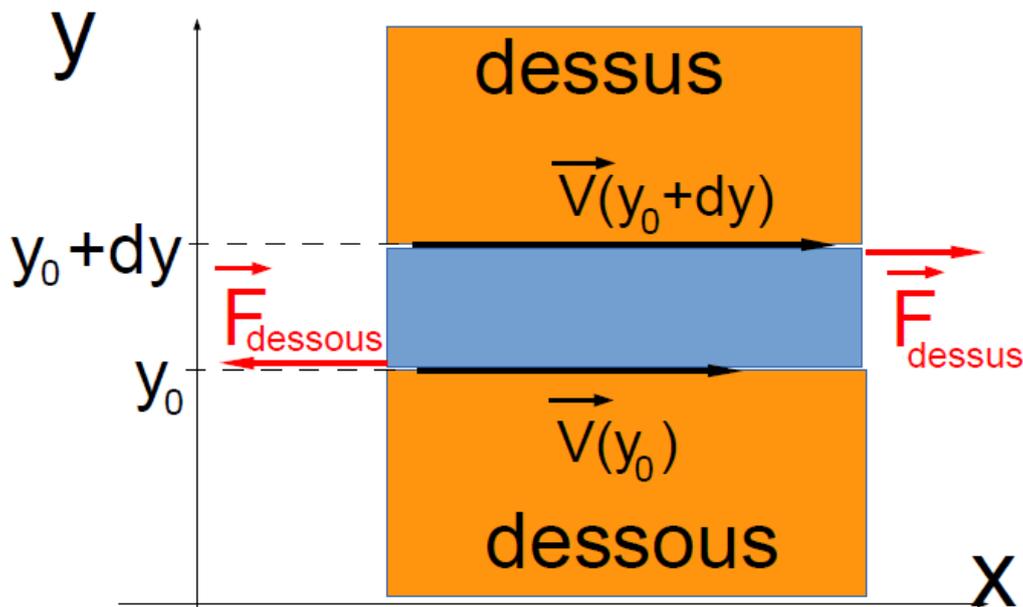


FIGURE 6 – Forces de cisaillement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel

9 Équivalent volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien *théorème*

globalement, la force de cisaillement est :

$$\vec{F}_{cis} = \eta \cdot S \cdot \left[\frac{\partial v_x(y_0 + dy)}{\partial y} - \frac{\partial v_x(y_0)}{\partial y} \right] \cdot \vec{u}_x = \eta \cdot S \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \vec{u}_x = \eta \cdot S \cdot dy \Delta v_x \vec{u}_x$$

Pour un écoulement unidimensionnel, $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$, la force de cisaillement exercée sur un volume élémentaire $d^3\tau = S dy$ est

$$\vec{F}_{cis} = \eta S dy \Delta v_x \vec{u}_x$$

On généralise \Rightarrow

L'équivalent volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien en écoulement incompressible est :

$$\vec{F}_{cis} = \vec{f}_{cis} d^3\tau \text{ avec : } \vec{f}_{cis} = \eta \Delta \vec{v}$$

3. Équation de Navier Stokes

10 Equation de Navier Stokes dans le cas d'un référentiel galiléen *théorème*

en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué à un petit élément de volume $d^3\tau$, on trouve :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \Sigma \vec{f}_v$$

Dans le cas de l'étude dans un référentiel galiléen, seuls le poids et les forces de contact (pression et viscosité) interviennent *a priori*. On peut donc transformer la précédente expression en \Rightarrow

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

NB :

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \\ &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}\end{aligned}$$

✳ **Equation de Navier Stokes dans le cas d'un référentiel non galiléen** *s'y retrouver*
si l'étude se fait dans un référentiel R non galiléen, avec $\vec{\Omega}_{R/R_g}$ le vecteur rotation de R par rapport aux référentiels galiléens, il faut ajouter dans le second membre de l'équation d'Euler la force de Coriolis. Soit :

$$\mu \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \cdot \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) + \eta \cdot \Delta\vec{v} - 2 \cdot \mu \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v}$$

✳ **Interprétation des différents termes dans l'équation de Navier Stokes** *s'y retrouver*

on reconnaît

- $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$: le terme d'inertie dit instationnaire dû à la variation temporelle du champ des vitesses ;
- $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$: le terme d'inertie de convection dû au transport de quantité de mouvement par l'écoulement (terme qui confère à l'équation de Navier - Stokes un caractère non linéaire) ;
- $-\frac{\overrightarrow{grad}(P)}{\mu}$: le terme dû au champ de pression ;
- \vec{g} : le terme dû au champ de pesanteur,
- $\nu \cdot \Delta\vec{v}$: le terme dû à la viscosité, rendant compte de la diffusion de la quantité de mouvement.

✳ **Comparaison entre les équations d'Euler et de Navier Stokes** *s'y retrouver*

on trouve l'équation d'Euler à partir de l'équation de Navier Stokes si on considère le fluide comme parfait, c'est à dire sans viscosité.

✳ **Caractéristiques de l'équation de Navier Stokes** *s'y retrouver*

l'équation de Navier Stokes est une équation différentielle vectorielle (c'est à dire qu'elle donne trois équations différentielles scalaires). De plus, cette équation est non linéaire (à cause du terme en v^2 apporté par $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$).

On pourra souvent, lors de l'étude de petites perturbations (ondes...), négliger ces termes non linéaires.



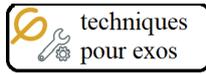
Valeurs numériques (compléments) Introduction à la mécanique des fluides

- pression atmosphérique dans les conditions « habituelles » : $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$.

Propriétés de l'air et de l'eau

dans les conditions « habituelles » :

fluide	air	eau liquide
masse volumique μ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1,3	10^3
viscosité dynamique η en Pl	18×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-3}$
viscosité cinématique ν en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	15×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-6}$



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Vision lagrangienne

Calculs de dérivées particulières

En eulérien : $\frac{Dg}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) . g$.

Détermination de lignes de courant

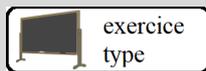
On détermine l'équation d'une ligne de courant en écrivant le parallélisme entre la vitesse \vec{v} et le déplacement élémentaire $\vec{d\ell}$ le long de cette ligne : $\vec{v} \wedge \vec{d\ell} = \vec{0}$ ou bien $\vec{d\ell} = k \cdot \vec{v}$.

Détermination de trajectoires et de ligne d'émission

On détermine une trajectoire d'une particule de fluide en écrivant les équations différentielles reliant la position de cette particule $((X(t), Y(t), Z(t)))$ à la vitesse \vec{v} :

$$\frac{dX(t)}{dt} = v_x(X(t), Y(t), Z(t), t)$$

etc... Une ligne d'émission n'est rien d'autre qu'une trajectoire particulière (définie par des conditions initiales).



Exercice 11.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Vision lagrangienne en mécanique des fluides

L'écoulement d'un fluide entre deux solides formant un angle droit (un "dièdre droit") a pour champ des vitesses, défini dans la région $x < 0$ et $y > 0$:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k x \vec{u}_x + k y \vec{u}_y$$

- 1) Déterminer l'équation des lignes de courant. Les conditions aux limites sont-elles bien vérifiées ?
- 2) Déterminer les trajectoires des particules de fluide.
- 3) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.
 - 3.a) en passant par le formalisme lagrangien ;
 - 3.b) en passant par le formalisme eulérien.

- 1) On détermine les lignes de courant par $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, qui donne :

$$x y = cte$$

(il s'agit d'hyperboles). Les conditions aux limites sont bien vérifiées car $x = 0$ et $y = 0$ sont des lignes de courant : ce sont des bords solides.

- 2) On trouve d'abord la position de la particule : $X = X_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ et $Y = Y_0 \cdot e^{k \cdot t}$. On s'aperçoit que

$$X \cdot Y = cte$$

(il s'agit d'hyperboles : les lignes de champ et les trajectoires sont identiques car l'écoulement est stationnaire).

- 3) On trouve pour l'accélération :

3.a) en passant par le formalisme lagrangien :

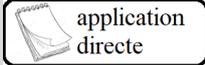
On trouve d'abord la position de la particule : $X = X_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ et $Y = Y_0 \cdot e^{k \cdot t}$. Ensuite, on dérive deux fois pour trouver : $a_x = \frac{d^2 X}{dt^2} = k^2 \cdot X$ et $a_y = \frac{d^2 Y}{dt^2} = k^2 \cdot Y$, soit :

$$\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$$

3.b) en passant par le formalisme eulérien :

$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = -k \cdot x \cdot (-k) \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot k \cdot \vec{u}_y \text{ soit :}$$

$$\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$$



Exercice 11.2 pour s'entraîner

Accélération au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

- 1) Calculer l'accélération des particules de fluide :
 - 1.a) en passant par le formalisme lagrangien ;
 - 1.b) en passant par le formalisme eulérien.

1) L'accélération est déterminée

1.a) en passant par le formalisme lagrangien :

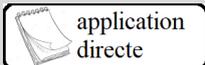
On dérive deux fois les positions pour trouver : $a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = k^2.X$ et $a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = k^2.Y$, soit :

$$\vec{a} = k^2.\vec{r}$$

1.b) en passant par le formalisme eulérien :

$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \left(k.x.\frac{\partial}{\partial x} + k.y.\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v} = k.x.(k).\vec{u}_x + k.y.k.\vec{u}_y$ soit :

$$\vec{a} = k^2.\vec{r}$$



Exercice 11.3 pour s'entraîner

Détermination d'un champ de vitesses et d'accélération

Soit un écoulement bidimensionnel défini en formalisme lagrangien par :

$$\begin{cases} X = X_0.(1 + b.t) \\ Y = Y_0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer :
 - 1.a) la vitesse d'une particule de fluide en formalisme lagrangien ;
 - 1.b) le champ de vitesse en formalisme eulérien.
- 2) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide :
 - 2.a) en passant par le formalisme lagrangien ;
 - 2.b) en passant par le formalisme eulérien.

1) On trouve pour la vitesse :

1.a) en passant par le formalisme lagrangien :

On dérive une fois pour trouver : $v_x = \frac{dX}{dt} = X_0.b$ et $v_y = 0$, soit :

$$\vec{v} = X_0.b.\vec{u}_x = \frac{X(t).b}{1 + b.t}.\vec{u}_x$$

1.b) dans le formalisme eulérien :

$$\vec{v} = \frac{x.b}{1 + b.t}.\vec{u}_x$$

2) On trouve pour l'accélération :

2.a) en passant par le formalisme lagrangien :

On dérive deux fois pour trouver : $a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$ et $a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = 0$, soit :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

2.b) en passant par le formalisme eulérien :

$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x.b}{1+b.t}\right).\vec{u}_x + \frac{x.b}{1+b.t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x.b}{1+b.t}\right).\vec{u}_x = -\frac{x.b^2}{(1+b.t)^2}.\vec{u}_x + \frac{x.b^2}{(1+b.t)^2}.\vec{u}_x$ soit :

$$\vec{a} = \vec{0}$$



Exercice 11.4 pour s'entraîner
Accélération entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun (Oz) aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(A.r + \frac{B}{r} \right) \cdot \vec{u}_\theta$$

1) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

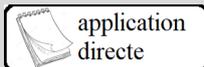
1) L'accélération d'une particule de fluide est donnée par : $\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$.

$$\text{Or } \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\left(A.r + \frac{B}{r} \right)^2 \right).$$

Et d'autre part, $r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = 2.A.\vec{u}_z$. Donc, on trouve :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = - \left(A^2.r + \frac{B^2}{r^3} + \frac{2.A.B}{r} \right) \cdot \vec{u}_r = - \frac{\left(A.r + \frac{B}{r} \right)^2}{r} \cdot \vec{u}_r,$$

qui est l'accélération d'une particule de fluide en rotation uniforme !



Exercice 11.5 pour s'entraîner
Lignes de courant d'une particule de fluide en chute libre

Soit un champ des vitesses, avec un axe (Oz) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0.\vec{u}_x + (v_0 - g.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les lignes de courants.

Ce sont des courbes qui suivent $\frac{dx}{u_0} = \frac{dz}{v_0 - g.t}$, c'est à dire des droites de pente

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v_0 - g.t}{u_0}$$

(ces droites changent dans le temps : l'écoulement n'est pas permanent).



Exercice 11.6 pour s'entraîner
Lignes de courant d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

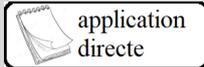
$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer : les lignes de courant.

On détermine : les lignes de courant par $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, qui donne :

$$x = cte.y$$

(il s'agit de droites passant par O , la source).



Exercice 11.7 pour s'entraîner

Lignes de courant d'un écoulement dans un dièdre droit (2)

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région $x > 0$ et $y > 0$, est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y + a.\omega.\cos(\omega.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les lignes de courant.

On détermine les lignes de courant par $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$, qui donne :

$$\begin{cases} x.y = cte \\ z = \frac{a.\omega.\cos(\omega.t_0)}{k} \ln\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

à l'instant t_0 .



Exercice 11.8 pour s'entraîner

Lignes de courant d'un écoulement dans un évier

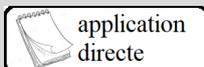
On considère la superposition de deux champs : un puits en O et un vortex de centre O , de sorte que :

$$\vec{v} = \frac{-D_v}{2.\pi.r} \vec{u}_r + \frac{C}{2.\pi.r} \vec{u}_\theta \quad \forall r$$

Il s'agit d'un écoulement plan stationnaire dans un évier.

Déterminer l'équation polaire des lignes de courant.

Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques qui suivent l'équation polaire $r = r_0.e^{\frac{-D_v}{C}\theta}$.



Exercice 11.9 pour s'entraîner

Lignes de courant de la houle

On peut modéliser la houle par un champ de vitesse uniforme qui dépend du temps :

$$\vec{v} = v_0.\vec{u}(t) \text{ avec } \vec{u}(t) = \cos(\omega.t)\vec{u}_x + \sin(\omega.t)\vec{u}_y$$

Déterminer les lignes de courant, à l'instant t .

Les lignes de courant, à l'instant t , sont des droites parallèles à $\vec{u}(t)$.

Les lignes de courant ne coïncident pas avec les trajectoires car l'écoulement n'est pas stationnaire.



Exercice 11.10 pour s'entraîner

Trajectoires d'une particule de fluide en chute libre

Soit un champ des vitesses, avec un axe (Oz) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0.\vec{u}_x + (v_0 - g.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les trajectoires.

La trajectoire est donnée par $\frac{dX}{dt} = u_0$ et $\frac{dZ}{dt} = v_0 - g.t$, ce qui donne :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + u_0.t \\ Z(t) = Z_0 + v_0.t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

Les trajectoires sont des paraboles.



Exercice 11.11 pour s'entraîner

Ligne d'émission d'une particule de fluide en chute libre

Soit un champ des vitesses, avec un axe (Oz) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0 \cdot \vec{u}_x + (v_0 - g \cdot t) \cdot \vec{u}_z$$

Déterminer la ligne d'émission issue du point $(0, 0)$.

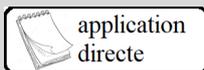
La trajectoire est donnée par $\frac{dX}{dt} = u_0$ et $\frac{dZ}{dt} = v_0 - g \cdot t$, ce qui donne :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + u_0 \cdot t \\ Z(t) = Z_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

La ligne d'émission est la trajectoire suivie par la particule de fluide depuis le point $(0, 0)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} X(t) = u_0 \cdot t \\ Z(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

C'est une parabole. Cette ligne d'émission est non fluctuante : elle reste la même quelle que soit la date t .



Exercice 11.12 pour s'entraîner

Trajectoires d'une particule de fluide au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

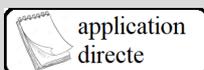
$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k \cdot x \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot \vec{u}_y$$

Déterminer les trajectoires des particules de fluide.

On détermine les trajectoires des particules de fluide : on trouve d'abord la position de la particule : $X = X_0 \cdot e^{k \cdot t}$ et $Y = Y_0 \cdot e^{k \cdot t}$. On s'aperçoit que

$$X = \frac{X_0}{Y_0} Y$$

(il s'agit de droites passant par O , la source : les lignes de champ et les trajectoires sont identiques car l'écoulement est stationnaire).



Exercice 11.13 pour s'entraîner

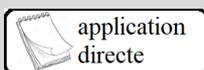
Trajectoires d'une particule de fluide dans un dièdre droit en régime non stationnaire

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région $x > 0$ et $y > 0$, est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k \cdot x \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot \vec{u}_y + a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_z$$

Déterminer les trajectoires des particules de fluide.

On trouve la position de la particule : $X = X_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, $Y = Y_0 \cdot e^{k \cdot t}$ et $Z = Z_0 + a \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (les lignes de champ et les trajectoires ne sont pas identiques car l'écoulement n'est pas stationnaire).



Exercice 11.14 pour s'entraîner

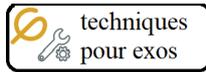
Trajectoires d'une particule de fluide dans le cas de la houle

On peut modéliser la houle par un champ de vitesse uniforme qui dépend du temps :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}(t) \text{ avec } \vec{u}(t) = \cos(\omega \cdot t) \vec{u}_x + \sin(\omega \cdot t) \vec{u}_y$$

Déterminer la trajectoire des particules de fluide.

Les trajectoires sont des cercles. Les lignes de courant ne coïncident pas avec les trajectoires car l'écoulement n'est pas stationnaire.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Caractérisations du champ de vitesse dans un fluide

Divergence

La divergence peut être calculée grâce son expression dans le repère adapté :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left(\frac{\partial(\mu_2 \cdot \mu_3 \cdot v_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \cdot \mu_1 \cdot v_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot v_3)}{\partial s_3} \right)$$

ou bien avec la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = \iiint \operatorname{div}(\vec{v}) \cdot d^3\tau$$

Rotationnel

Le rotationnel peut être calculé grâce son expression dans le repère adapté :

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \cdot \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 \cdot v_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 \cdot v_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \cdot \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 \cdot v_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 \cdot v_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 \cdot v_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 \cdot v_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix}$$

ou bien grâce au théorème de Stokes :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) \cdot d^2\vec{S}$$

Potentiel

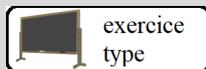
On détermine le potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \vec{\operatorname{grad}}(\phi)$ grâce à l'expression du gradient :

$$\vec{\operatorname{grad}}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_3} \end{pmatrix}$$

ou bien grâce à la circulation

$$\int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{\operatorname{grad}}(\phi) \cdot d\vec{\ell} = \phi(b) - \phi(a)$$

On peut créer un écoulement par superposition d'écoulements : on somme les potentiels. Le gradient donne la vitesse et les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équi-potentiellelles.



Exercice 11.15 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Caractérisation des écoulements fluides

L'écoulement d'un fluide entre deux solides formant un angle droit (un "dièdre droit") a pour champ des vitesses, défini dans la région $x < 0$ et $y > 0$:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k x \vec{u}_x + k y \vec{u}_y$$

- 1) Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement :
 - 1.a) incompressible ?
 - 1.b) irrotationnel ?
- 2) Si oui, déterminer le potentiel des vitesses.

- 1) Ecoulement :
 - 1.a) incompressible car

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

(les particules de fluide gardent le même volume).

1.b) non tourbillonnaire ou irrotationnel car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

(les bords des particules de fluide restent bien parallèles à eux même : la particule ne tourne pas).

2) Comme $\vec{\Omega}$ est nul, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$. Le potentiel des vitesses est

$$\phi = -\frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} + cste$$



Exercice 11.16 pour s'entraîner

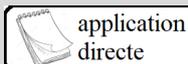
Divergence de l'écoulement d'un gaz dans une tuyère

On s'intéresse à une détente d'un gaz dans une tuyère de champ de vitesses :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \vec{u}_x$$

Calculer $\text{div}(\vec{v})$ pour ce champ de vitesse.

▮ $\text{div}(\vec{v}) = \frac{v_0}{a}$.



Exercice 11.17 pour s'entraîner

Divergence d'un vortex

On s'intéresse à un vortex : $\vec{v} = \frac{C}{2\pi \cdot r} \vec{u}_\theta$ pour tout r (c'est le cas limite de la tornade pour $a \rightarrow 0$ et $C = 2\pi \cdot a^2 \Omega$ non nul.)

Calculer la divergence de la vitesse.

▮ $\text{div}(\vec{v}) = c0$.



Exercice 11.18 pour s'entraîner

Divergence d'un écoulement entre deux cylindres

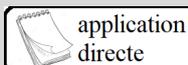
L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun (Oz) aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(A \cdot r + \frac{B}{r}\right) \cdot \vec{u}_\theta$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

▮ L'écoulement est incompressible, car

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$



Exercice 11.19 pour s'entraîner

Divergence d'un écoulement au dessus d'un plan oscillant

L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini ($y \rightarrow +\infty$) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = A \cdot e^{-k \cdot y} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot y) \cdot \vec{u}_x$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

- 1) L'écoulement est incompressible, car

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$



Exercice 11.20 pour s'entraîner

Divergence d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

- L'écoulement est compressible, car

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 2.k$$



Exercice 11.21 pour s'entraîner

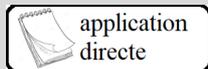
Rotationnel d'un vortex

On s'intéresse à un vortex : $\vec{v} = \frac{C}{2.\pi.r}\vec{u}_\theta$ pour tout r (c'est le cas limite de la tornade pour $a \rightarrow 0$ et $C = 2.\pi.a^2\Omega$ non nul.)

- 1) Calculer le rotationnel de la vitesse.
- 2) Calculer la circulation de \vec{v} le long d'un cercle C d'axe Oz de rayon r orienté dans le sens trigonométrique.

- 1) Partout, sauf en $r = 0$ (où la vitesse n'est pas définie), $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.

- 2) Alors même que $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = C \neq 0$.



Exercice 11.22 pour s'entraîner

Rotationnel d'un écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun (Oz) aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(A.r + \frac{B}{r} \right) . \vec{u}_\theta$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

- L'écoulement est tourbillonnaire, de vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = A.\vec{u}_z$$

Comme $\vec{\Omega}$ est non nul, il n'existe pas de potentiel des vitesses.



Exercice 11.23 pour s'entraîner

Rotationnel d'un écoulement au dessus d'un plan oscillant

L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini ($y \rightarrow +\infty$) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = A.e^{-k.y} . \cos(\omega.t - k.y) . \vec{u}_x$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est tourbillonnaire, de vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{2} k \cdot A \cdot e^{-k \cdot y} \cdot (\cos(\omega \cdot t - k \cdot y) - \sin(\omega \cdot t - k \cdot y)) \cdot \vec{u}_z$$

Comme $\vec{\Omega}$ est non nul, il n'existe pas de potentiel des vitesses.



Exercice 11.24 pour s'entraîner

Rotationnel d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

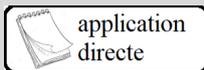
$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k \cdot x \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot \vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est non tourbillonnaire ou irrotationnel car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Comme $\vec{\Omega}$ est nul, il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \vec{\text{grad}}(\phi)$.



Exercice 11.25 pour s'entraîner

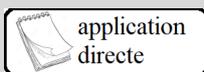
Potentiel des vitesses de l'écoulement d'un gaz dans une tuyère

On s'intéresse à une détente d'un gaz dans une tuyère de champ de vitesses :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \vec{u}_x$$

Déterminer le potentiel des vitesses.

$$\phi = v_0 \cdot \left(x + \frac{x^2}{2a}\right) + cste.$$



Exercice 11.26 pour s'entraîner

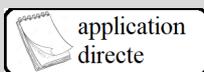
Potentiel des vitesses d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k \cdot x \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot \vec{u}_y$$

Déterminer le potentiel des vitesses.

$$\phi = \frac{k}{2} \cdot (x^2 + y^2) + cste$$



Exercice 11.27 pour s'entraîner

Dipôle hydraulique

On s'intéresse à un puits ponctuel de débit D_v situé en $P(-\frac{a}{2}, 0, 0)$ et une source de débit opposé $-D_v$ située en $S(+\frac{a}{2}, 0, 0)$. et on se place en M , loin du puits et de la source (approximation dipolaire : $OM \gg PS = a$).

1) Trouver dans ces conditions une approximation de PM et SM .

2) L'écoulement est non tourbillonnaire : $r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$. Déterminer le potentiel en superposant le potentiel

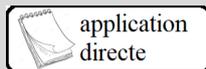
d'une source et celui d'un puits : $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \ln\left(\frac{SM}{PM}\right)$. On l'exprimera en fonction du moment dipolaire $m = \frac{D_v}{2\pi} a$.

3) Déterminer le champ de vitesse total en fonction de m .

1) $PM \approx r \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \cos \theta}{2r}\right)$ et $SM \approx r \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \cos \theta}{2r}\right)$.

2) On trouve : $\phi(M) \approx -\frac{m \cdot \cos(\theta)}{r}$.

3) Le champ de vitesse total est : $\vec{v} \approx \frac{m}{r^2} (\cos \theta \cdot \vec{u}_r + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$.



Exercice 11.28 pour s'entraîner

Une source proche d'un mur

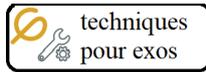
Pour modéliser un écoulement dans le demi espace $x < 0$, au voisinage d'une source ponctuelle (en $A(-a, 0, 0)$) proche d'un mur (le plan (yOz)), il s'agit tout simplement de superposer deux sources ponctuelles de même débit volumique :

- la première, réelle, en $A(-a, 0, 0)$,
- et la seconde, virtuelle, en $A'(a, 0, 0)$, symétrique de A par rapport au mur.

1) Déterminer le potentiel des vitesses en fonction de r_M et r'_M qui sont les distances du point M aux deux sources respectivement A et A' qui valent :

$$\begin{cases} r_M = \sqrt{(x_M + a)^2 + y_M^2} \\ r'_M = \sqrt{(x_M - a)^2 + y_M^2} \end{cases}$$

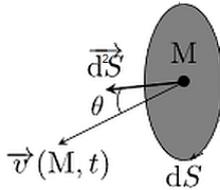
Le potentiel est $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \ln\left(\frac{r_M \cdot r'_M}{r_0^2}\right)$ où r_0 est une constante.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Bilans massiques en mécanique des fluides

Calculs de débits



Il faut bien définir la surface et son orientation.

Il faut discerner :

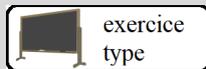
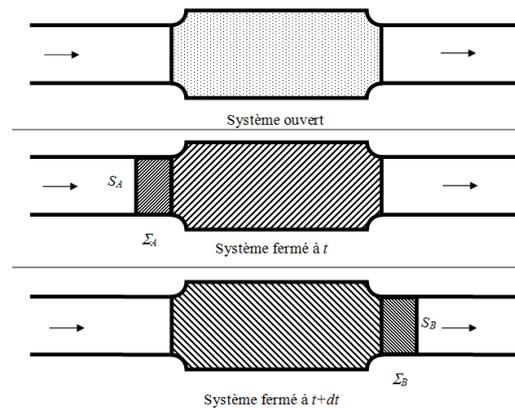
- débit massique : $D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot \vec{d^2S} = \frac{dM}{dt}$,
- et débit volumique : $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{d^2S} = \frac{dV}{dt}$.

Faire un bilan de masse

Il faut **faire un schéma** avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

La masse d'un système fermé est toujours constante (en l'absence de réactions nucléaires) : $\frac{DM}{Dt} = 0$.



Exercice 11.29 (le prof fait cet exercice type jeudi) Bilans massiques en mécanique des fluides



Poste de détente de gaz (<https://www.gazfio.eu/postes-gaz/>)

On s'intéresse à la détente d'un gaz dans un tuyau cylindrique d'axe Oz ($z > 0$) et de rayon R :

$$\vec{v} = b(1 + az)(R^2 - r^2)\vec{u}_z$$

où a et b sont des constantes strictement positives.

La masse volumique de ce gaz dépend de z : $\mu(z)$.

- 1) Déterminer l'expression du débit massique à travers une surface de cote z orientée vers les z croissants.
- 2) En déduire $\mu(z)$.

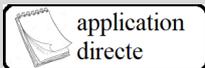
- 1) Le débit massique est :

$$D_m = \iint_S \mu(z) \vec{v}(r, z) \cdot d^2\vec{S} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mu(z) b (1 + az) (R^2 - r^2) dr r d\theta$$

$$D_m = 2\pi b \mu(z) (1 + az) \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^R = 2\pi b \mu(z) (1 + az) \frac{R^4}{4}$$

- 2) On se trouve en régime stationnaire, donc le débit se conserve. Ainsi

$$\mu(z) = \frac{2 D_m}{\pi b (1 + az) R^4}$$



application
directe

Exercice 11.30 pour s'entraîner Débit d'un ruissellement laminaire

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale sur une hauteur δ constante. On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot \delta - z) \cdot z \cdot \vec{u}_x$$

où \vec{u}_z est orthogonal à l'écoulement (et donc au plan incliné), orienté depuis le plan vers le liquide.

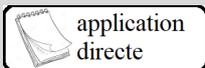
- 1) En déduire le débit volumique D_v par unité de largeur de l'écoulement.

- 1) Le débit volumique D_v par unité de largeur de l'écoulement est

$$D_v = \int_{z=0}^{z=\delta} \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot \delta - z) \cdot z \cdot dz = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} \int_{z=0}^{z=\delta} (2 \cdot \delta - z) \cdot z \cdot dz = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} \left(\delta^3 - \frac{\delta^3}{3} \right)$$

soit

$$D_v = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \eta} \delta^3$$



application
directe

Exercice 11.31 pour s'entraîner Débit à travers une paroi poreuse (loi de Darcy)

Une paroi poreuse est modélisée par une couche de matière d'épaisseur ℓ percée de N tubes cylindriques horizontaux, de rayon a et de longueur ℓ ($a \ll \ell$), par unité de surface. Il existe, au sein du liquide, une différence de pression Δp entre les deux faces de la paroi poreuse. On ne tient pas compte du champ de pesanteur.

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien, incompressible, à travers cette paroi est caractérisé par une loi de Poiseuille cylindrique dans chaque tube, avec un champ des vitesses $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z$ tel que :

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4 \cdot \eta \cdot \ell} (a^2 - r^2)$$

où r désigne la distance à l'axe du tube.

- 1) Exprimer le débit volumique D_v du fluide à travers la paroi sous la forme

$$D_v = K \frac{S \cdot \Delta p}{\eta \cdot \ell}$$

où K est la perméabilité de la paroi et S représente la section totale de la paroi.

- 2) En déduire la vitesse moyenne V du fluide - vitesse de Darcy - à travers la paroi.

1) Le débit volumique dans chaque tube est

$$D_0 = 2\pi \int_{r=0}^{r=a} v(r) \cdot dr = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta \cdot \ell} \int_{r=0}^{r=a} (a^2 - r^2) \cdot r \cdot dr = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta \cdot \ell} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right)$$

soit

$$D_0 = \frac{\Delta p \cdot \pi \cdot a^4}{8\eta \cdot \ell}$$

(c'est la loi de Poiseuille pour un tube). Pour tous les NS tubes :

$$D_v = \frac{NS \Delta p \pi a^4}{8\eta \cdot \ell}$$

On a bien

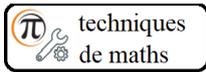
$$D_v = K \frac{S \Delta p}{\eta \ell}$$

avec

$$K = \frac{N \pi a^4}{8}$$

2) La vitesse est telle que $D_v = S \cdot V$, soit

$$V = K \frac{\Delta p}{\eta \cdot \ell}$$

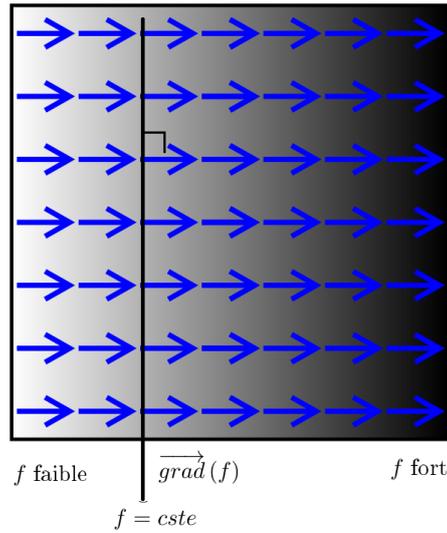


Techniques mathématiques à maîtriser
Interprétation des opérateurs d'analyse vectorielle

Gradient

le gradient $\vec{\text{grad}}(f)$ de f va vers les f croissants.

le gradient $\vec{\text{grad}}(f)$ de f est orthogonal aux surfaces iso- f .



Rotationnel

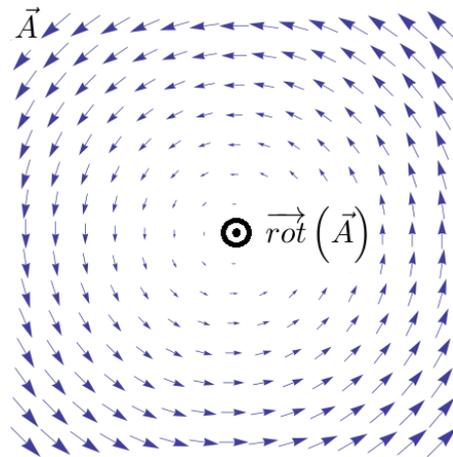
Les lignes de champ de \vec{A} "tournent" autour de leur rotationnel $\vec{\text{rot}}(\vec{A})$ (dans le sens trigonométrique si $\vec{\text{rot}}(\vec{A})$ vient vers nous, et dans le sens horaire si $\vec{\text{rot}}(\vec{A})$ est dans l'autre sens).

Si $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$,

les lignes de champ de \vec{A} sont fermées.

Si $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$, $\exists f$ tel que $\vec{A} = \vec{\text{grad}}(f)$

et les lignes de champ de \vec{A} sont ouvertes.



Divergence

les lignes de champ de \vec{A} divergent si $\text{div}(\vec{A}) > 0$,

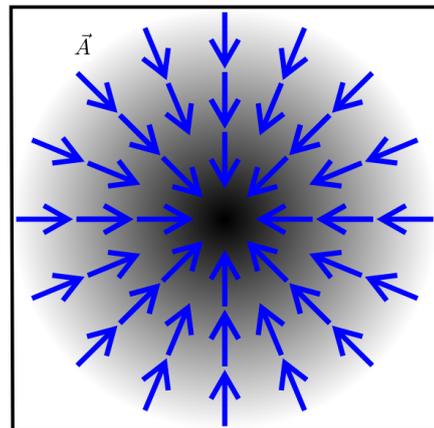
convergent si $\text{div}(\vec{A}) < 0$.

Si $\text{div}(\vec{A}) = 0$,

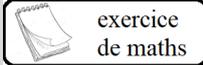
le long d'un tube de champ d'un vecteur \vec{A} ,

le flux de \vec{A} se conserve :

$$\iint_S \vec{A} \cdot d^2S = cste \quad \forall S.$$



$\text{div}(\vec{A}) < 0$

exercice
de maths
Exercice 11.32 pour s'entraîner
Gradient de f et surfaces iso- f

- 1) Montrer que les lignes de champ de $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}f$ sont orthogonales aux surfaces équi- f .

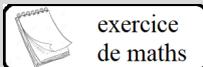
- 1) Soient M et M' infiniment proches dans une surface équi- f :

$$f(M') = f(M) + df = f(M) \Rightarrow df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

Comme c'est vrai $\forall \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$, aussi

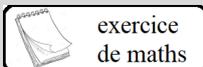
$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}f \perp \overrightarrow{MM'}$$

(cqfd)

exercice
de maths
Exercice 11.33 pour s'entraîner
Lignes de champ d'un vecteur à rotationnel non nul

- 1) Montrer que si $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$, les lignes de champ de \vec{A} sont fermées, ouvertes sinon.

- 1) Si on avait $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$, on pourrait écrire $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}f$ et les lignes de champ de \vec{A} iraient vers les potentiels f croissants, donc seraient ouvertes. Ici, $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$, donc les lignes de champ de \vec{A} sont fermées.

exercice
de maths
Exercice 11.34 pour s'entraîner
Conservation du flux d'un vecteur à divergence nulle le long d'un tube de champ

- 1) Montrer que si $\text{div}(\vec{A}) = 0$, le long d'un tube de champ du vecteur \vec{A} , le flux de \vec{A} se conserve.

- 1) On se place le long d'un tube de champ de \vec{A} fermé par S_1 et S_2 , de surface latérale S_3 et on applique la formule d'Ostrogradsky :

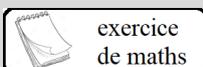
$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau = 0 \Rightarrow - \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} + \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

Or

$$\iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

par construction du tube de champ de \vec{A} . Donc :

$$\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} = \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} \Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \text{cste} \forall S$$

exercice
de maths
Exercice 11.35 pour s'entraîner
Orientation d'un vecteur suivant le signe de sa divergence

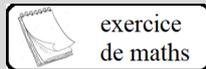
- 1) Montrer que les lignes de champ de \vec{A} divergent si $\text{div}(\vec{A}) > 0$, et convergent si $\text{div}(\vec{A}) < 0$.

1) On applique la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) \, d^3\tau$$

Si $\operatorname{div}(\vec{A}) > 0$, $\vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} > 0$ donc le champ diverge,

et si $\operatorname{div}(\vec{A}) < 0$, $\vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} < 0$ donc le champ converge.



exercice
de maths

Exercice 11.36 pour s'entraîner

Resserrement des lignes de champ d'un vecteur à divergence nulle et norme de ce vecteur

1) Montrer que si le vecteur \vec{A} est à divergence nulle, plus les lignes de champ de \vec{A} sont resserrées, plus $\|\vec{A}\|$ est grande.

1) On se place le long d'un tube de champ de \vec{A} fermé par S_1 et S_2 , de surface latérale S_3 et on applique la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \vec{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) \, d^3\tau = 0 \Rightarrow - \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_1} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_2} + \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_3} = 0$$

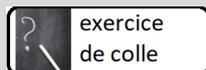
Or

$$\iint_{S_3} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_3} = 0$$

par construction du tube de champ de \vec{A} . Donc :

$$\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_1} = \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{d^2S_2} \Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot \vec{d^2S} = cste \, \forall S$$

Si $S_2 < S_1$ (c'est-à-dire si les lignes de champ se resserrent), alors, pour conserver le flux de \vec{A} , il faut que $\|\vec{A}\|$ soit grande.

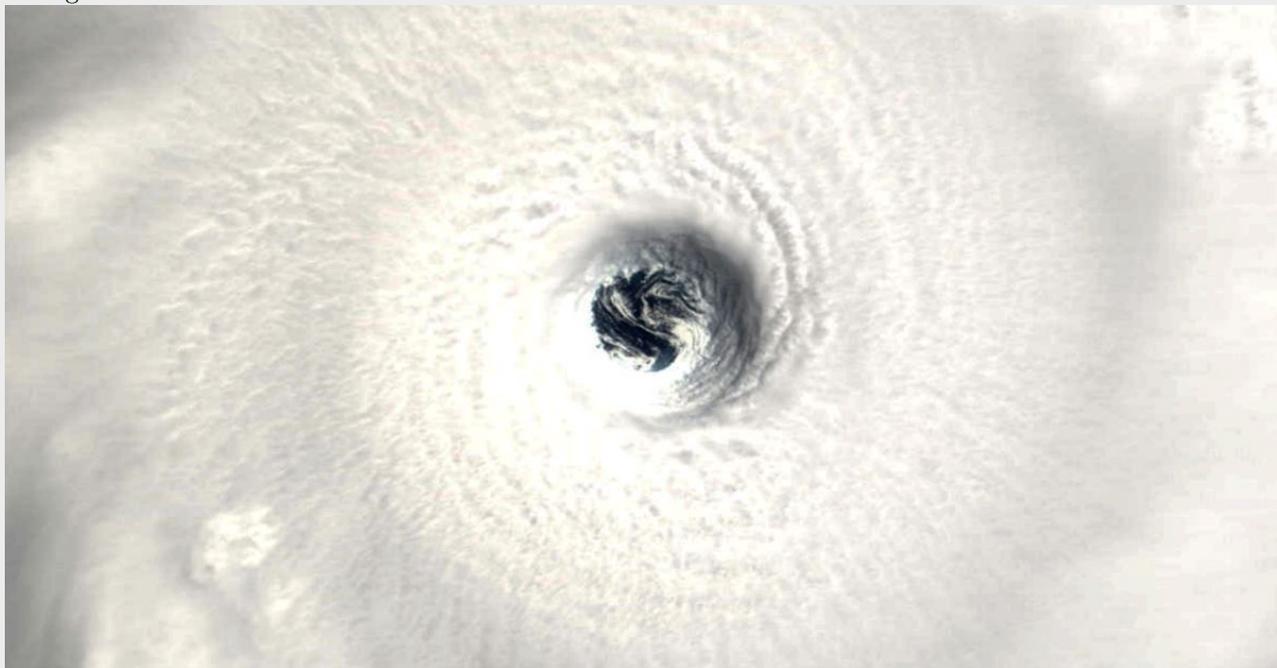


exercice
de colle

Exercice 11.37

Etude cinématique d'une tornade

Le caractère destructeur des cyclones est aussi l'occasion de découvrir des images incroyables de l'œil de l'ouragan.



Concrètement, on peut décrire l'œil comme étant une zone circulaire de vent faible et de beau temps, en plein milieu d'un cyclone. C'est ce contraste étonnant entre calme centrale et déchaînement des éléments autour, qui rend ce phénomène si particulier. L'œil qui représente le centre du système, est le siège de la pression la plus basse associée au cyclone.

Si l'œil représente une zone de calme, il est en revanche entouré par ce qu'on appelle le mur de l'œil. Observé depuis un avion, le mur de l'œil ressemble aux tribunes d'un stade, d'où le nom d'effet stadium pour décrire l'agencement particulier de la convection.

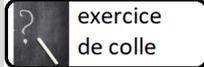
Dans le mur de l'œil sont concentrées les conditions les plus violentes du cyclone. C'est là qu'on retrouve les vents les plus forts et les pluies les plus intenses. Dans le cas des systèmes extrêmes, les rafales peuvent y dépasser les 300 km/h ! Cet anneau de convection intense est incontestablement la partie à éviter. C'est la zone la plus redoutée des cyclones tropicaux.

D'après <https://www.cycloneoi.com>.

On s'intéresse à une tornade :

$$\begin{cases} \vec{v} = r \Omega \vec{u}_\theta & \text{pour } r < a \\ \vec{v} = \frac{\Omega a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > a \end{cases}$$

- 1) Tracer $v(r)$. Discuter.
- 2) Calculer la divergence de la vitesse. Interpréter.
- 3) Calculer le rotationnel de la vitesse. Interpréter.
- 4) Calculer la circulation de \vec{v} le long d'un cercle C d'axe Oz de rayon r orienté dans le sens trigonométrique.

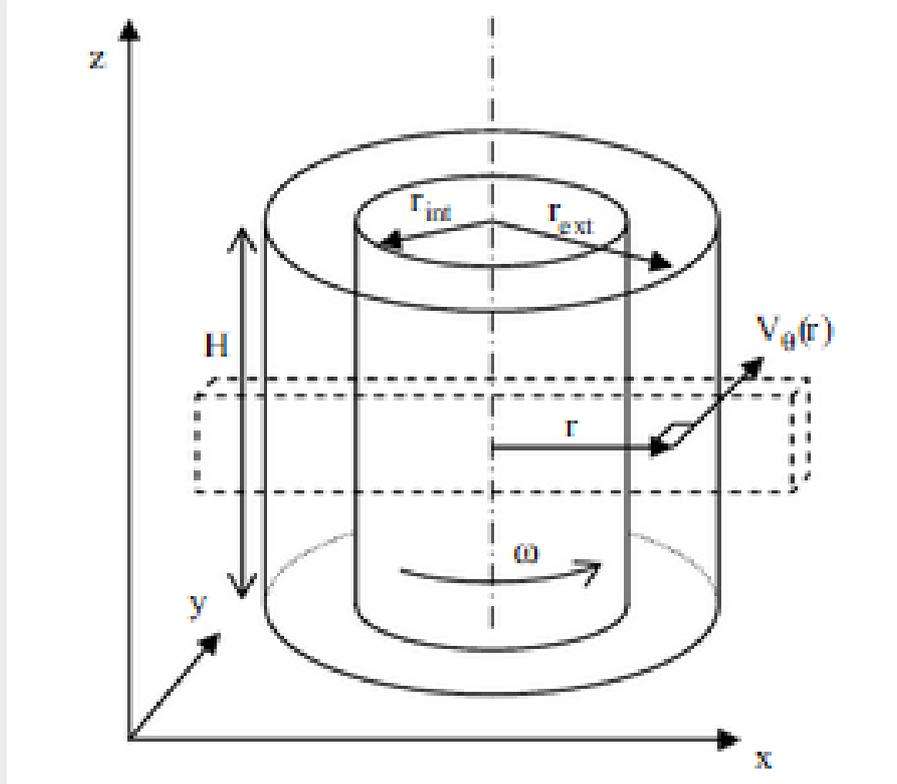


exercice
de colle

Exercice 11.38 Un écoulement entre deux cylindres

Différentes géométries de rhéomètre permettent de mettre le fluide en situation de cisaillement et de réaliser des mesures. Dans la géométrie couette (figure), le fluide est introduit dans l'entrefer de deux cylindres concentriques, le cylindre extérieur étant par exemple fixe, et le cylindre intérieur tournant sur lui-même. Les mesures consistent traditionnellement à mesurer simultanément la vitesse de rotation du cylindre interne et le couple résistant qu'il reçoit de la part du fluide selon des protocoles choisis.

Rodts, Stephane et al. (2004). Recent developments in MRI applications to rheology and fluid mechanics.



1) L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun (Oz) aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \vec{u}_\theta$$

1.a) Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres en R_1 et R_2 .

1.b) Que se passe-t-il dans le cas où $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$?

2) Caractéristiques de l'écoulement

2.a) Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

2.b) Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

3) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

?
exercice
de colle

Exercice 11.39 Un fluide dans un récipient en rotation



Un télescope à miroir liquide (TML) est un télescope dont le corps réfléchissant est un liquide. L'idée d'utiliser un liquide en rotation pour créer une parabole parfaite est parfois attribuée à Isaac Newton mais les difficultés techniques étaient insurmontables avant la fin du XIX^e siècle.

On utilise aujourd'hui du mercure, métal liquide à température ambiante, mais refroidi pour limiter les pertes par évaporation et la pollution toxique. Une fine couche d'environ un demi à 1 mm est placée dans un récipient en rotation. Soumis à cette rotation uniforme, la surface du liquide prend la forme parabolique. En faisant varier la vitesse de rotation, on peut faire varier la courbure de la parabole et donc la distance focale du miroir. Plus la couche de mercure est épaisse, plus le champ de variations peut être important.

Le problème principal de cette technique est que le miroir peut être uniquement horizontal. Les miroirs liquides sont bien moins coûteux que leurs homologues en verre, et ne peuvent pas se casser, ni durant le transport, ni sous l'action de leur propre poids à l'usage.

issus de la page https://fr.wikipedia.org/wiki/T%C3%A9lescope_%C3%A0_miroir_liquide.

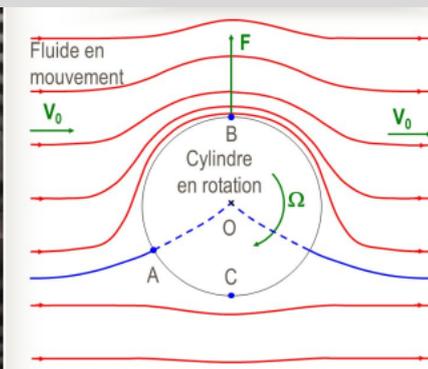
Un flacon cylindrique ouvert, de hauteur $h = 40$ cm et de diamètre $2R = 10$ cm, contient de l'eau, fluide supposé incompressible.

On fait tourner le flacon autour de son axe avec la vitesse angulaire ω . L'eau atteint alors une altitude $h_e(\omega)$ pour $r = R$. On note $h_e(\omega = 0) = h_{e_0}$ la hauteur lorsque le cylindre ne tourne pas.

- 1) Quelle est l'équation caractérisant la surface libre du liquide ?
- 2) Pour quelle valeur de ω le centre du fond du récipient est-il découvert ?
- 3) Quelle est la valeur de ω que l'on peut atteindre sans renverser l'eau ?
- 4) Quelle est la pression au fond du flacon lorsque ce dernier tourne avec la vitesse de 5 tour/s ?

exercice de colle

Exercice 11.40
Écoulement autour d'un cylindre



Un écoulement permanent, incompressible, uniforme est caractérisé par la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$, loin d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a .

1) On s'intéresse tout d'abord à un puits ponctuel de débit D_v situé en $P(-\frac{a}{2}, 0, 0)$ et une source de débit opposé $-D_v$ située en $S(+\frac{a}{2}, 0, 0)$. et on se place en M , loin du puits et de la source (approximation dipolaire : $OM \gg PS = a$).

1.a) Trouver dans ces conditions une approximation de PM et SM .

1.b) L'écoulement est non tourbillonnaire : $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Déterminer le potentiel en superposant le potentiel d'une source et celui d'un puits : $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \ln(\frac{SM}{PM})$. On l'exprimera en fonction du moment dipolaire $m = \frac{D_v}{2\pi} a$.

1.c) Déterminer le champ de vitesse total en fonction de m .

2) On suppose le cylindre fixe.

2.a) Déterminer les conditions aux limites pour ce champ de vitesse.

2.b) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant, à la vitesse $v_0 \vec{e}_x$, un champ créé par un dipôle source-puits :

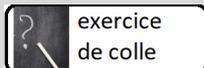
$$\vec{v}_{dipole} = \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

3) On suppose le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec la pulsation ω .

3.a) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant, au précédent champ de vitesse, un champ de type "vortex" :

$$\vec{v}_{vortex} = \frac{cste \omega}{r} \vec{u}_\theta$$

3.b) Préciser les points d'arrêt (ou points de vitesse nulle).



exercice
de colle

Exercice 11.41 Modèle de la houle



Selon l'article wikipédia qui lui est consacré, la houle est un mouvement ondulatoire de la surface de la mer qui est formé par un champ de vent éloigné de la zone d'observation (vent lointain). C'est un cas particulier de vague non déferlante.

On va dans cet exercice modéliser le champ de vitesse de l'eau de mer due la houle. On considèrera que l'eau est un fluide incompressible et non-visqueux.

On se place dans un repère cartésien, \vec{e}_z étant vertical, orienté vers le haut.

On envisage des mouvements ondulatoires de la surface de l'eau en $e^{j(\omega t - kx)}$ d'amplitude a et donc de vitesse caractéristique $v = a\omega$.

1) Préambule.

1.a) Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération temporelle si v est petite devant la vitesse de phase de l'onde ou encore si a est petite devant la longueur d'onde.

On se place dans le cadre de cette approximation dans toute la suite de l'exercice.

1.b) En utilisant l'équation d'Euler, montrer que le champ de vitesse est irrotationnel.

2) Potentiel des vitesses.

On cherche le potentiel des vitesses sous la forme :

$$\phi = f(z) \cdot \cos(\omega t - kx)$$

2.a) Quelle équation différentielle est vérifiée par $f(z)$?

2.b) En déduire, à une constante multiplicative près, la fonction $f(z)$.

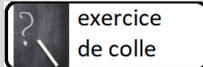
3) Exprimer les coordonnées du champ de vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$.

4) Trajectoires.

On s'intéresse au mouvement d'une particule de position moyenne $M^*(x^*, y^*, z^*)$. On supposera que l'amplitude du mouvement est faible : $a \ll \lambda$, de sorte que $f(z) \approx f(z^*)$ et $\cos(\omega t - kx) \approx \cos(\omega t - kx^*)$.

4.a) Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule.

4.b) Quelle est la forme de sa trajectoire ? Tracer quelques trajectoires de particules de fluide.



exercice
de colle

Exercice 11.42 Modèle de la houle



Selon l'article wikipédia qui lui est consacré, la houle est un mouvement ondulatoire de la surface de la mer qui est formé par un champ de vent éloigné de la zone d'observation (vent lointain). C'est un cas particulier de vague non déferlante.

On va dans cet exercice modéliser le champ de vitesse de l'eau de mer due la houle. On considèrera que l'eau est un fluide incompressible et non-visqueux.

On se place dans un repère cartésien, \vec{e}_z étant vertical, orienté vers le haut.

On envisage des mouvements ondulatoires de la surface de l'eau en $e^{j(\omega t - kx)}$ d'amplitude a et donc de vitesse caractéristique $v = a\omega$.

1) Préambule.

1.a) Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération temporelle si v est petite devant la vitesse de phase de l'onde ou encore si a est petite devant la longueur d'onde.

On se place dans le cadre de cette approximation dans toute la suite de l'exercice.

1.b) En utilisant l'équation d'Euler, montrer que le champ de vitesse est irrotationnel.

2) Potentiel des vitesses.

On cherche le potentiel des vitesses sous la forme :

$$\phi = f(z) \cdot \cos(\omega t - kx)$$

2.a) Quelle équation différentielle est vérifiée par $f(z)$?

2.b) En déduire, à une constante multiplicative près, la fonction $f(z)$.

3) Exprimer les coordonnées du champ de vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$.

4) Trajectoires.

On s'intéresse au mouvement d'une particule de position moyenne $M^*(x^*, y^*, z^*)$. On supposera que l'amplitude du mouvement est faible : $a \ll \lambda$, de sorte que $f(z) \approx f(z^*)$ et $\cos(\omega t - kx) \approx \cos(\omega t - kx^*)$.

4.a) Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule.

4.b) Quelle est la forme de sa trajectoire ? Tracer quelques trajectoires de particules de fluide.