Comment donner un « effet » à une balle ?

Quelles sont les forces à la surface d'un fluide ?

Déterminer la traînée et la portance

Etudier les systèmes ouverts

Forces exercées par les fluides

Les points du cours à connaître

I- Forces de pression et de viscosité

1. Forces de pression statiques

1 Théorème d'Archimède *théorème*

La résultante des forces de pression exercée sur le solide (volume V délimité par la surface fermé Σ) est

$$\vec{\Pi} = \oiint_{\Sigma} -P\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = \iiint_{V} -\overrightarrow{grad}P\;\mathrm{d}^3\tau$$

Or, à l'équilibre statique $\overrightarrow{grad}P = \mu\,\vec{g}$, donc

$$\vec{\Pi} = \iiint_{V} -\mu\,\vec{g}\;\mathrm{d}^3\tau = -M_i\,\vec{g}$$

$\Rightarrow$

Un corps de volume V plongé dans un fluide subit comme résultante des forces de pression l'opposé du poids du fluide déplacé (de masse M_i) :

$$\vec{\Pi} = -M_i\,\vec{g}$$

2. Portance

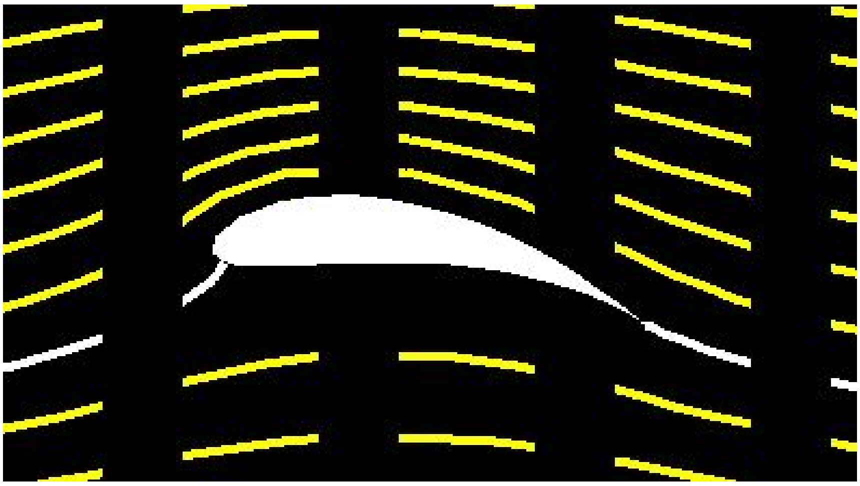
2 Effet Magnus *théorème*

on s'intéresse à un écoulement parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire, que l'on suppose uniforme à l'infini. L'écoulement du fluide est perturbé par un obstacle solide. Bien entendu, on peut comprendre l'écoulement du fluide par le fait que le solide lui-même se déplace : il suffit alors de se placer dans le référentiel où le centre du solide est fixe.
La déformation des lignes de courant au voisinage du solide se caractérise par une zone où la vitesse est plus forte (et donc où la pression est plus faible), alors qu'à d'autres endroits, la vitesse est plus faible (et c'est alors la pression qui est plus forte).
La différence de pression de part et d'autre du solide donne alors une force qui tend à déplacer le solide vers les zones de dépression, donc de fortes vitesses. $\Rightarrow$
l'écoulement d'un fluide au voisinage d'un solide exerce une force qui tend à déplacer le solide vers les zones de dépression, donc de fortes vitesses.

Effet de sol *s'y retrouver*

une voiture voit les lignes de courant de l'air se resserrer sous son bas de caisse. La vitesse de l'air est plus importante sous la voiture qu'au dessus. Aussi, il règne une basse pression sous la voiture, ce qui a pour effet de faire subir au véhicule une force de haut en bas qui le "colle" au sol. Cet "effet de sol", loin d'être nuisible, permet une bonne adhérence des pneus sur la chaussée.

Portance d'un avion *photo*



La circulation de l'air autour d'une aile d'avion n'est pas symétrique. Au dessus de l'aile ("extrados"), la vitesse est importante, alors qu'en dessous ("intrados"), la vitesse est plus faible. Aussi, l'aile ressent une force dirigée vers le haut qui assure la sustentation de l'avion.

L'effet Coanda *vidéo*

De la même façon, le sèche-cheveux permet la lévitation d'une balle de ping-pong.
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site *alain.lerille.free.fr*.

Déviation d'un cylindre en rotation : *photo*

si le solide est un cylindre sans rotation, il y a symétrie du problème.
Par contre, si le cylindre tourne autour de son axe, le caractère réel (c'est à dire visqueux) du fluide entraîne sa rotation au contact du cylindre. Le cylindre ressent alors une force qui tend à le déplacer vers les zones de fortes vitesses.
Un tel dispositif a été utilisé pour mouvoir un bateau grâce au vent... sans voile ! C'est le cas du bateau "Alcylone" du Commandant Cousteau.

Déviation d'une balle : lift, coupé, smash *schéma*

La figure 1 représente une illustration de l'effet Magnus : une sphère ou un cylindre qui tourne en se déplaçant dans un fluide. Ainsi, on peut expliquer les effets (brossés, coupés, liftés, etc.) donnés aux balles de ping-pong, de tennis ou encore aux ballons de football. La situation de la figure est caractéristique d'un smatch : la balle en rotation est entraînée vers le bas.

3. Traînée

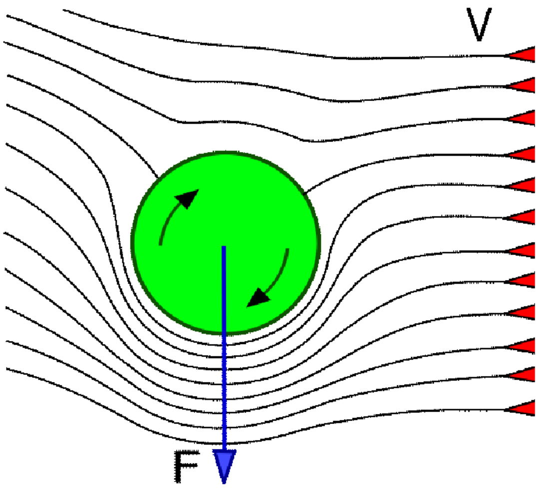


FIGURE 1 – Déviation d'une balle : lift, coupé, smash

La portance et la traînée *vidéo*

l'écoulement du fluide crée sur un solide deux force : la portance (perpendiculairement à l'écoulement) et la traînée (parallèlement à l'écoulement).
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site *alain.lerille.free.fr*.

Maître-couple *définition*

on s'intéresse à un obstacle fixe plongé dans un fluide d'écoulement uniforme à l'infini

$$\vec{v}_\infty = v_\infty \, \vec{u}_x$$

La projection de l'obstacle sur un plan $x = cste$ perpendiculaire à l'écoulement présente une surface d'aire S : c'est le maître-couple.

Force de traînée *définition*

la force de trainée est la composante parallèle à l'écoulement de la force ressentie par l'obstacle à cause de l'écoulement. Elle est de la forme :

$$\vec{F}_{trainee} = C_x \frac{\mu \, v_\infty^2 \, S}{2} \vec{u}_x$$

Le coefficient de traînée C_x est sans dimension. Il ne dépend que de la forme de l'obstacle et du nombre de Reynolds.

Traînée et maître couple *schéma*

La figure 2 représente l'écoulement du fluide qui n'est homogène qu'à l'infini. On se place dans le référentiel où le solide est fixe.

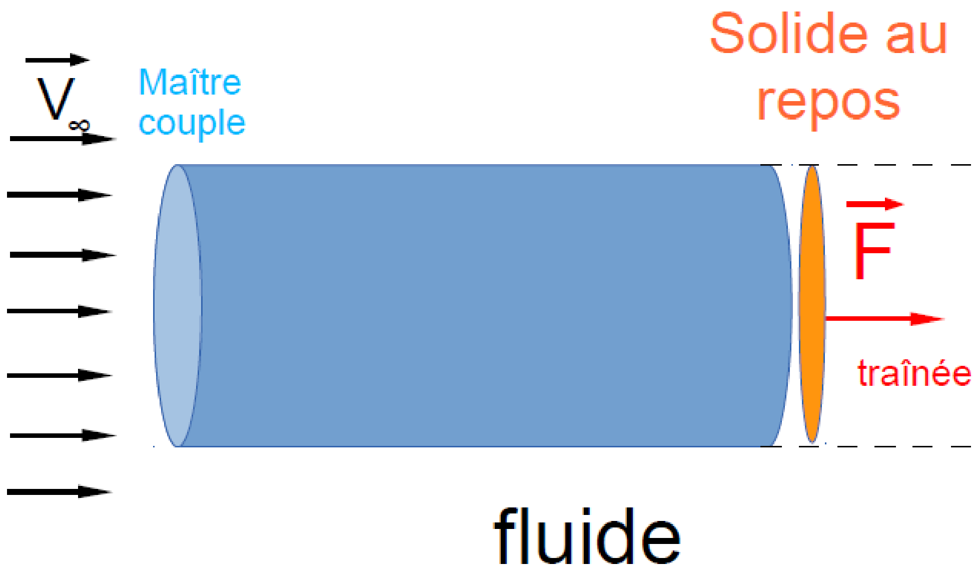


FIGURE 2 – Traînée et maître couple

Influence de la forme de l'objet sur le coefficient de traînée *vidéo*

la traînée dépend de la forme de l'objet : un objet profilé présente un Cx plus faible qu'une surface plane.
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site *alain.lerille.free.fr*.

$C_x = f(Re)$ **pour différentes formes d'obstacles.** *schéma*

La figure 3 représente l'influence de la forme de l'obstacle et du coefficient de Reynolds Re sur le coefficient de traînée C_x.

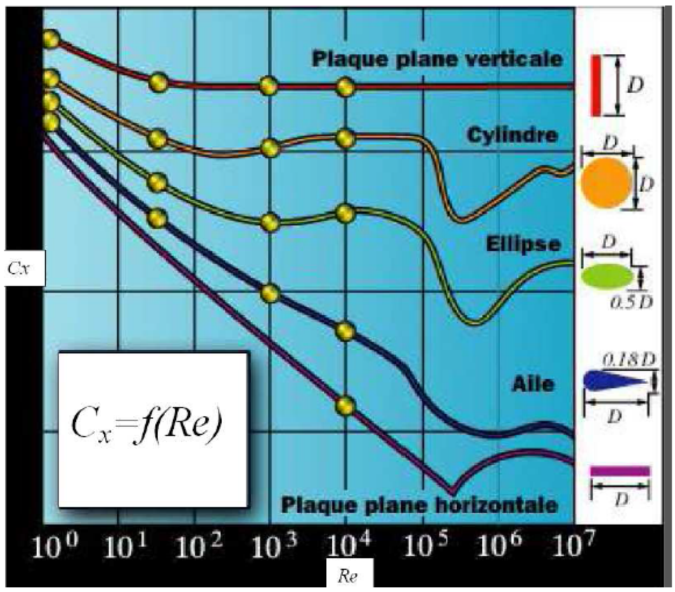


FIGURE 3 – $C_x = f(Re)$ pour différentes formes d'obstacles.

Variation de la courbe $C_x = f(Re)$ pour des rugosités différentes. *schéma*

La figure 4 représente l'influence de la rugosité d'un obstacle et du coefficient de Reynolds Re sur le coefficient de traînée C_x.

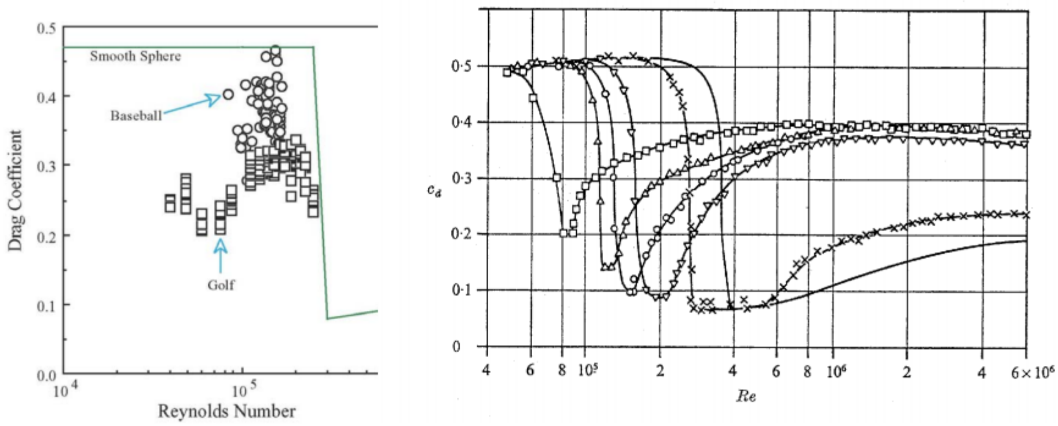


FIGURE 4 – Variation de la courbe $C_x = f(Re)$ pour des rugosités différentes.

Force de traînée et force de frottement fluide *s'y retrouver*

- A forte vitesse (nombre de Reynolds grand), le coefficient de traînée C_x est à peu près constant, donc $\vec{F}_{trainee} = -\beta v^2 \vec{u}_x$ si $Re \gg 1$.
- A faible vitesse (nombre de Reynolds petit), le coefficient de traînée C_x est inversement proportionnel à la vitesse, donc $\vec{F}_{trainee} = -\lambda \vec{v}$ si $Re \ll 1$.

II- Systèmes ouverts

1. Bilan de masse

Système ouvert : *s'y retrouver*

le système ouvert est défini comme le volume V délimité par une surface fermée Σ. Σ est fixe dans le référentiel d'étude au cours du temps.
Pour le système ouvert correspondant au volume V :

$$M_{ouvert} = \iiint_V \mathrm{d}^3 m = \iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3\tau$$

où μ est la masse volumique du fluide.

Passer d'un système ouvert à un système fermé *schéma*

La figure 5 représente un système ouvert et le système fermé qui le traverse.

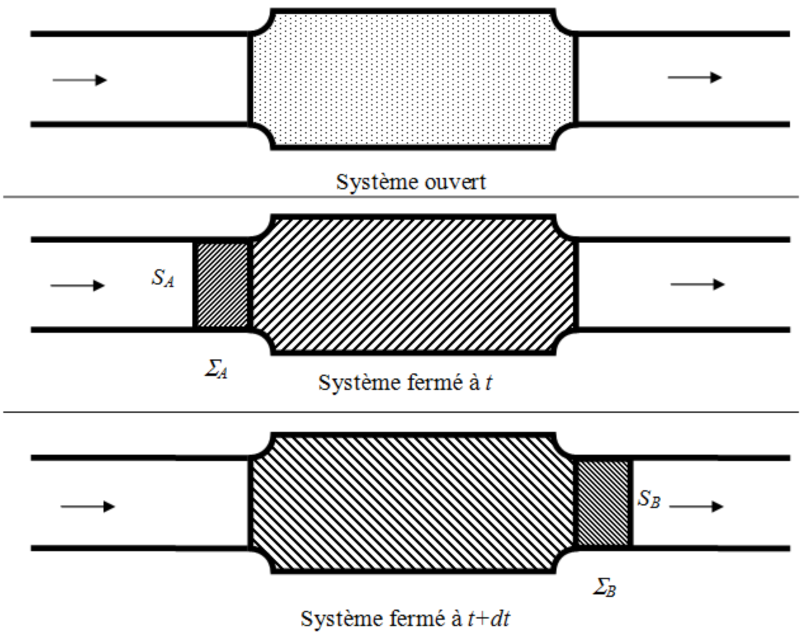


Figure 5 – Passer d'un système ouvert à un système fermé

Débits massique et volumique *définition*

le débit massique à travers une surface non fermée S orientée est :

$$D_m = \iint_S \mu \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

Il s'exprime en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. La masse δm qui passe à travers la surface pendant dt est telle que $D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t}$.
On aurait tout aussi bien pu définir le débit volumique à travers la surface orientée S :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

qui s'exprime en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

3 Débits pour un fluide incompressible *théorème*

La variation temporelle de M pour le système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t} = 0$$

où

- la variation temporelle de la masse M pour le système fermé : $\frac{\mathrm{d}M_{ferme}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$;
- la variation temporelle explicite de M pour le système ouvert : $\frac{\mathrm{d}M_{ouvert}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3\tau\right) = 0$, car $\mu = cste$;
- les flux entrant ($\frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t}$) et sortant ($\frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t}$) de masse qui ne sont rien d'autre que les débits massiques.

$\Rightarrow$
Dans le cas d'un fluide incompressible (liquide),

- le débit massique se conserve entre l'entrée et la sortie : $\frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} = D_m$
- ainsi que le débit volumique : $\frac{\delta V_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta V_s}{\mathrm{d}t} = D_V$.

4 Débits en régime permanent *théorème*

La variation temporelle de M pour le système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t} = 0$$

où

- la variation temporelle de la masse M pour le système fermé : $\frac{\mathrm{d}M_{ferme}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$;
- la variation temporelle explicite de M pour le système ouvert : $\frac{\mathrm{d}M_{ouvert}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \mu\, \mathrm{d}^3\tau\right) = 0$, car $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- les flux entrant $(\frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t})$ et sortant $(\frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t})$ de masse qui ne sont rien d'autre que les débits massiques.

$\Rightarrow$

Dans le cas d'un écoulement permanent, quel que soit le fluide (liquide ou gaz), le débit massique se conserve entre l'entrée et la sortie : $\frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} = D_m$.

2. Bilans de quantité de mouvement

Quantité de mouvement d'un système ouvert : *définition*

la quantité de mouvement du système ouvert de volume V est :

$$\vec{P} = \iiint_V \vec{v}\, \mathrm{d}^3m = \iiint_V \mu\, \vec{v}\, \mathrm{d}^3\tau$$

5 Bilan de quantité de mouvement : *théorème*

la variation temporelle de la quantité de mouvement du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \frac{\vec{P}_f(t+dt) - \vec{P}_f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

où $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de la quantité de mouvement du système ouvert et δm_s (respectivement δm_e) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant dt à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de la résultante cinétique impose par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures qui s'appliquent sur le système fermé coïncident. $\Rightarrow$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

6 Résultante des forces de pression *théorème*

un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de la part de son environnement. Sur l'élément infinitésimal $\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$ (orienté vers l'extérieur) s'exerce $\overrightarrow{\mathrm{d}^2F} = -P\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$.

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \overrightarrow{grad}P(M)\;\mathrm{d}^3\tau$$

Dans le cas statique, $\overrightarrow{grad}P = \mu\,\vec{g}$. Donc $\Rightarrow$
un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de résultante

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \mu(M)\,\vec{g}\;\mathrm{d}^3\tau$$

Dans le cas statique, la poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

remarque

La "force" de poussée n'est pas à prendre en compte dans le bilan des forces car elle apparaît naturellement dans le bilan de quantité de mouvement.

3. Bilan d'énergie

Energie cinétique d'un système ouvert : *définition*

l'énergie cinétique du système ouvert est :

$$E_c = \iiint_V \frac{v^2}{2}\,\mathrm{d}^3m = \iiint_V \frac{\mu\,v^2}{2}\,\mathrm{d}^3\tau$$

7 Bilan d'énergie cinétique : *théorème*

la variation temporelle de l'énergie cinétique du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \frac{E_{c_f}(t+dt) - E_{c_f}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de l'énergie cinétique du système ouvert et δm_s (respectivement δm_e) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où ΣP_{ext} est la somme des puissances des actions extérieures et ΣP_{int} est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système.
On admet que $\Sigma P_{int} = 0$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible. $\Rightarrow$

$$\Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où :

- la masse δm_e à l'entrée a une vitesse v_e,
- la masse δm_s à la sortie a une vitesse v_s,
- ΣP_{ext} est la somme des puissances des actions extérieures,
- et ΣP_{int} est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système ($\Sigma P_{int} = 0$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible).

savoirs culturels

Valeurs numériques (compléments)
Forces exercées par les fluides

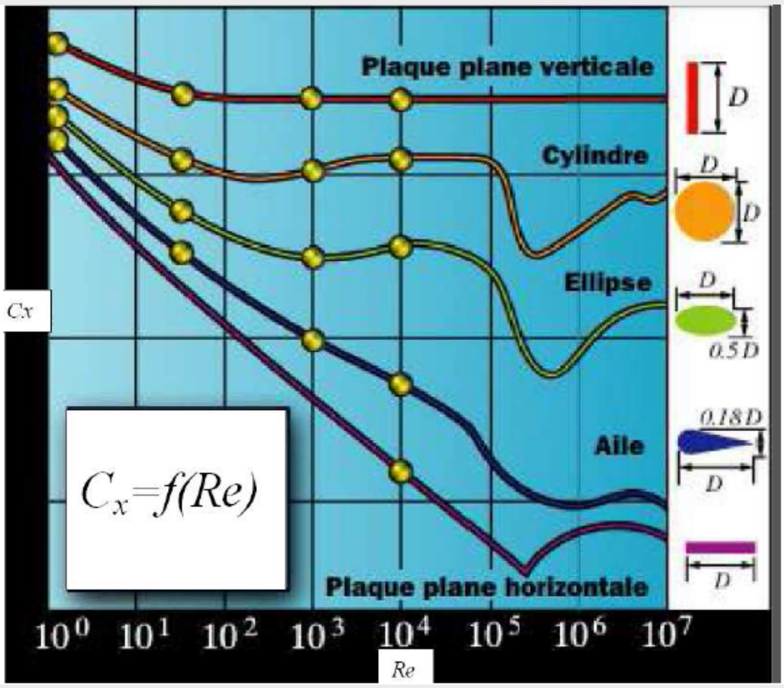
- pression atmosphérique dans les conditions « habituelles » : $P_{\text{atm}} = 10^5$ Pa.

Propriétés de l'air et de l'eau

dans les conditions « habituelles :

fluide	air	eau liquide
masse volumique μ en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$1,3$	10^3
viscosité dynamique η en Pl	18×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-3}$
viscosité cinématique ν en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	15×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-6}$

$C_x = f(Re)$ pour différentes formes d'obstacles



techniques pour exos

Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Bilans en mécanique des fluides

Calculs de débits

Il faut bien définir la surface et son orientation.
Il faut discerner débit massique ($D_m = \iint_S \mu.\overrightarrow{v}.\overrightarrow{d^2S}$) et débit volumique ($D_v = \iint_S \overrightarrow{v}.\overrightarrow{d^2S}$).

Faire un bilan de masse

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule la masse d'un système fermé est toujours constante (pas celle d'un système ouvert en régime non permanent) : $\frac{DM}{Dt} = 0$.

Faire un bilan de quantité de mouvement

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule la quantité d'un système fermé suit le théorème de la résultante cinétique : $\frac{D\vec{P}}{Dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$.
Attention à ne pas introduire dans le bilan des forces une force de poussée !
Ne pas oublier la résultante des forces de pression.

Faire un bilan d'énergie cinétique

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule l'énergie cinétique d'un système fermé suit le théorème de la puissance cinétique : $\frac{DE_c}{Dt} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \Sigma P_{ext}$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible.

exercice type

Exercice 13.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Bilans en mécanique des fluides

On s'intéresse à un jet d'eau de section S qui arrive, dans le référentiel du sol, avec une vitesse $\vec{v}_j = +v_j\,\vec{u}_x$ sur une plaque qui se déplace à la vitesse $\vec{v}_p$.

1) On considérera que l'eau repart dans un sens opposé ($-\vec{u}_x$) en conservant la section S du jet. En faisant un bilan de masse, déterminer

1.a) la vitesse de l'eau $\vec{v}_e$ incidente sur la plaque dans le référentiel de la plaque,

1.b) la vitesse de l'eau $\vec{v}'_s$ après choc sur la plaque dans le référentiel du sol.

2) On suppose que la pesanteur est négligeable et que la pression de l'eau est partout égale à la pression atmosphérique.

2.a) Calculer la résultante des forces de pression $\vec{\Pi}$.

2.b) En appliquant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\vec{F}_{j\to p}$ qu'applique le jet sur la plaque.

3) Etude énergétique

3.a) Faire un bilan d'énergie cinétique dans le référentiel de la plaque.

3.b) Calculer, dans le référentiel du sol, la puissance $P_{j\to p}$ de la force qu'applique le jet sur la plaque.

3.c) On pose $v_p = x\,v_j$. Déterminer le maximum de $P_{j\to p}$.

1) Bilan de masse.

1.a) Dans le référentiel R de la plaque, en déplacement à la vitesse $\vec{v}_p$, par rapport au référentiel R' du sol,

$$\vec{v}'_e = \vec{v}_e + \vec{v}_p = (v_e + v_p)\,\vec{u}_x = v_j\,\vec{u}_x \Rightarrow v_e = v_j - v_p$$

1.b) On se place dans le référentiel R de la plaque, en déplacement à la vitesse $\vec{v}_p$. Dans ce référentiel,

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le débit massique se conserve (fluide incompressible), aussi :

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}$$

Si on considère que la section du jet est constante,

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \mu\, v_e\, S = \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \mu\, v_s\, S \Rightarrow v_e = v_s \Rightarrow \vec{v}_e = +v_e\, \vec{u}_x = -\vec{v}_s = -v_s\, \vec{u}_x$$

Donc la vitesse de l'eau après choc avec la plaque est

$$\vec{v}_s' = \vec{v}_s + \vec{v}_p = (-v_e + v_p)\ \vec{u}_x = (-v_j + 2\, v_p)\ \vec{u}_x$$

2) Forces :

2.a) Un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de résultante

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\, \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \overrightarrow{grad} P(M)\ \mathrm{d}^3\tau = \vec{0}$$

qui est cohérent avec la poussée d'Archimède nulle car égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (on néglige la pesanteur !).

2.b) On se place dans le référentiel R de la plaque : la variation temporelle de la quantité de mouvement du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \frac{\vec{P}_f(t+dt) - \vec{P}_f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

où $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ est la variation temporelle de la quantité de mouvement du système ouvert et $\delta m_s = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$ (respectivement $\delta m_e = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de la résultante cinétique impose par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{\Pi} + \vec{F}_{p\to j} = -\vec{F}_{j\to p}$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures qui s'appliquent sur le système fermé coïncident.
Donc

$$-\vec{F}_{j\to p} = D_m\vec{v}_s - D_m\mathrm{d}t\vec{v}_e = \mu\, v_e\, S\, (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

Reste à revenir dans le référentiel R' du sol, où

$$\vec{v}_e' = \vec{v}_e + \vec{v}_p = \vec{v}_j \Rightarrow v_e = v_j - v_p$$

et

$$\vec{v}_s' = \vec{v}_s + \vec{v}_p = (-v_j + 2\, v_p)\, \vec{u}_x \Rightarrow \vec{v}_s = (-v_j + v_p)\, \vec{u}_x$$

aussi

$$\vec{F}_{j\to p} = \mu\, v_e\, S\, (\vec{v}_e - \vec{v}_s) = \mu\ (v_j - v_p)\, S\, (v_j - v_p - (-v_j + v_p))\, \vec{u}_x = 2\, \mu\, S\, (v_j - v_p)^2\, \vec{u}_x$$

3) Etude énergétique

3.a) Dans le référentiel de la plaque, la variation temporelle de l'énergie cinétique du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \frac{E_{c_f}(t+dt) - E_{c_f}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de l'énergie cinétique du système ouvert et $\delta m_s = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$ (respectivement $\delta m_e = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\Sigma P_{int} = 0$ est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système.
et $\Sigma P_{ext} = -\vec{F}_{j\to p} \cdot \vec{0}$ est la somme des puissances des actions extérieures car la vitesse de la plaque est nulle dans le référentiel de la plaque.
Comme $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0$ et $v_s = v_e$, on trouve $0 = 0$!

3.b) La puissance de la force $\vec{F}_{j\to p}$ qu'applique le jet sur la plaque est

$$P_{j\to p} = \vec{F}_{j\to p} \cdot \vec{v}_p = 2\,\mu\,S\,(v_j - v_p)^2\,v_p$$

3.c)

$$P_{j\to p} = \vec{F}_{j\to p} \cdot \vec{v}_p = 2\,\mu\,S\,v_j^3\,(1-x)^2\,x$$

On dérive $f(x) = x\,(1-x)^2$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (1-x)^2 - 2\,(1-x)\,x = (1-x)\,(1-x-2\,x) = (1-x)\,(1-3\,x)$$

qui s'annule pour $x = 1$ (minimum : $P_{j\to p} = 0$), ou $x = \frac{1}{3}$, qui est un maximum :

$$P_{max} = \frac{2}{3}\mu\,S\,v_j^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3\mu\,S\,v_j^3$$

application directe

Exercice 13.2 pour s'entraîner

Jet sur une plaque fixe

On s'intéresse à une plaque plane orthogonale à $\vec{u}_x$, immobile dans le référentiel du sol, sur laquelle arrive un jet d'eau à la pression atmosphérique (de masse volumique μ, de vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$, de section S et donc de débit massique $D_m = \mu.S.v_0$). Après contact avec la plaque, le jet est dévié d'un angle α, il garde la même section S, et la même pression. On néglige tous phénomènes de viscosité.

1) Déterminer la force $\vec{F}_{jet}$ exercée par le jet sur la plaque en régime permanent.

2) Montrer en particulier que si $\alpha = 0$ (le fluide repart dans la direction d'incidence),

$$\vec{F}_{jet} = 2.D_m.\vec{v}_0$$

1) On prend comme système la plaque et le fluide compris entre deux surfaces : S_e la surface d'entrée et S_s, la surface de sortie. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé coïncident donne :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{dt}\vec{v}_e$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures, qui prend en compte les forces de pression (de résultante nulle) et la force $\vec{F}_{support}$ due au support de la plaque. En régime permanent,

$$\vec{F}_{support} = D_m.\left(\vec{v}_s - \vec{v}_e\right)$$

où $\vec{v}_e = \vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ et $\vec{v}_s = v_0.\left(-\cos\alpha.\vec{u}_x + \sin\alpha.\vec{u}_y\right)$. Aussi, la force due au jet d'eau sur la plaque peut apparaître comme :

$$\vec{F}_{jet} = -\vec{F}_{support} = D_m.\left(\vec{v}_e - \vec{v}_s\right) = D_m.v_0\left((1+\cos\alpha).\vec{u}_x - \sin\alpha.\vec{u}_y\right)$$

2) Dans le cas où $\alpha = 0$ (le fluide part dans la direction d'incidence),

$$\vec{F}_{jet} = 2.D_m.\vec{v}_0$$

application directe

Exercice 13.3 pour s'entraîner
Jet sur une plaque mobile

Une plaque, perpendiculaire à la direction horizontale (Ox), est en translation, de vitesse constante $\vec{v} = v.\vec{e}_x$. Elle est « poussée » par un jet d'eau, dont la vitesse est $\vec{v}_i0 = v_0.\vec{e}_x$ et le débit massique D_m.

Un déflecteur dévie le jet d'un angle dont la valeur est α dans le référentiel de la plaque. Le jet garde une section uniforme, sa pression reste égale à la pression atmosphérique et on néglige toute viscosité.

1) Calculer le débit D'_m du jet dans le référentiel de la plaque.

2) Calculer la force exercée sur la plaque.

1) Le débit dans le référentiel du sol est $D_m = \mu.v_0.S$.
La vitesse du jet incident dans le référentiel de la plaque est $\vec{V_i} = (v_0 - v).\vec{e}_x$. Aussi le débit dans le référentiel de la plaque est $D'_m = \mu.V'.S = \mu.(v_0 - v).S$, soit :

$$D'_m = D_m.\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$$

2) Le référentiel de la plaque est galiléen. La conservation de l'énergie dans celui-ci implique que la norme de la vitesse de l'eau est constante (on ne tient pas compte de la pesanteur). La vitesse du jet émergent dans le référentiel de la plaque est $\vec{V_f} = (v_0 - v).[-\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y]$. Le système plaque + eau en contact avec le déflecteur est soumis à la pression atmosphérique de résultante nulle et à une force du support $\vec{F_s}$.

Un bilan de quantité de mouvement pour ce système donne : $\vec{F_s} = D'_m.\left(\vec{V_f} - \vec{V_i}\right)$.

On voit donc apparaître la force exercée par le jet : $\vec{F_s} = -\vec{F_j}$, soit

$$\vec{F_j} = D_m.\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)(v_0 - v).[(1 + \cos\alpha)\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_y]$$

application directe

Exercice 13.4 pour s'entraîner
Force sur une lance d'incendie

Un tuyau souple, de section S se termine par un embout dont la section terminale $s = 1cm^2$ est très petite devant S.

La pression dans le tuyau est $P_1 = 10bar$ et le jet sort dans l'atmosphère à la pression $P_0 = 1bar$. L'embout fait un angle droit avec la partie antérieure du tuyau.

La vitesse du jet sera supposée très grande devant la vitesse du fluide dans le tuyau.

1) L'eau étant assimilée à un fluide partait, calculer le débit massique D_m

2) Calculer F_y, la composante parallèle au jet de la force $\vec{F}$ exercée par la personne qui tient la lance.

1) $D_m = \mu.s.v_{jet} = \mu.S.v_{tuyau}$. Comme $S \gg s$, $v_{jet} \gg v_{tuyau}$.
Le fluide étant parfait, on peut calculer le débit en utilisant ta relation de Bernouilli :
$\frac{v_{jet}^2}{2} + \frac{P_0}{\mu}\frac{v_{tuyau}^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} \approx \frac{P_1}{\mu}$.
Aussi, $v_{jet} \approx \sqrt{2\frac{P_1 - P_0}{\mu}}$, d'où :

$$D_m = s.\sqrt{2.\mu(P_1 - P_0)} = 4,2kg.s^{-1}$$

2) Les forces appliquées sur le système formé par l'embout, le coude du tuyau et le fluide sont :

- $\vec{F}$ la force à exercer sur l'extrémité du tuyau,
- $\vec{F'}$ les forces de cohésion du tuyau en amont (suivant $\vec{e}_x$),
- $(P_1 - P_0).S\vec{e}_x$ les forces de pression suivant l'axe du tuyau,
- $(P_0 - P_0).s\vec{e}_y$ les forces de pression suivant le jet,

Le bilan de quantité de mouvement appliqué à ce système donne :
$\vec{F} + \vec{F}' + (P_1 - P_0).S\vec{e}_x = D_m.(\vec{v}_{jet} - \vec{v}_{tuyau}) \approx D_m.\vec{v}_{jet}$.
En projetant suivant $\vec{e}_y$, on trouve $F_y = D_m.v_{jet} = \mu.s.v_{jet}^2$. On en déduit :

$$F_y = 2(P_1 - P_0).s = 180N$$

application directe

Exercice 13.5 pour s'entraîner

Force de poussée subie par une fusée

Une fusée, dont la masse à l'instant t est m éjecte vers l'arrière les gaz issus de la combustion du carburant et du comburant qu'elle contient. On suppose qu'elle est en translation, de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel d'étude, galiléen, et que la vitesse $\vec{u}$ des gaz éjectés dans le référentiel de la fusée est uniforme et constante. D_m représente leur débit massique.

1) Calculer la poussée de la fusée, c'est-à-dire la force $\vec{F}_p$ qu'il faudrait appliquer à un système fermé soumis aux mêmes forces extérieures pour obtenir la même accélération.

1) On se place dans le référentiel non galiléen de la fusée. Soit le système ouvert constitué par la fusée, le carburant et les gaz qu'elle contient, et le système fermé coïncident. Ce système est soumis à une force d'interaction $\vec{F}$ (pesanteur, frottements, etc.) Sa quantité de mouvement est constante, le bilan de quantité de mouvement donne : $\vec{F} + \vec{F}_i = D_m.\vec{u}$ (il n'y a pas de flux entrant). Aussi :

$$\vec{F}_p = -D_m.\vec{u}$$

application directe

Exercice 13.6 pour s'entraîner

Puissance d'une pompe

Une pompe aspire l'eau d'un puits, et la transvase dans un réservoir pressurisé avec un débit massique D_m constant. Le niveau supérieur de l'eau dans le réservoir est à une altitude h au-dessus de celui du puits, et la pression y est égale à P_1, supérieure à la pression atmosphérique P_0. On néglige toute viscosité.

1) Calculer la puissance utile P_u fournie par la pompe au fluide.

1) On effectue un bilan d'énergie mécanique pour le système constitué par l'eau comprise à l'instant t, dans un tube de courant qui relie la surface supérieure du puits à celle du réservoir.

Les énergies cinétiques entrante et sortante sont négligeables.

L'énergie potentielle massique entrante est nulle en prenant l'origine des énergies potentielles au niveau de la surface du puits. L'énergie potentielle massique sortante est égale à $g.h$.

Le régime étant permanent l'énergie mécanique du système ouvert ne varie pas.

La puissance des force de pression est $P_p = (P_0 - P_1)\frac{D_m}{\mu}$.

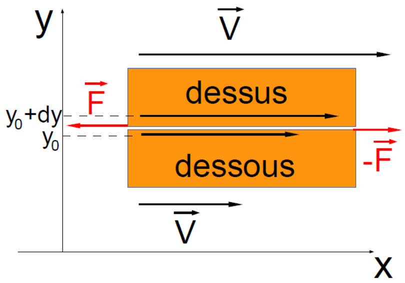
Conclusion :

$$P_u = D_m.\left(g.h + \frac{P_1 - P_0}{\mu}\right)$$

techniques pour exos

Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Forces de cisaillement



La force de viscosité exercée par la veine rapide (pour $y > y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine lente (pour $y < y_0$) est

$$F_x = +\eta\, S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

La contrainte tangentielle σ exercée sur le plan solide de cote $y = y_0$ est

$$\sigma = \eta \left(\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y}\right)_{y=y_0}$$

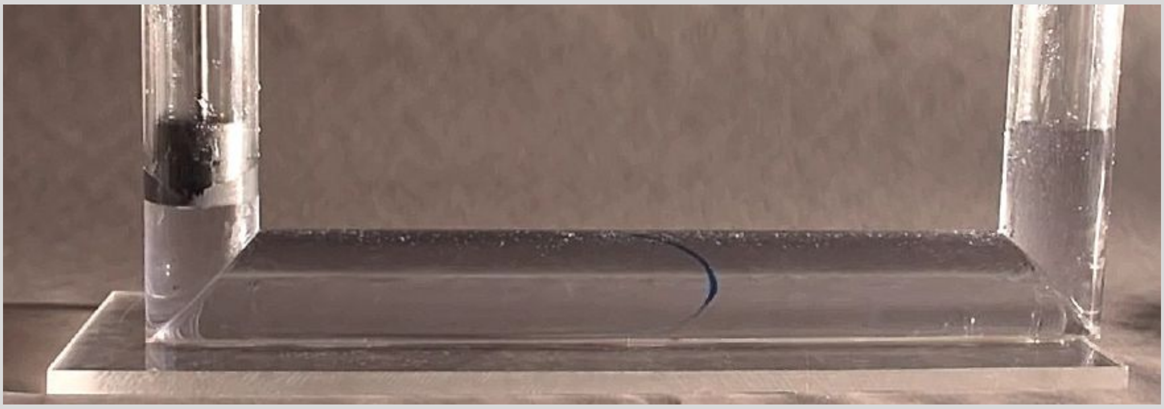
Utilisation des forces de cisaillement

On peut :

- partir d'un écoulement que l'on connaît (la donnée du champ de vitesse $\vec{v}$) pour en déduire la force exercée sur un solide par exemple. Dans ce cas, on doit retrouver la force de trainée.
- faire un bilan des forces exercées sur une portion de fluide pour déterminer avec le théorème de la quantité de mouvement (ou du moment cinétique) le champ de vitesse $\vec{v}$.

exercice type

Exercice 13.7 (le prof fait cet exercice type jeudi)
Forces surfaciques dans les fluides visqueux



Un fluide visqueux de coefficient de viscosité dynamique η est compris dans un cylindre horizontal d'axe Oz, de rayon R, entre A et B. On se place dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z). On suppose que le problème est à symétrie de révolution : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.
On suppose que la pression ne dépend que de z. On note P_A la pression en $z = z_A$. De même, $P_B = P(z = L)$.
Le gradient de pression est homogène, de sorte que $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{P_B - P_A}{L} < 0$.
On suppose l'écoulement stationnaire et ne dépend que de r : $\vec{v} = v_z(r)\,\vec{u}_z$. On néglige la pesanteur.

1) Etude du fluide
On s'intéresse à une portion de fluide, cylindre creux de hauteur h, de rayon intérieur r, de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$.

1.a) Faire le bilan des forces.
1.b) Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à ce système.
1.c) En déduire le champ de vitesse de cet écoulement de Poiseuille cylindrique :

$$v_z(r) = \frac{P_B - P_A}{L} \frac{r^2 - R^2}{4\,\eta}$$

2) Etude du solide
2.a) En partant de ce champ de vitesse, déterminer la force exercée par le fluide sur le tuyau solide de rayon R et de longueur L.
2.b) Retrouver ce résultat en faisant un bilan de quantité de mouvement pour le système ouvert défini par le tuyau.

1) Etude du fluide

1.a) Bilan des forces :

- force de pression à gauche : $+P(z)\,2\pi\,r\;\mathrm{d}r\,\vec{u}_z$;
- force de pression à droite : $-\left(P(z)+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}h\right)\;2\pi\,r\;\mathrm{d}r\,\vec{u}_z$;
- force de viscosité à l'intérieur : $-\eta\,2\pi\,r\,h\,\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_r\vec{u}_z$;
- force de viscosité à l'extérieur : $+\eta\,2\pi\;(r+\mathrm{d}r)\;h\;\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r+\mathrm{d}r}\vec{u}_z$.

1.b) Théorème de la quantité de mouvement :

- à t : $\mathrm{d}\overrightarrow{P}(t)=2\pi\,r\;\mathrm{d}r\,h\,\mu\,v_z(r)\vec{u}_z$;
- à $t+\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}\overrightarrow{P}(t+\mathrm{d}t)=2\pi\,r\;\mathrm{d}r\,h\,\mu\,v_z(r)\vec{u}_z$.

La quantité de mouvement n'a pas varié donc la somme des forces est nulle.

1.c) On en déduit par projection des forces sur $\vec{u}_z$:

$$0=-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}h\,2\pi\,r\;\mathrm{d}r+\mathrm{d}\left(\eta\,2\pi\,r\,h\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

soit

$$\mathrm{d}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}r\;\mathrm{d}r$$

qu'on intègre :

$$r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{r^2}{2\,\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}+B\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\frac{r}{2\,\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}+\frac{B}{r}$$

qu'on intègre à nouveau :

$$v=-\frac{r^2}{4\,\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}+B\;\ln(r)+C$$

Les conditions en $r=0$ (v ne diverge pas) et en $r=R$ ($v=0$) donnent l'écoulement de Poisseuille cylindrique :

$$v_z(r)=\frac{P_B-P_A}{L}\frac{r^2-R^2}{4\,\eta}$$

2) Etude du solide

2.a) La force exercée par le fluide sur le tuyau solide de rayon R et de longueur L est

$$\vec{F}=-\eta\,2\pi\,R\,L\,\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}\vec{u}_z=\frac{-\eta\,2\pi\,R\,L}{4\,\eta}\frac{P_B-P_A}{L}\left(\frac{\mathrm{d}\left(r^2-R^2\right)}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}\vec{u}_z$$

soit $\vec{F}=\pi\,R^2\,(P_A-P_B)\,\vec{u}_z$

2.b) Ce qu'on aurait pu trouver en faisant un bilan de quantité de mouvement sur le système ouvert :

- à t : $\vec{P}_{\text{fermé}}(t)=\vec{P}_{\text{ouvert}}(t)+D_m\;\mathrm{d}t\,\vec{v}_{\text{entrée}}$;
- à $t+\mathrm{d}t$: $\vec{P}_{\text{fermé}}(t+\mathrm{d}t)=\vec{P}_{\text{ouvert}}(t+\mathrm{d}t)+D_m\;\mathrm{d}t\,\vec{v}_{\text{sortie}}$.

Soit une variation

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\text{fermé}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\vec{P}_{\text{ouvert}}}{\partial t}+D_m\;(\vec{v}_{\text{sortie}}-\vec{v}_{\text{entrée}})=\vec{0}=\Sigma\vec{F}_{\text{ext}}$$

Or le bilan des forces exercées sur le fluide est :

- force de pression à gauche : $+P_A\,\pi\,R^2\,\vec{u}_z$;
- force de pression à droite : $-P_B\,\pi\,R^2\,\vec{u}_z$;
- force du tube sur le fluide : $-\vec{F}$.

On retrouve donc bien $\vec{F}=\pi\,R^2\,(P_A-P_B)\,\vec{u}_z$.

application directe

Exercice 13.8 pour s'entraîner

Contrainte exercée par un ruissellement laminaire

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale sur une hauteur δ constante. On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\left(2.\delta - z\right).z.\vec{u}_x$$

où $\vec{u}_z$ est orthogonal à l'écoulement (et donc au plan incliné), orienté depuis le plan vers le liquide.

1) Quelle est la contrainte tangentielle σ exercée sur le plan incliné ?

1) La contrainte tangentielle σ exercée sur le plan incliné est $\sigma = \eta\left(\frac{dv(z)}{dz}\right)_{z=0}$ or

$$\left(\frac{dv(z)}{dz}\right) = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\left(2.\delta - 2.z\right)$$

soit

$$\sigma = \mu.g.\sin\alpha.\delta$$

qui ne dépend pas de la viscosité du fluide, mais uniquement de la pesanteur qui met en mouvement le fluide.

application directe

Exercice 13.9 pour s'entraîner

Contrainte exercée par le déplacement d'une plaque dans un fluide

Soient deux grandes plaques parallèles, l'espace entre les plaques étant rempli d'un fluide donné. La plaque inférieure (en $y = 0$) est fixe, tandis que la plaque supérieure (en $y = \Delta y$) est entraînée par une force constante $\vec{F_0} = F_0.\vec{u}_x$, et on constate qu'elle est animée d'une vitesse constante $\vec{V} = V.\vec{u}_x$.

Il s'exerce donc sur la plaque une force, dirigée parallèlement à la plaque et opposée à $\vec{F_0}$: c'est la force de viscosité, notée $\vec{F}$.

Le fluide en contact avec la plaque supérieure va y adhérer et va donc être animé de la vitesse $\vec{V} = V.\vec{u}_x$, tandis que le fluide en contact avec la plaque fixe aura une vitesse nulle. La vitesse d'écoulement au sein du fluide est en tout point parallèle à l'axe Ox, mais son module dépend de la cote y : $\vec{v} = v_x(y).\vec{u}_x$.

Si la distance y et la vitesse V ne sont pas trop grandes, on constate que le profil des vitesses est une droite.

1) Exprimer $\frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Les expériences ont d'autre part montré que la force F_0 à exercer sur la plaque supérieure pour l'entraîner à la vitesse constante V, varie proportionnellement avec la surface de la plaque, avec la vitesse V et inversement avec Δy.

2) Déterminer la force de viscosité exercée par la veine lente (pour $y < y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine rapide (pour $y > y_0$).

1)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V}{\Delta y}$$

2)

$$F_x = -\eta.S\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta.S\frac{V}{\Delta y}$$

application directe

Exercice 13.10 pour s'entraîner

Contrainte exercée par un écoulement de Poiseuille cylindrique

On considère un écoulement de Poiseuille permanent dans un tube cylindrique d'axe Oz, de section circulaire et de rayon R :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\,\eta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Déterminer la projection des forces de cisaillement.

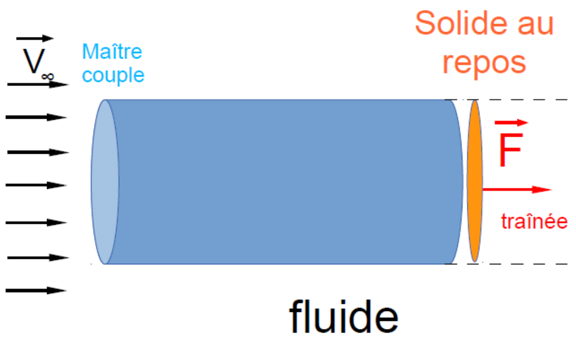
La projection des forces de cisaillement est :

$$\sigma(r) = \frac{r}{2}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

techniques pour exos

Traînée



La force de trainée, due à la viscosité, est de la forme :

$$\vec{F}_{trainee} = C_x \frac{\mu\, v_\infty^2\, S}{2} \vec{u}_x$$

où

- la vitesse du solide est $-v_\infty\, \vec{u}_x$;
- S est le maître-couple ;
- μ est la masse volumique du fluide où est immergé le solide ;
- C_x est un coefficient sans dimension qui dépend de la géométrie du solide et du nombre de Reynolds.

Suivant la valeur du nombre de Reynolds, on discerne trois comportements :

- si $Re < 1$, $C_x \propto \frac{1}{Re}$, la force exercée par le fluide sur le solide est proportionnelle à la vitesse du solide dans le fluide ;
- si $Re \in \left[10^3 ; 10^5\right]$, $Cx \approx cst$, la force exercée par le fluide sur le solide est proportionnelle au carré de la vitesse du solide dans le fluide ;
- autour de $Re \approx 5 \times 10^5$, C_x chute brusquement.

Portance

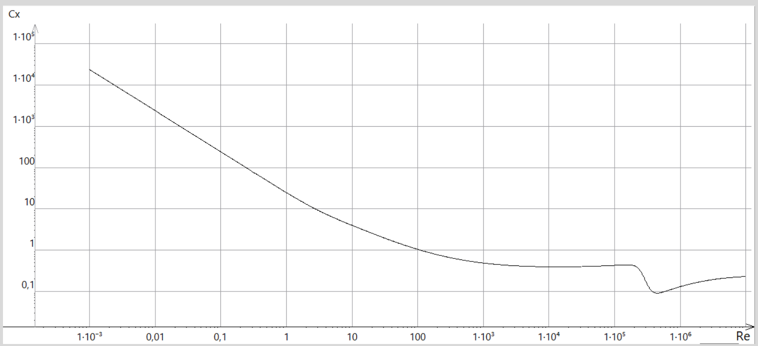
La force de portance, due aux forces de pression exercées sur le solide, est orthogonale au déplacement du solide selon $\vec{u}_x$ (pas toujours verticale !)

exercice type

Exercice 13.11 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Forces surfaciques dans les fluides parfaits

1) Force de traînée sur une balle



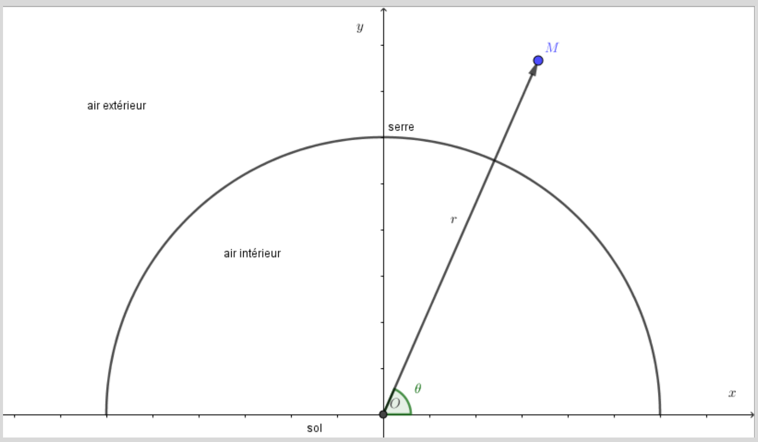
Grâce à la courbe donnée, déterminer l'expression numérique de $C_x = f(\text{Re})$ et en déduire l'expression de la force de traînée $\vec{F}_f$ dans les domaines suivants :

1.a) Re < 1 (force de Stokes) ;

1.b) Re $\in \left[10^3 ; 10^5\right]$;

1.c) dans le cas réel d'un ballon de football.

2) Force de portance sur une serre



On s'intéresse à une serre hémisphérique d'axe Oz, de rayon R. Dans le repère cylindrique, θ est compté à partir de l'axe Ox le long du sol. La vitesse de l'air loin de la serre est $V_\infty\ \vec{u}_x$.

On admet que la pression intérieure est $p_{int} = p_\infty + \frac{\mu V_\infty^2}{2}$ et la pression extérieure est $p_{ext} = p_\infty + \frac{\mu V_\infty^2}{2}\left[1 - 4\,\sin^2(\theta)\right]$.

Déterminer la force exercée par l'air sur la serre :

2.a) sa traînée ;

2.b) sa portance.

1) Force sur le ballon

1.a) Re < 1 : $\log C_x = a \log \mathrm{Re} + b$ avec
$a = -1$
$C_x = 24$ si Re $= 1$ Donc

$$C_x = \frac{24}{\mathrm{Re}} = \frac{12\,\eta}{R\,v\,\mu} \Rightarrow \vec{F}_f = -\frac{1}{2}\mu\,v^2\,\pi\,R^2\,\frac{12\,\eta}{R\,v\,\mu}\vec{u}_x = -6\pi\,\eta\,R\,\vec{v}$$

1.b) Re $\in \left[10^3; 10^5\right]$: $\log C_x = 0,5$. Donc

$$C_x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \vec{F}_f = -\frac{1}{4}\mu\,v^2\,\pi\,R^2\,\vec{u}_x$$

1.c) Pour le foot, on peut lancer le ballon à 30 ou 40 m. On intègre sans le frottement fluide :

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -g\,t + v_0\,sin\theta \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,sin\theta\,t$$

et

$$\dot{x} = v_0\,\cos\theta \Rightarrow x = v_0\,\cos\theta\,t$$

Donc comme $z = \frac{-g\,x^2}{2\,v_0^2\,\cos\theta} + x\,\tan\theta$. La portée est telle que $z = 0$, soit $x = 0$ (départ) et $x \approx \frac{v_0^2}{g}$ donc $v_0 \approx \sqrt{g\,p} = \sqrt{10 \times 40} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. D'où

$$\mathrm{Re} = \frac{2\,R\,v\,\mu}{\eta} = \frac{2 \times 0,1 \times 20 \times 1}{18 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^5$$

On se trouve donc dans le dernier cas, comme le disait le document.

2) Force sur la serre

2.a) $\vec{F}$ est la somme de la force de traînée (nulle car le fluide est parfait !) et de la force de portance (verticale, vers le haut).

2.b) Une bande de longueur L de largeur $R.d\theta$ découpée sur la paroi de la serre est soumise à une force élémentaire

$$\overrightarrow{d^2F} = (p_{int} - p_{ext})\,\overrightarrow{d^2S} = 2.\mu.V_\infty^2.\sin^2(\theta)L.R.d\theta.\vec{u}_r$$

Pour obtenir la force totale, il suffit d'intégrer, sans tomber dans le piège classique, à savoir que $\vec{u}_r$ n'est pas un vecteur constant mais dépend de θ : $\vec{u}_r = \cos\theta.\vec{u}_x + \sin\theta.\vec{u}_y$. On a donc

$$\vec{F} = 2.\mu.V_\infty^2.L.R.\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2(\theta).\cos\theta.d\theta.\vec{u}_x + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3(\theta).d\theta.\vec{u}_y\right)$$

Le calcul donne :

$$\vec{F} = \frac{8}{3}.\mu.V_\infty^2.L.R.\vec{u}_y$$

application directe

Exercice 13.12 pour s'entraîner

Force exercée sur une seringue

Une seringue est formée d'un corps de section constante S_1 et d'une aiguille dont l'extrémité a une section $S_2 \ll S_1$. Cette seringue contient un liquide de masse volumique μ qui est éjecté en appuyant sur un piston mobile sans frottements.

1) Quelle force un opérateur doit-il exercer sur le piston pour assurer un débit volumique D d'éjection ?

1) Le débit volumique est $D = S_1.v_1 = S_2.v_2$, où v_1 est la vitesse du fluide au contact du piston et v_2 à l'orifice de l'aiguille.

L'écoulement entre A et B peut être considéré comme stationnaire. On peut appliquer la formule de Bernouilli le long de la ligne de courant entre A et B : $\frac{v_1^2}{2} + g.z_1 + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + g.z_2 + \frac{P_2}{\mu}$.

Or $z_1 = z_2$, $P_2 = P_{atm}$ et $P_1 = P_{atm} + \Delta P$.

Aussi, $\frac{D^2}{2.S_1^2} + \frac{\Delta P}{\mu} = \frac{D^2}{2.S_2^2}$. soit $\Delta P = \mu.D^2.\left(\frac{1}{2.S_2^2} - \frac{1}{2.S_1^2}\right)$.

La force exercée est $F = \Delta P.S_1$, d'où :

$$F = \frac{\mu.D^2}{2.S_1}.\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)$$

techniques de maths

Techniques mathématiques à maîtriser

Utilisation de formules d'analyse vectorielle

Formules locales de dérivation d'une somme

$$\vec{\nabla}(U+V)=\vec{\nabla}U+\vec{\nabla}V$$
$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\nabla}\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

Formules locales de dérivation d'un produit

$$\vec{\nabla}(U.V)=\left(\vec{\nabla}U\right).V+U.\left(\vec{\nabla}V\right)$$
$$\vec{\nabla}\left(U.\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}U\right).\vec{A}+U.\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(U.\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}U\right)\wedge\vec{A}+U.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right).\vec{B}-\vec{A}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right).\vec{A}-\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right).\vec{B}+\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A}-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\vec{A}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)+\vec{B}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)+\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B}+\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A}$$

Formules locales de double dérivation

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{0}\ \ \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=0$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right)=\nabla^2U\ \ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\nabla^2.\vec{A}$$

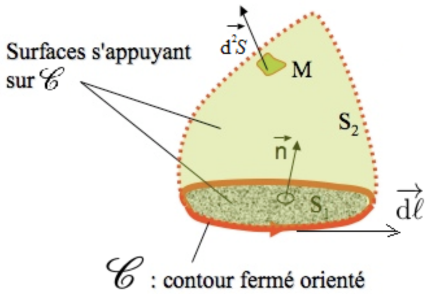
Formules intégrales pour une surface S délimitée par un contour fermé $\mathscr{C}$

Formule de Stokes :

$$\oint_{\mathscr{C}}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell}=\iint_S\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$$

Formule de Kelvin :

$$\oint_{\mathscr{C}}f\,\vec{\mathrm{d}\ell}=\iint_S\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}\wedge\overrightarrow{grad}(f)$$



Formules intégrales pour un volume V délimité par la surface fermée Σ

Formule d'Ostrogradsky :

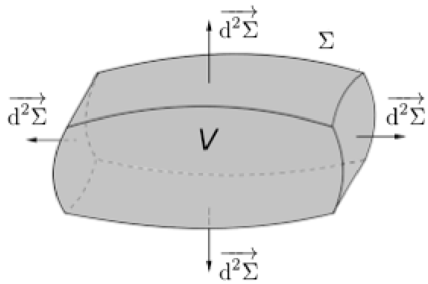
$$\oiint_\Sigma\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}=\iiint_V div\left(\vec{A}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Formule du gradient :

$$\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{d^2\Sigma}=\iiint_V\overrightarrow{grad}(f)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Formule du rotationnel :

$$\oiint_\Sigma\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\wedge\vec{A}=\iiint_V\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$



exercice de maths

Exercice 13.13 pour s'entraîner
Démonstration de la formule de Kelvin

1) En utilisant, dans la formule de Stokes, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule de Kelvin.

1) On applique la formule de Stokes avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$:

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\vec{K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$$

Or

$$\overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla}\wedge\left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} + f.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} = \overrightarrow{grad}f\wedge\vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est uniforme. On remplace :

$$\vec{K}\cdot\left[\oint_{\mathscr{C}} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\right] = \iint_S \left(\overrightarrow{grad}f\wedge\vec{K}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} = \left[\iint_S \left(\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}\wedge\overrightarrow{grad}f\right)\right]\cdot\vec{K}$$

par permutation circulaire. Cette dernière relation est vraie pour $\vec{K} = \vec{u}_x$, ou $\vec{u}_y$ ou encore $\vec{u}_z$. Donc la relation de Kelvin :

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{d}^2S}\wedge\overrightarrow{grad}\,(f)$$

est vérifiée.

exercice de maths

Exercice 13.14 pour s'entraîner
Démonstration de la formule du gradient

1) En utilisant, dans la formule d'Ostrogradsky, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule du gradient.

1) On applique la formule d'Ostrogradsky avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$:

$$\oiint_\Sigma f\,\vec{K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = \iiint_V div\left(f\,\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Or

$$div\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{K} + f\left(\vec{\nabla}\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{K} = \overrightarrow{grad}f\cdot\vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est uniforme. On remplace :

$$\vec{K}\cdot\left[\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\right] = \iiint_V \overrightarrow{grad}f\cdot\vec{K}\,\mathrm{d}^3\tau = \left[\iiint_V \overrightarrow{grad}f\,\mathrm{d}^3\tau\right]\cdot\vec{K}$$

Cette dernière relation est vraie pour $\vec{K} = \vec{u}_x$, ou $\vec{u}_y$ ou encore $\vec{u}_z$. Donc la formule du gradient :

$$\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = \iiint_V \overrightarrow{grad}f\,\mathrm{d}^3\tau$$

est vérifiée.

exercice de maths

Exercice 13.15 pour s'entraîner
Démonstration de la formule du rotationnel

1) En utilisant, dans la formule du gradient, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule du rotationnel.

1) On calcule

$$\iiint_V \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \iiint_V \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Or

$$\overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla}\wedge\left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} + f\,\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} = \overrightarrow{grad}\,(f)\wedge\vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est homogène. En remplaçant,

$$\iiint_V \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \iiint_V \left(\overrightarrow{grad}\,(f)\wedge\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \left(\iiint_V \overrightarrow{grad}f\,\mathrm{d}^3\tau\right)\wedge\vec{K}$$

Or, d'après la formule du gradient avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$,

$$\left[\iiint_V \overrightarrow{grad}\,(f)\,\mathrm{d}^3\tau\right]\wedge\vec{K} = \left[\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\right]\wedge\vec{K} = \oiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\wedge f\,\vec{K}$$

qui donne

$$\iiint_V \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \oiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\wedge f\,\vec{K}$$

Donc la formule du rotationnel :

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\wedge\vec{A} = \iiint_V \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$

est vérifiée.

exercice de maths

Exercice 13.16 pour s'entraîner

Rotationnel d'un gradient

1) Montrer que le rotationnel d'un gradient est nul :

1.a) en utilisant des formules locales de double dérivation,

1.b) en utilisant des formules intégrales.

1)

1.a)

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$$

grâce à la nullité du produit vectoriel d'un vecteur ($\vec{\nabla}$) avec lui-même.

1.b) On utilise la formule de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{grad}\,(f)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}f = [f]_A^A = 0\forall S$$

ce qui assure que $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \vec{0}$.

exercice de maths

Exercice 13.17 pour s'entraîner

Divergence d'un rotationnel

1) Montrer que la divergence d'un rotationnel est nulle :

1.a) en utilisant des formules locales de double dérivation,

1.b) en utilisant des formules intégrales.

1)

1.a)

$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\vec{0}$$

grâce à l'orthogonalité du produit vectoriel avec un vecteur ($\vec{\nabla}$) le composant.

1.b) On utilise la formule d'Ostrogradsky :

$$\iiint\limits_{V} div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau=\oiint\limits_{\Sigma}\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$$

Si maintenant on décompose la surface fermée Σ en deux surfaces S_1 et S_2 :

$$\iiint\limits_{V} div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau=\iint\limits_{S_1}\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S_1}+\iint\limits_{S_2}\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S_2}$$

la formule de Stokes nous donne :

$$\iiint\limits_{V} div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau=\oint_{\mathscr{C}_1}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell_1}+\oint_{\mathscr{C}_2}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell_2}$$

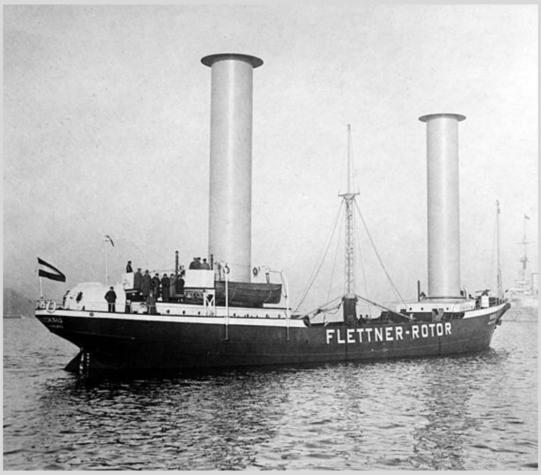
où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les mêmes contours fermés, mais orientés dans des sens opposés ! Donc :

$$\iiint\limits_{V} div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau=0\forall V$$

ce qui assure que $div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)=0$.

exercice de colle

Exercice 13.18
Effet Magnus pour un cylindre qui tourne



D'après l'article wikipédia sur l'effet magnus, ce dernier a été utilisé avec de gros cylindres verticaux en rotation sur des bateaux afin de produire une poussée par le vent.
Ainsi, l'Allemand Anton Flettner fit transformer le schooner trois mâts Buckau et acquit avec lui une première expérience avec ce principe de propulsion. Après plusieurs essais par différentes conditions de vent, le Buckau rebaptisé Baden-Baden traversa l'Atlantique et rallia New York le 9 mai 1926.
L'océanographe Jacques-Yves Cousteau fit construire l'Alcyone au début des années 1980. Ses deux cylindres fournissaient environ 25 à 30 % de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice. Le navire fit son premier voyage en 1985.

Un écoulement permanent et incompressible, au voisinage d'un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a, en rotation autour de son axe fixe avec la pulsation ω a pour champ de vitesse :

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \vec{u}_r + \left[-v_0 \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{a^2\,\omega}{r}\right] \vec{u}_\theta$$

1) Calculer la circulation Γ du champ des vitesses du fluide le long d'un cercle quelconque entourant le cylindre.

2) Déterminer la pression $P(a,\theta)$ en tout point du cylindre

3) En déduire la force exercée par le fluide sur le cylindre de longueur h.

4) Calculer la circulation Γ du champ des vitesses du fluide le long d'un cercle quelconque entourant le cylindre et exprimer la force précédente en fonction de Γ.

exercice de colle

Exercice 13.19
Une serre sous la tempête


Soit un repère cartésien, Oy étant vertical, vers le haut, et Ox étant l'origine des angles θ dans un repère cylindrique d'axe Oz.

Une serre est protégée par une sorte de toiture en forme de demi-cylindre horizontal d'axe Oz, de longueur L grande devant son rayon R.

Une violente tempête engendre un vent qui, loin de la serre est horizontal, de vitesse $V_\infty \vec{u}_x$. On admettra que la pression loin de la serre est uniforme et on la note p_∞ ainsi que la vitesse : $V_\infty \vec{u}_x$. On note aussi μ la masse volumique de l'air, que l'on supposera parfait. On néglige l'influence de la pesanteur.

1) L'écoulement est pratiquement incompressible, permanent et irrotationnel, de sorte que le champ de vitesse soit le gradient d'une fonction ϕ qui, en coordonnées cylindriques, est cherchée sous la forme suivante, indépendante de z :

$$\phi(r,\theta) = \cos(\theta)\left(A\,r + \frac{B}{r}\right)$$

où A et B sont des constantes.

1.a) En déduire l'expression du champ de vitesse dans le repère cylindrique.

1.b) Déterminer A et B grâce aux conditions aux limites.

2) On admet qu'un manque (nécessaire) d'étanchéité impose que la pression intérieure à la serre est celle du point au pied de la serre du côté "au vent" (à l'opposé du vent).

2.a) Déterminer la pression p en tout point de l'espace extérieur à la serre.

2.b) Déterminer les pressions intérieure et extérieure (au niveau de la paroi de la serre).

3) Force résultante

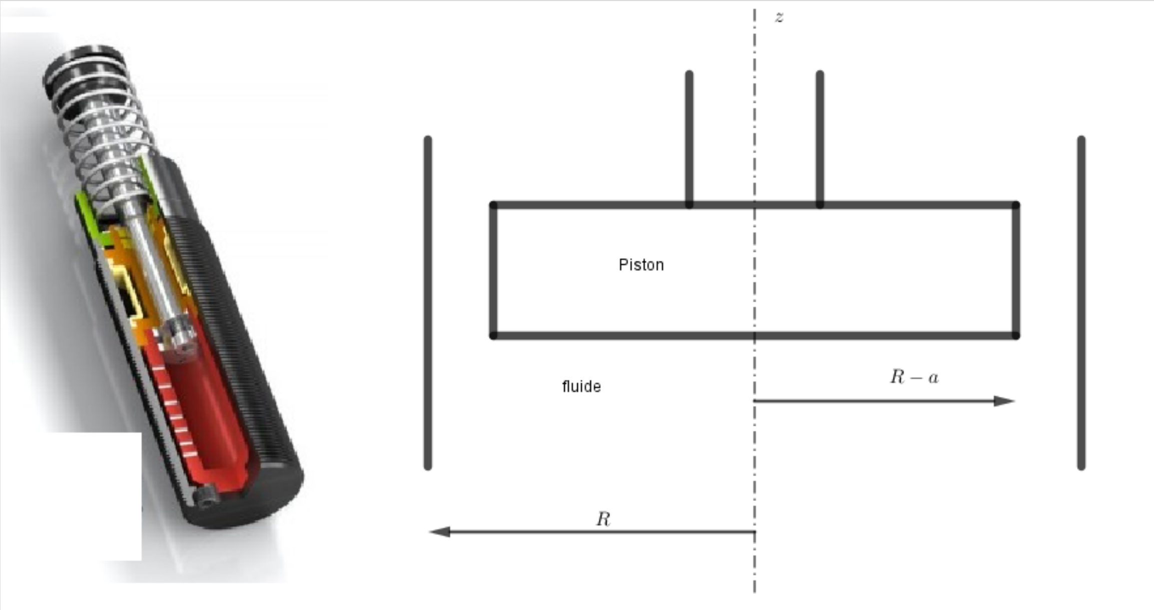
3.a) Sans aucun calcul, déterminer la direction de la force résultante $\vec{F}$ exercée par l'air sur la serre.

3.b) Par le calcul, déterminer l'expression de $\vec{F}$.

3.c) Effectuer une application numérique de $\|\vec{F}\|$ avec $p_\infty = 10^5$ Pa, $\mu = 1{,}3$ kg $\cdot$ m^{-3}, $V_\infty = 144$ km $\cdot$ h^{-1}, $R = 2$ m et $L = 10$ m. Conclure.

exercice de colle

Exercice 13.20
Amortisseur hydraulique



On s'intéresse à un cylindre vertical de rayon R, dans lequel se déplace un piston de longueur ℓ et de rayon $R' = R - a$ (où $a \ll R$), à la vitesse $-v_p\,\vec{u}_z$. Le cylindre contient une huile incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η, qui peut s'écouler entre le piston et la paroi du cylindre.
On néglige les effets de la pesanteur.

1) Le champ de vitesse $v_z(r)$ du fluide entre le piston et la paroi est assimilable à un champ $v_z(x)$ puisque $a \ll R$.

1.a) Exprimer l'équation différentielle suivie par $v_z(x)$ en fonction de ΔP, la différence entre la pression au dessus du piston et celle en dessous.

1.b) Déterminer l'expression de $v_z(x)$ dans le référentiel du cylindre (le piston se déplace avec la vitesse v_p).

2) Exprimer le débit volumique D_v :

2.a) à partir du champ de vitesse $v_z(x)$

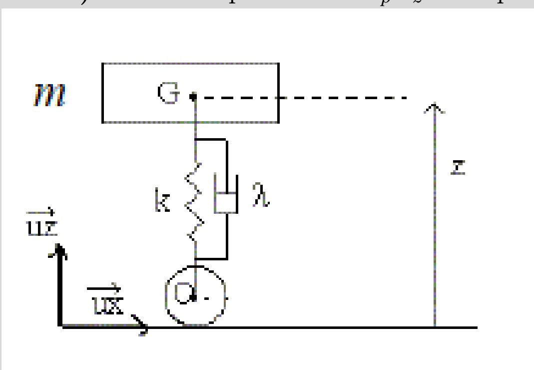
2.b) grâce à une autre relation.

2.c) En déduire l'expression de ΔP en fonction de η, v_p, a et R.

3) On suppose que l'on est en régime quasi-stationnaire, de sorte que l'accélération du piston soit nulle.

3.a) Déduire des précédentes relations l'expression de la force $\vec{F}$ qu'applique le piston sur sa tige.

3.b) Montrer que $\vec{F} = -\lambda\, v_p\, \vec{u}_z$. Interpréter.



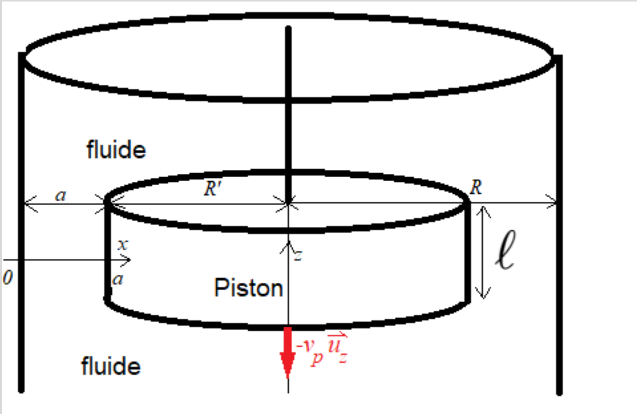
4) Une masse (par exemple une voiture !) m est liée au piston et aussi à un ressort vertical de constante de raideur k, ceci constituant l'amortisseur hydraulique.

4.a) Montrer que l'altitude z de la masse vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique amorti.

4.b) Comment "régler" l'amortisseur pour qu'il fonctionne bien ?

exercice de colle

Exercice 13.21
Amortisseur hydraulique



On schématise un amortisseur hydraulique par un cylindre de rayon R, dans lequel peut se déplacer un piston de longueur ℓ et de rayon $R' = R - a$ (où $a \ll R$). Le cylindre contient une huile incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η, qui peut s'écouler entre le piston et la paroi du cylindre. On néglige les effets de la pesanteur. $\vec{F} = -F\,\vec{u}_z$ est la force exercée par l'opérateur sur le piston.

Le champ de vitesse du fluide entre le piston et la paroi est assimilable à un champ $v_z(x)$ puisque $a \ll R$. On admet que $v_z = \alpha\,(x-a)\,x - \frac{v_p}{a}x$, où v_p est la vitesse du piston et α une constante négative.

1) Cinématique :
- **1.a)** Exprimer le débit volumique D_v à partir du champ de vitesse $v_z(x)$ puis grâce à une autre relation.
- **1.b)** En déduire l'expression de α.

2) Dynamique : exprimer F en utilisant
- **2.a)** les forces de cisaillement
- **2.b)** les forces de traînée.

exercice de colle

Exercice 13.22
Oscillations d'une goutte cylindrique entre deux plans

Cet exercice illustre le principe de la mesure d'une viscosité à l'aide d'un capteur de déplacement.

Une goutte liquide de forme cylindrique se trouve entre deux plans parallèles. Un système (non représenté) impose la distance $h(t)$ entre les deux plans : $h(t) = h_0(1 + \xi(t))$ avec, en notation complexe, $\xi(t) = \xi_0 \exp(i\omega t)$ (ξ_0 réel positif) et $10 < \omega < 100 \ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Le champ des vitesses et celui des pressions à l'intérieur de la goutte ont une symétrie cylindrique : $\vec{v}(M,t) = v_r(r,y,t)\vec{u}_r + v_y(y,t)\vec{u}_y$ et $p(M,t) = p(r,y,t)$. Le fluide est incompressible, de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η. On néglige les effets de la pesanteur.

Pour une grandeur X, on appelle X_0 son ordre de grandeur. Les ordres de grandeurs sont : $h_0 = 1\ \mu$m, $R_0 = 100\ \mu$m, $\xi_0 = 0,01$, $\rho_0 = 10^3$ kg.m^{-3} et $\eta = 10^{-3}$ Pl.

1) Composantes de la vitesse

1.a) Montrer que $v_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}$.

1.b) Exprimer et calculer la valeur numérique de V_{y0} en fonction de h_0, ξ_0 et ω, puis V_{r0} en fonction de R_0, h_0 et V_{y0}.

2) Simplification de l'équation de Navier-Stokes

2.a) En étudiant l'ordre de grandeur de chaque terme de l'équation de Navier-Stokes, montrer que les termes visqueux dominent les termes inertiels.

On donne, pour un champ $\vec{A}(r,\theta,z)$ le laplacien vectoriel :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta A} = & \left(\frac{\partial^2 A^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A^r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} - \frac{A^r}{r^2}\right)\boldsymbol{u}_r \\ & + \left(\frac{\partial^2 A^\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A^\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A^r}{\partial \theta} - \frac{A^\theta}{r^2}\right)\boldsymbol{u}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial^2 A^z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A^z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A^z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^z}{\partial r}\right)\boldsymbol{u}_z\end{aligned}$$

2.b) On vérifiera que, compte tenu des différents ordres de grandeur :

$$\Delta\vec{v} \simeq \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2},$$

et on prendra $\omega = 100 \ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour les calculs.

2.c) En déduire que l'équation du mouvement se simplifie en : $\overrightarrow{grad} p = \eta\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$.

3) Champ de pression

3.a) Comparer les ordres de grandeur de $\frac{\partial p}{\partial r}$ et de $\frac{\partial p}{\partial y}$. Justifier alors que l'on peut écrire : $p = p(r,t)$.

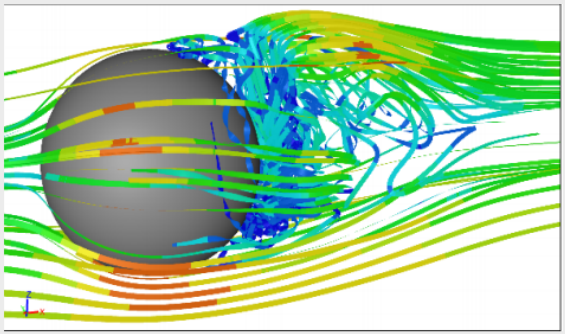
3.b) Déterminer l'expression de $p(r,t)$.

4) Exprimer la force $\vec{F} = F\,\vec{u}_y$ exercée par le fluide et l'atmosphère sur la plaque inférieure. Calculer l'amplitude de cette force pour $\eta = 10^{-3}$ Pl et $\omega = 100 \ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

exercice de colle

Exercice 13.23
Sphère en mouvement dans un fluide

Un facteur déterminant sur la trajectoire d'une balle dans l'air est la force de traînée opposée à son mouvement. L'écoulement autour d'une sphère se caractérise par une variation énorme de la traînée avec le nombre de Reynolds. Dit autrement, à propriétés des fluides (viscosité et densité) et diamètre de la sphère constants, la traînée dépend de la vitesse.
Il est à noter que, dans de nombreux sports de balle, le nombre de Reynolds a une valeur proche de 10^5 ou 10^6, près d'une variation brutale de la traînée. Coïncidence ? Certainement pas ! D'autant qu'en rendant rugueuse la sphère, on peut rendre plus grande la vitesse maximale (par exemple dans le cricket ou le baseball) ou encore la distance maximale à laquelle on peut lancer la sphère (comme dans le golf par exemple)...



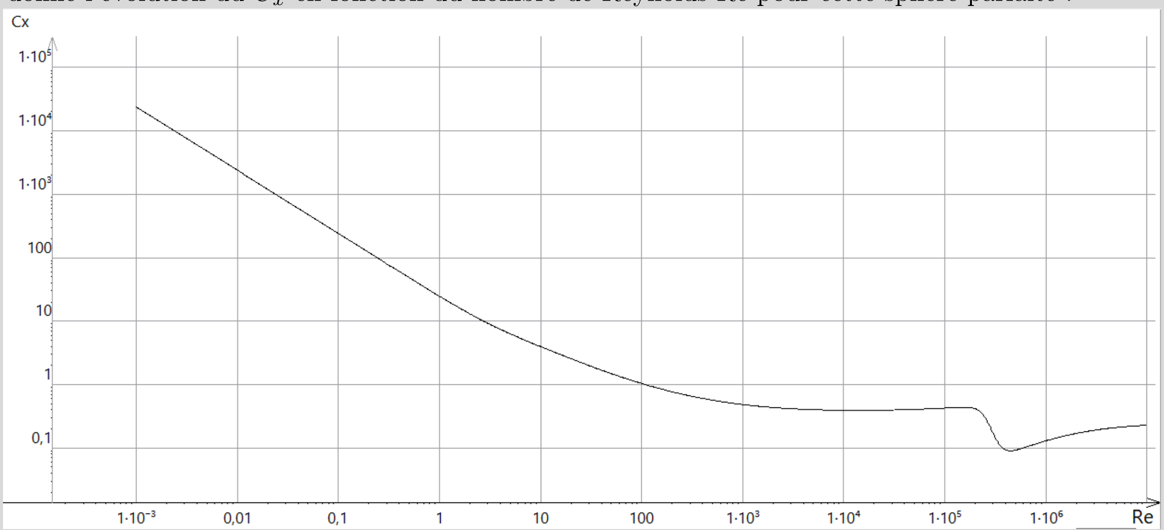
Simulation d'écoulement autour d'une sphère pour un nombre de Reynolds = 10000.

Traduction de https://www.symscape.com/blog/sports-fluid-flow-spheres.

On rappelle l'expression de la force de traînée subie par une sphère de rayon R, de maître-couple S à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ dans un fluide de masse volumique μ, de viscosité dynamique η :

$$\vec{F}_f = -\frac{1}{2}\mu\, v^2\, S\, C_x\, \vec{u}_x$$

et on donne l'évolution du C_x en fonction du nombre de Reynolds Re pour cette sphère parfaite :



1) Rappels

1.a) Donner, en la justifiant, la dimension de C_x.

1.b) Déterminer l'expression du maître-couple S.

1.c) Rappeler l'expression générale du nombre de Reynolds Re, en déduire son expression littérale dans ce cas étudié, et donner les noms des deux types d'écoulements suivant que $\mathrm{Re} \ll 1$ ou $\mathrm{Re} \gg 1$.

2) Grâce à la courbe donnée, déterminer l'expression numérique de $C_x = f(\mathrm{Re})$ et en déduire l'expression de la force $\vec{F}_f$ dans les domaines suivants :

2.a) $\mathrm{Re} < 1$ (force de Stokes) ;

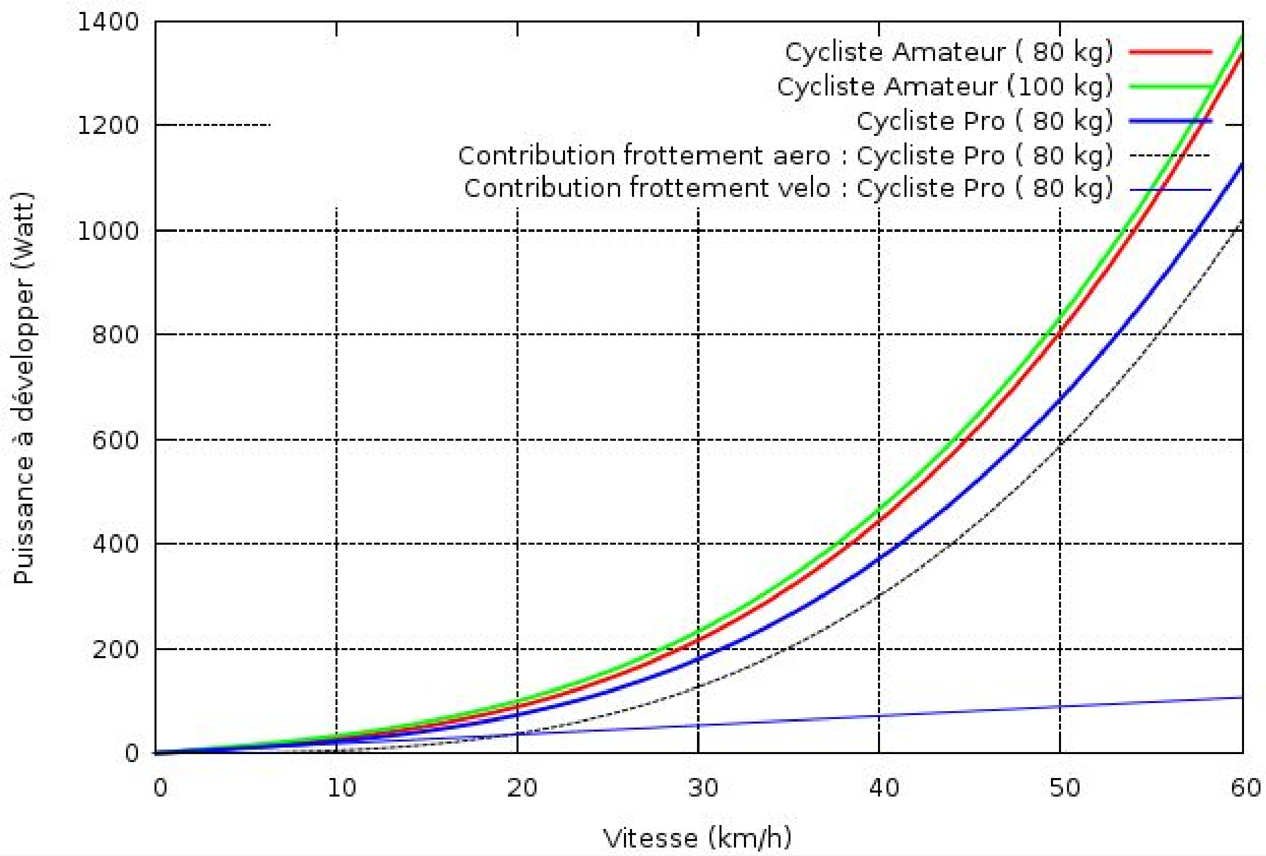
2.b) $\mathrm{Re} \in \left[10^3; 10^5\right]$;

3) Discuter de ce qui se passe dans le domaine $\mathrm{Re} \in \left[10^5; 10^7\right]$.

4) En choisissant un sport qui utilise une balle ou un ballon sphérique, estimer le nombre de Reynolds et dire dans quel domaine on se trouve.

exercice de colle

Exercice 13.24
Puissance d'un cycliste



En cyclisme, différentes forces s'opposent à l'avancement du cycliste et de sa bicyclette et limitent sa vitesse de déplacement. À vitesse élevée ($> 40\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$), la traînée aérodynamique est la plus importante de toutes ces forces. Pour se représenter son importance, il faut savoir que 90% de la puissance produite par un cycliste sert à vaincre cette résistance.

L'aérodynamisme est une problématique de premier plan pour la recherche en cyclisme, l'objectif principal étant d'améliorer les performances. Durant les courses cyclistes, et plus particulièrement lors des épreuves de "Contre-la-montre", les différences de temps entre les athlètes peuvent être minimes. L'optimisation des paramètres aérodynamiques du cycliste et de sa bicyclette peuvent être déterminants pour augmenter la vitesse de déplacement pour une même production de puissance. Or, pour minimiser la résistance aérodynamique, il est important de connaître ses paramètres déterminants, de savoir comment les évaluer et de pouvoir déterminer leur évolution en fonction de la position du cycliste et de sa vitesse de déplacement.

La résistance aérodynamique est directement proportionnelle à l'aire frontale projetée du cycliste (le maître couple) et de sa bicyclette (A_p, en $\mathrm{m^2}$), au coefficient de traînée (C_D, sans unité), à la masse volumique de l'air (ρ, en $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) et au carré de la vitesse d'écoulement du fluide sur le corps du cycliste (v_f, en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) :

$$R_A = 0,5 \times A_p \times \rho \times C_D \times v_f^2$$

Le coefficient de traînée (C_D, sans unité) (également appelé coefficient de forme ou C_X) est utilisé pour modéliser les facteurs complexes de forme, de position et les flux d'air agissant sur le corps du cycliste en déplacement. Indurain lors de son record de l'heure (1994) présentait un $C_D = 0,65$.

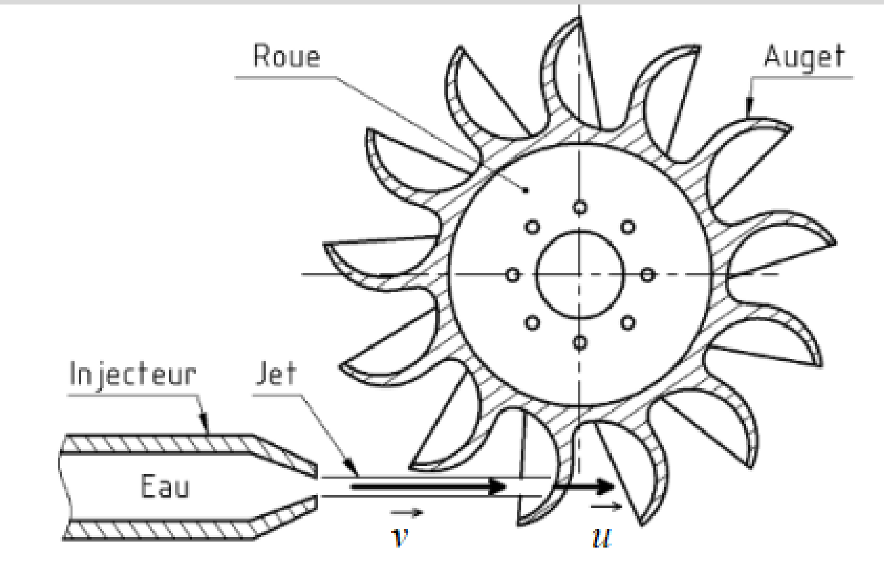
L'aire frontale projetée représente la portion du corps qui peut être vue par un observateur placé exactement en face de ce corps. L'aire frontale projetée est dépendante de la taille et de la masse corporelle du cycliste, de la position du cycliste sur la bicyclette et de l'équipement utilisé (e.g., casque, forme du cadre, vêtements).

Extraits de l'article "Méthodes d'évaluation de l'aérodynamisme en cyclisme" par P. Debraux disponible sur le site "Sciences du Sport . com"

1) Déterminer l'ordre de grandeur du coefficient de traînée d'un cycliste.

exercice de colle

Exercice 13.25
La turbine à augets Pelton



Selon l'article wikipédia qui lui est consacré, la turbine Pelton est un type de turbine hydraulique à augets utilisée dans les centrales hydroélectriques. Elle a été inventée en 1879 par Lester Allan Pelton.

On modélise le mouvement rotatif d'une turbine en régime permanent par un mouvement rectiligne à la vitesse $\vec{u} = u\,\vec{e}_x$. Un godet semi-cylindrique de la turbine reçoit un jet d'eau (masse volumique μ) en contact avec l'air ambiant, de section S, de vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ et de débit massique $D_m = \mu\,S\,v$ et l'on a, bien sûr, $v \geq u$ sinon l'eau ne rattraperait pas le godet !
Le régime n'est pas permanent puisque le godet bouge. En contrepartie naturelle, dans le référentiel lié au godet, il l'est. On se placera donc par la suite dans ce référentiel.

1) Que deviennent dans ce référentiel :
  1.a) la vitesse $\vec{v}_e$ d'arrivée de l'eau ?
  1.b) et son débit D'_m ?

On néglige le dénivelé vertical du jet.

2) Trouver la vitesse à laquelle ressort l'eau :
  2.a) dans le référentiel du godet (notée $\vec{v}_s$)
  2.b) et dans celui du sol (notée $\vec{v'}$).

3) Montrer que le jet a la même section avant et après sa rencontre avec le godet.

Considérons un volume de contrôle, fixe dans le référentiel du godet pour avoir un régime permanent, volume contenant le godet, une partie du jet entrant et une partie du jet sortant.

4) Quelle force exerce l'eau sur le godet ?

5) Quelle en est la puissance de cette force dans le référentiel du sol ?

6) Calculer la puissance cinétique P_c du jet qui arrive sur le godet dans le référentiel du sol.

7) Rendement
  7.a) Calculer le rendement $\eta = \frac{P}{P_c}$ en fonction du rapport $x = \frac{u}{v}$.
  7.b) Dans quel domaine varie x ?
  7.c) Pour quelle valeur x_{max} de x obtient-on le rendement maximal ?
  7.d) Calculer le rendement maximum η_{max}.
  7.e) Le résultat était-il prévisible ?

exercice de colle

Exercice 13.26
La fusée à eau

Réaliser une fusée de stabilité convenable tout au long de son vol peut se faire simplement. Deux bouteilles en plastique pour boisson gazeuse (genre Pepsi, Coca...) de $1,5$ L, ou même 2 L, constituent le matériau de base à se procurer. L'une des deux est découpée pour fournir l'ogive et la jupe sur laquelle seront fixés trois ou quatre ailerons pour former la queue.

Au terme d'un éventuel compte à rebours (ça fait plus sérieux !) la libération du cran d'arrêt entraîne la décompression du bouchon et la pression à l'intérieur acquise par gonflage fait le reste : dégagement de la tuyère par la force pressante, éjection brutale de l'eau et mouvement de la fusée par réaction.

Caractéristiques approximatives de la fusée :
- *masse à vide avec ogive et queue* 100 g *;*
- *diamètre du corps :* $8,5$ cm *;*
- *diamètre de la tuyère :* 2 cm *;*
- *volume total du réservoir :* $1,5$ L *;*
- *hauteur :* 40 cm *;*
- *pression supportable : jusqu'à* 40 bar.

En y mettant $0,5$ L et en gonflant à 6 bars, on obtient pour le départ : poussée $F = 377$ N.

Extraits de l'article du Bulletin de l'Union des Physiciens n°732 vol. 85 mars 1991 pp. 512-532 «La fusée à eau» par J.P. SOULARD

1) Vérifier que la valeur numérique de la poussée au démarrage de la fusée est bien de l'ordre de grandeur de ce qui est indiqué dans le texte.

exercice de colle

Exercice 13.27
Le jetlev

Un "jetlev" est un dispositif fixé au dos d'un pilote lui permettant de s'élever au-dessus d'une étendue d'eau (lac, mer...).
Une poussée suffisante est permise grâce à l'expulsion d'eau à grande vitesse par deux tuyères orientées vers le bas et alimentées grâce à un tuyau flexible d'une dizaine de mètres de long.
Afin de limiter le poids de l'engin, la pompe et le carburant sont disposés dans un bateau auxiliaire.

1) Estimer à partir de la photo la section du tuyau d'arrivée d'eau et celle de sortie d'eau.

2) Faire un bilan de forces exercées sur le pilote d'un jetlev.

3) Faire, dans un référentiel adapté, un bilan entre deux instants successifs

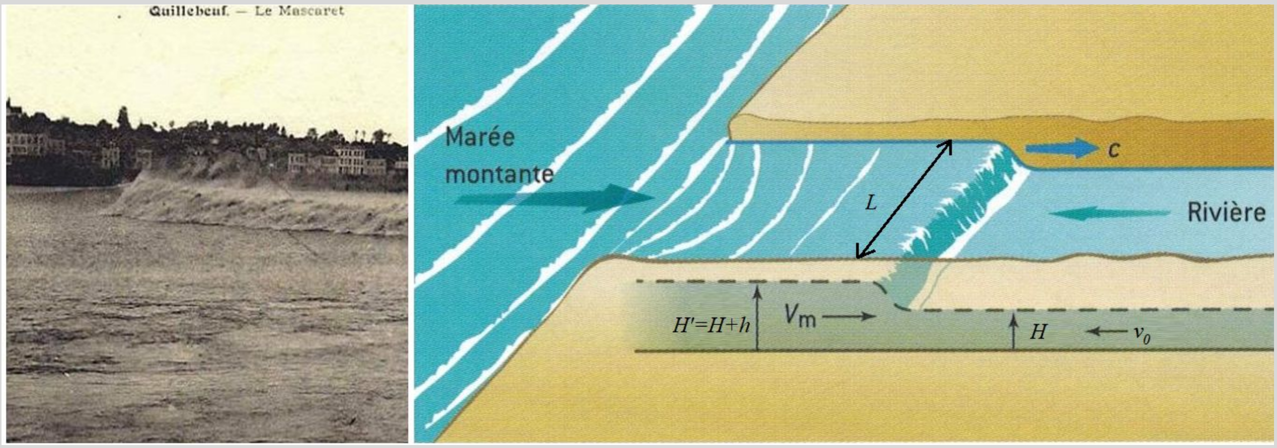
- **3.a)** de masse,
- **3.b)** de quantité de mouvement,
- **3.c)** d'énergie.

4) Estimer la puissance que doit fournir la pompe permettant au pilote de rester à une hauteur de cinq mètres au dessus de la surface de l'eau.

exercice de colle

Exercice 13.28
Le mascaret

Le 4 septembre 1843, Léopoldine Hugo âgée de dix-ans se noya dans la Seine près de Villequier à cause d'un mascaret, vague qui remonte certains fleuves depuis leur embouchure vers l'amont, causée par la marée haute. Nous allons étudier ce phénomène.



On modélise le mascaret (la vague) par une marche rectangulaire de hauteur h, qui remonte le fleuve vers l'amont. On suppose le fleuve rectiligne, suivant Ox (x croissant de l'amont vers l'aval), et de largeur uniforme, égale à L . On se place dans le référentiel lié à la vague parce que le régime y est permanent car la vague y est immobile. Dans ce référentiel, la vitesse de déplacement de l'eau du fleuve est :

- $V.\vec{u}_x$ en amont de la vague, où H est la profondeur du fleuve sans la vague ;
- $V'.\vec{u}_x$ en aval de la vague, où $H' = H + h$ est la profondeur du fleuve avec la vague.

On choisit un système ouvert d'eau, portion de fleuve limité par une section verticale en amont de la vague et une section verticale en aval.

On note μ la masse volumique de l'eau, P_{atm} la pression atmosphérique et g l'intensité de la pesanteur.

1) En écrivant la conservation du débit massique, trouver une relation liant H, H', V et V'.

2) Bilan de quantité de mouvement.

2.a) Faire un bilan de quantité de mouvement reliant le système ouvert au système fermé coïncident.

2.b) Calculer la somme des forces de pression appliquées sur le système fermé coïncident, en supposant qu'en amont comme en aval, la pression de l'eau varie comme en hydrostatique.

2.c) En déduire une relation entre H, H', V, V' et g.

3) Expression de la vitesse du mascaret.

3.a) Déduire des deux relations précédentes une expression de V en fonction de g, H et H'.

3.b) Que devient cette expression si $h \ll H$?

3.c) Application numérique : que vaut V en km/h pour un fleuve de dix mètres de profondeur ?

4) Interprétation.

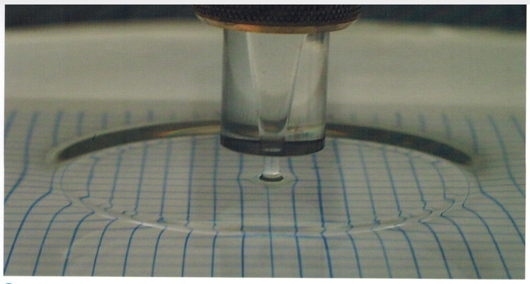
4.a) A quelle condition sur v_0, vitesse d'écoulement du fleuve par rapport au sol, le mascaret peut-il remonter celui-ci ?

On néglige v_0.

4.b) La première vague faisant passer la profondeur de H à H' est suivie d'une seconde faisant passer la profondeur de H' à H". Que se passe-t-il ?

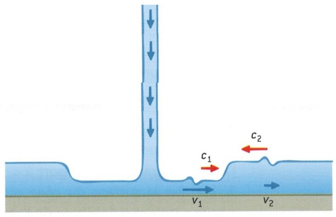
exercice de colle

Exercice 13.29
Ressaut hydraulique



4. Ressaut hydraulique formé par un jet incident sur un plan horizontal. Le fond quadrillé permet d'estimer l'épaisseur de la couche liquide.

6. Ressaut hydraulique en bas d'un déversoir à proximité du barrage d'Itaipu (frontière Brésil-Paraguay). L'eau s'écoule très rapidement sur le plan incliné avant que l'épaisseur de la couche liquide n'augmente brusquement. Cette transition est ici déclenchée par une légère remontée du plan incliné.



7. Vue en coupe d'un ressaut hydraulique pour un jet de fluide visqueux arrivant sur un plan. Les célérités c des ondes de surface sont inférieures à la vitesse v_1 du liquide dans la région centrale (Fr > 1), et supérieures à la vitesse v_2 (Fr < 1) dans l'anneau externe.

Le nombre de Froude Fr caractérise le rapport entre la vitesse v du liquide et la célérité $(g\,h)^{\frac{1}{2}}$ des ondes de surface (h est l'épaisseur de la couche de fluide). Le ressaut hydraulique marque le passage d'une zone où Fr est supérieur à l'unité, à une région où il lui est inférieur et où le fluide s'écoule plus lentement. Les déformations accidentelles de la surface viennent par ailleurs renforcer le ressaut : celles qui sont dans la zone lente en aval peuvent «remonter» le courant vers le ressaut (puisque $Fr < 1$), tandis que les perturbations dans la zone rapide sont au contraire entraînées par le courant jusqu'au ressaut (Figure 7). Il existe une analogie entre le bourrelet d'un ressaut et les «ondes de choc» dans les souffleries et écoulements supersoniques : les fronts de choc séparent en effet une zone d'écoulement supersonique (équivalente à la zone amont du ressaut) d'une zone d'écoulement subsonique (à comparer à la région aval).

"Ce que disent les fluides" - 2nde éd. - de E. Guyon, J-P. Hulin et L. Petit Belin - Pour la Science

On note μ la masse volumique du liquide, P_{atm} la pression atmosphérique et g l'intensité de la pesanteur.

1) Ressaut cylindrique

On s'intéresse au ressaut de la figure 4. Le jet a un débit volumique D_v, et la vitesse dépend de la distance r à l'axe du problème :

- à l'intérieur ($r < R$), la hauteur de liquide est h_1 et la vitesse $v(r) = v_1(r)$;
- à l'extérieur ($r > R$), la hauteur de liquide est $h_2 > h_1$ et la vitesse $v(r) = v_2(r)$.

1.a) Qu'impose la conservation du débit ?

1.b) Tracer l'allure des variations du nombre de Froude Fr avec r.

2) Ressaut rectiligne

On modélise le ressaut (la vague figure 6) par une marche rectangulaire de hauteur Δh, sur une rivière. On suppose le fleuve rectiligne, suivant Ox (x croissant de l'amont vers l'aval), et de largeur uniforme, égale à L . On se place dans le référentiel du sol où le régime est permanent car la vague y est immobile. Dans ce référentiel, la vitesse de déplacement de l'eau du fleuve est :

- $V.\vec{u}_x$ en amont de la vague, où h_r est la profondeur du fleuve sans la vague ;
- $V'.\vec{u}_x$ en aval de la vague, où $h_m = h_r + \Delta h$ est la profondeur du fleuve avec la vague.

On choisit un système ouvert d'eau, portion de fleuve limité par une section verticale en amont de la vague et une section verticale en aval du ressaut.

2.a) Faire un schéma où apparaissent ces données.

2.b) En faisant un bilan de masse, montrer que : (1) $h_r.V = h_m.V'$.

2.c) Faire un bilan de quantité de mouvement reliant le système ouvert au système fermé coïncident. Calculer la somme des forces de pression appliquées sur le système fermé coïncident, en supposant qu'en amont comme en aval, la pression de l'eau varie comme en hydrostatique.

2.d) En déduire que (2) $\left(h_m.V'^2 - h_r.V^2\right) = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} g$.

2.e) Déduire des deux relations précédentes une expression de V et de V'.

2.f) On admet que le nombre de Froude avant le ressaut est $Fr = \frac{V}{\sqrt{g\,h_r}} > 1$ et que le nombre de Froude après le ressaut est $Fr' = \frac{V'}{\sqrt{g\,h_m}} < 1$. Montrer que si une particule liquide s'échappe du ressaut vers l'amont elle est donc ramenée vers le ressaut ; réciproquement, si la particule liquide s'échappe du ressaut vers l'aval, elle revient en arrière dans le ressaut.

exercice de colle

Exercice 13.30
Modélisation de l'effet d'un jet d'eau sur une plaque mobile

On s'intéresse à un jet d'eau de section S qui arrive, dans le référentiel du sol, avec une vitesse $\vec{v}_j = +v_j\,\vec{u}_x$ sur une plaque qui se déplace à la vitesse $\vec{v}_p$.

1) On considérera que l'eau repart dans un sens opposé $(-\vec{u}_x)$ en conservant la section S du jet. En faisant un bilan de masse, déterminer

1.a) la vitesse de l'eau $\vec{v}_e$ incidente sur la plaque dans le référentiel de la plaque,

1.b) la vitesse de l'eau $\vec{v}_s'$ après choc sur la plaque dans le référentiel du sol.

2) On suppose que la pesanteur est négligeable et que la pression de l'eau est partout égale à la pression atmosphérique.

2.a) Calculer la résultante des forces de pression $\vec{\Pi}$.

2.b) En appliquant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\vec{F}_{j\to p}$ qu'applique le jet sur la plaque.

3) Etude énergétique

3.a) Faire un bilan d'énergie cinétique dans le référentiel de la plaque.

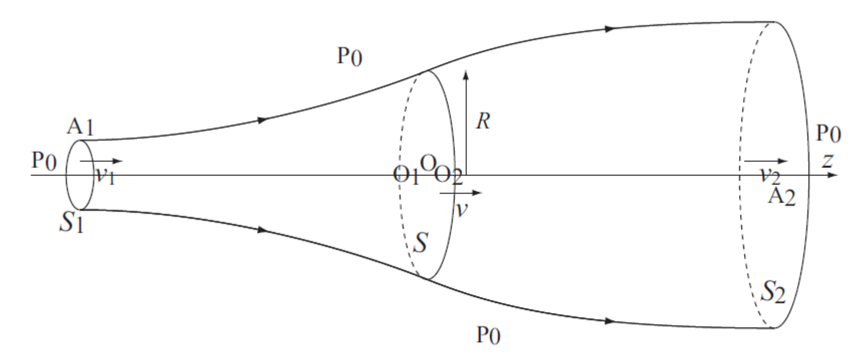
3.b) Calculer, dans le référentiel du sol, la puissance $P_{j\to p}$ de la force qu'applique le jet sur la plaque.

3.c) On pose $v_p = x\,v_j$. Déterminer le maximum de $P_{j\to p}$.

exercice de colle

Exercice 13.31
L'hydrolienne

"EDF a choisi le site de la Horaine (où se situe une réserve de crustacés), à 8 km au nord de l'île de Bréhat et à 15 km du continent (baie de Launay), pour implanter le premier parc hydrolien de France.
Le but est de produire de l'électricité à partir de l'énergie des courants qui, dans cette zone sont parmi les plus élevés d'Europe (3 m/s). Ce site pilote permet de tester, en condition réelles cette technologie en vue de créer une véritable filière hydrolienne.
La société irlandaise OpenHydro construira les quatre hydroliennes prévues sur un parc de 3 ha. D'un diamètre de 16m, chaque turbine produira 500 kilowatts, soit un total de 2 mégawatts. De quoi alimenter 4 000 foyers."
Source : https://www.ouest-france.fr/paimpol-lenergie-marine-fera-des-etincelles-307290



On modélise l'écoulement d'eau (de masse volumique μ) à partir d'un tube de courant qui s'appuie sur la surface $S = \pi\, R^2$ balayée par le rotor. On note Oz l'axe de ce tube de courant, l'origine O étant choisie dans le plan du rotor.

En amont, loin du rotor, la section de ce tube de courant est S_1 et la vitesse de l'eau, supposée uniforme, est $\vec{v}_1 = v_1\, \vec{e}_z$.

En aval, loin du rotor, la section de ce tube de courant est S_2 et la vitesse de l'eau, supposée uniforme, est $\vec{v}_2 = v_2\, \vec{e}_z$.

On note $\vec{v} = v\, \vec{e}_z$. la vitesse, supposée uniforme, sur la surface S.

En dehors du tube de courant, la pression est supposée égale à une constante notée P_0.

On remarquera que, des paramètres qui viennent d'être définis, seuls v_1 et S sont fixés et connus. On cherche à déterminer, en fonction de μ, S, v_1 et v_2, la puissance prélevée par le rotor sur le courant.

1) On fait l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait en amont, jusqu'au plan perpendiculaire à Oz passant par O_1 ; on fait la même hypothèse pour l'eau située en aval à partir du plan perpendiculaire à Oz passant par O_2.

1.a) Expliquez comment on peut justifier cette hypothèse.

1.b) Expliquez pourquoi l'eau n'est pas assimilée à un fluide parfait entre les plans O_1xy et O_2xy.

2) On néglige par la suite la longueur O_1O_2.

2.a) Etablir deux relations indépendantes reliant S_1, S_2, S, v_1, v_2 et v.

2.b) Comparer S_1 et S_2.

2.c) Exprimer la différence des pression $(p_1 - p_2)$ en O_1 et O_2.

3) A partir d'un bilan de quantité de mouvement pour un système ouvert que l'on définira à chaque fois, exprimer la résultante $\vec{F}$ des forces exercées par le rotor sur le fluide :

3.a) en fonction de μ, S, v, v_1 et v_2.

3.b) en fonction de μ, S, v_1 et v_2.

3.c) Quelle est la direction de $\vec{F}$? Est-ce cohérent ?

3.d) Déduire des deux expressions précédentes de $\vec{F}$ que $v = \frac{v_1+v_2}{2}$.

4) Puissance

4.a) Exprimer la puissance que prélève le rotor au courant en fonction de μ, S, v_1 et v_2.

On admet que, μ, S, et v_1 étant donnés, v_2 peut être choisi au travers des caractéristiques du rotor.

4.b) Rechercher la valeur de v_2 qui permet de prélever le maximum de puissance au courant, et déterminer la puissance maximale correspondante (limite de Betz).

4.c) Déterminer le rendement de l'hydrolienne.