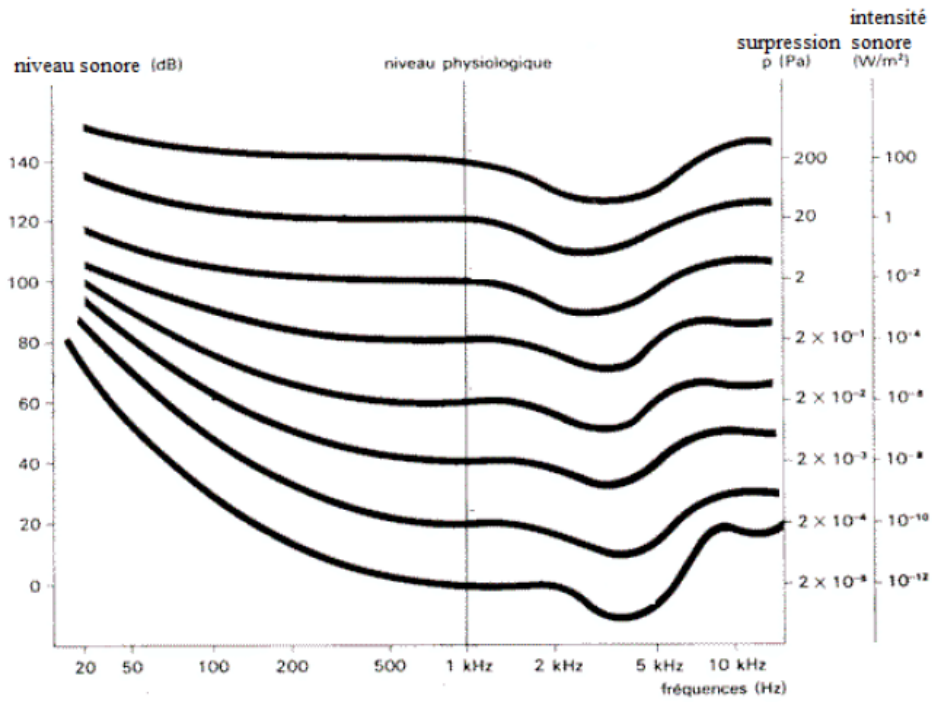


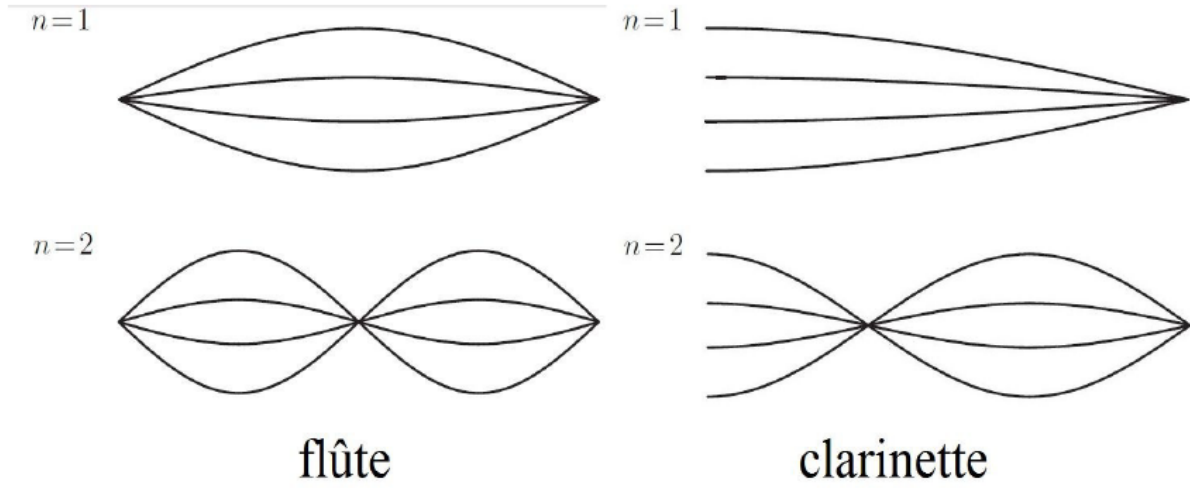
Comment fonctionne un instrument à vent ?



► déterminer les propriétés des ondes acoustiques dans l'air



► **chercher les caractéristiques
des ondes stationnaires**



**► étudier la réflexion et la transmission
des ondes progressives**



Ondes sonores dans les fluides

Les points du cours à connaître

I- Ondes acoustiques dans les fluides

1. Hypothèses simplificatrices



Approximation acoustique *définition*

on considère que

- la pression varie peu : $P = P_0 + p$ avec $|p| \ll P_0$;
- la masse volumique non plus : $\mu = \mu_0 + \rho$ avec $|\rho| \ll \mu_0$;
- la vitesse du fluide $\vec{V} = \vec{0} + \vec{v}$ est petite devant la célérité de l'onde ($|\vec{v}| \ll c_s$).

On supposera que l'écoulement est isentropique et l'onde de grande longueur d'onde.



Linéarisation : *s'y retrouver*

on se limitera à des termes d'ordre 1 (p , ρ ou \vec{v}) dans les équations.



L'approximation de grande longueur d'onde. *s'y retrouver*

On s'intéresse à une onde de fréquence ν et de longueur d'onde λ , reliées par $c_s = \lambda \nu$. Cette hypothèse est vérifiée dans les cas des ondes sonores (pour $\nu < 20kHz$). Le déplacement des particules de fluide de l'ordre de ℓ , est tel que $v \approx \ell \nu$. $|\vec{v}| \ll c_s$ revient à supposer que le libre parcours moyen est

$$\ell \ll \lambda$$

L'approximation acoustique est donc une approximation de grande longueur d'onde. Si l'on note ℓ , le libre parcours moyen des particules, négliger les transferts thermique revient à

$$\ell \ll \lambda \Leftrightarrow \nu \ll \frac{c_s}{\ell} \approx 10^9 Hz$$

dans le cas des gaz (et plus encore dans le cas des liquides).



L'hypothèse isentropique *s'y retrouver*

on va supposer que les écoulements sont, du point de vue thermodynamique, isentropiques, c'est à dire à la fois

- adiabatiques (il n'y a pas d'échanges thermiques) ;
- réversibles.

Ceci revient à négliger tous les phénomènes dissipatifs de diffusion (ni conduction thermique, ni viscosité). On s'intéressera donc au coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Rightarrow$$

$$\chi_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

2. Équation d'onde

1 Expression de la célérité des ondes sonores pour un gaz parfait *théorème*

Comme $\chi_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \approx \frac{+1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$, on peut réécrire cette célérité sous la forme :

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_S}$$

soit pour un gaz parfait, comme $P = \frac{P_0 \cdot V_0^\gamma}{V^\gamma} = \frac{P_0 \cdot \mu^\gamma}{\mu_0^\gamma}$

$$c_s = \sqrt{\gamma \cdot \frac{P_0 \cdot \mu^{\gamma-1}}{\mu_0^\gamma}} \approx \sqrt{\gamma \cdot \frac{P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R \cdot T}{M}}$$

\Rightarrow

Pour un gaz parfait :

$$c_s = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R \cdot T}{M}}$$

Célérités des ondes sonores dans différents gaz *tableau*

Le tableau 1 présente quelques exemples de célérités des ondes sonores dans différents gaz : plus ceux-ci sont massiques, plus la célérité est faible.

espèce	c_s en $m \cdot s^{-1}$
O_2	317
air	331
N_2	339
H_2	1270

TABLE 1 – Quelques célérités des ondes sonores dans des gaz à $0^\circ C$

Vitesse du son dans le cas des liquides : *tableau*

Le tableau 2 présente quelques exemples de célérités des ondes sonores dans différents liquides. La compressibilité χ_S des liquides est quasi-nulle et, même si la masse volumique des liquides est mille plus forte que celle des gaz, la célérité des ondes sonores est plus importante dans les liquides que dans les gaz

$$c_s(\text{liquides}) > c_s(\text{gaz})$$

espèce	c_s en $m.s^{-1}$
eau	1500
Hg	1450

TABLE 2 – Quelques célérités des ondes sonores dans des liquides

II- Ondes sonores planes progressives

1. Caractéristiques des ondes sonores planes progressives

✳ **Les ondes sonores planes** s'y retrouver

Si $\phi(z, t)$, alors

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_s^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

On peut réécrire les solutions à partir de

- $\psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) = \frac{-1}{c_s} f' \left(t - \frac{z}{c_s} \right)$, l'onde plane progressive vers les z croissants ;
- $\psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) = \frac{+1}{c_s} g' \left(t + \frac{z}{c_s} \right)$, l'onde plane progressive vers les z décroissants.

$$\begin{cases} \vec{v} = \left[\psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) + \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \right] \vec{u}_z \\ p = \mu_0 \cdot c_s \cdot \left[\psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) - \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \right] \end{cases}$$

Les surfaces d'onde des ondes sonores planes sont des plans ($z = cste$).

✳ 2 Caractère vectoriel des ondes acoustiques *théorème*

$$\vec{v} // \vec{u}_z. \Rightarrow$$

Les ondes sonores planes sont longitudinales.

✳ **Ondes planes progressives monochromatiques** s'y retrouver

on pose la pulsation ω et le vecteur d'onde \vec{k} .

Le potentiel des vitesses est $\phi = \text{Re} \left(\tilde{\phi} \right)$, avec le complexe associé :

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

On en déduit la vitesse par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ et la pression par $p(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$. On déduit vitesse et pression complexes

$$\begin{cases} \tilde{v} = -j \cdot \vec{k} \cdot \tilde{\phi}_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \tilde{p} = -j \cdot \mu_0 \cdot \omega \cdot \tilde{\phi}_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases}$$

Si la direction de propagation est parallèle à \vec{u}_z , il y a deux solutions à l'équation de dispersion :

- soit $\vec{k} = +\frac{\omega}{c_s} \vec{u}_z$, qui correspond à l'onde se propageant vers les z croissants ;

- soit $\vec{k} = -\frac{\omega}{c_s} \vec{u}_z$, qui correspond à l'onde se propageant vers les z décroissants.

3 Relation entre pression et vitesse pour une onde plane se propageant vers les z croissants : *théorème*

pour une onde plane se propageant vers les z croissants :

$$\begin{cases} v_z = \psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) \\ p = \mu_0 \cdot c_s \cdot \psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) \end{cases}$$

pour une onde plane se propageant vers les z décroissants :

$$\begin{cases} v_z = \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \\ p = -\mu_0 \cdot c_s \cdot \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \end{cases}$$

La pression est là aussi proportionnelle à la vitesse, simplement le facteur de proportionnalité est cette fois négatif. \Rightarrow

La pression étant proportionnelle à la vitesse, on peut poser :

- $p = +Z_c v_z$ pour une onde plane se propageant vers les z croissants,
- $p = -Z_c v_z$ pour une onde plane se propageant vers les z décroissants.

Impédance acoustique : *définition*

L'impédance acoustique (ou résistivité) ne dépend que des caractéristiques du fluide :

$$Z_c = \mu_0 c_s = \frac{1}{\chi_s c_s} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

car $c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$. Elle s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Impédance acoustique de l'air *s'y retrouver*

Dans le cas de l'air $Z_c = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Etude énergétique des ondes sonores planes progressives

Densité volumique d'énergie d'une onde plane : *définition*

L'énergie volumique sonore est

$$e_s = e_c + e_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v^2$$

avec

- l'énergie cinétique volumique $e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v^2$
- et l'énergie potentielle volumique $e_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2$.

4 Bilan énergétique pour une onde acoustique plane *théorème*

dans un volume V , l'énergie sonore est

$$E_s = \iiint_V e_s \cdot d^3\tau$$

La variation d'énergie sonore contenue dans le volume V est

$$\frac{dE_s}{dt} = \iiint_V \frac{\partial e_s}{\partial t} d^3\tau$$

Calculons $\frac{\partial e_s}{\partial t}$:

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = \chi_s \cdot p \frac{\partial p}{\partial t} + \mu_0 \cdot \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -p \cdot \text{div}(\vec{v}) - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(p)$$

en utilisant les équations couplées $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}}(p)$ et $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \text{div}(\vec{v})$. Or, comme $\vec{\nabla} \cdot (U \cdot \vec{A}) = (\vec{\nabla} U) \cdot \vec{A} + U \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ Le bilan local s'écrit :

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = -\text{div}(p \cdot \vec{v})$$

Soit au niveau global

$$\frac{dE_s}{dt} = - \iiint_V \text{div}(p \cdot \vec{v}) d^3\tau = - \oiint_{\Sigma} p \cdot \vec{v} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma}$$

où le volume V est délimité par une surface fermée Σ . \Rightarrow

Le bilan d'énergie sonore s'écrit :

$$\begin{cases} \text{au niveau global : } \frac{dE_s}{dt} = - \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} \\ \text{au niveau local : } \frac{\partial e_s}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0 \end{cases}$$

où le vecteur densité surfacique de flux sonore (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) est $\vec{\Pi} = p \vec{v}$

Intensité sonore : *définition*

on posera le flux d'énergie sonore :

$$P_r = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

L'intensité sonore est la moyenne du vecteur densité surfacique de flux sonore

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle p v \rangle$$

qui s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Niveau sonore : définition

L'oreille étant un détecteur logarithmique, on définit le niveau sonore en décibel (dB) par

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ où } I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

car $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est l'intensité sonore minimale que l'oreille peut déceler (vers 1,5 kHz).

Le domaine acoustique de l'oreille humaine. schéma

La figure 1 représente le domaine acoustique de l'oreille humaine. Les niveaux sonores détectés par l'oreille sont supérieurs à $0dB$ (et inférieurs à $130dB$, seuil de la douleur).

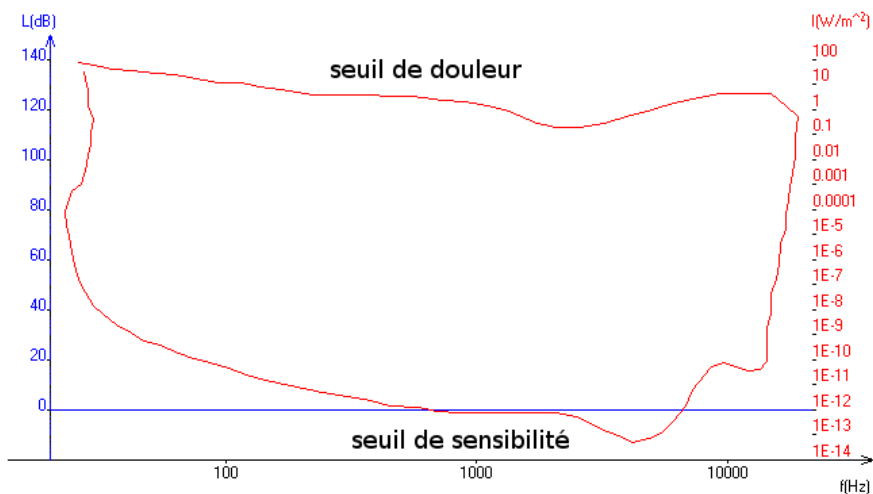


FIGURE 1 – Le domaine acoustique de l'oreille humaine.

Quelques ordres de grandeur de niveaux sonores : tableau

Le tableau 3 présente quelques ordres de grandeurs de niveaux sonores.

exemples	niveau sonore L
pièce silencieuse	$30dB$
lave-vaisselle	$50dB$
rue animée	$75dB$
scooter accélérant	$90dB$
avion qui décolle	$120dB$
marteau-piqueur	$130dB$

TABLE 3 – Quelques niveaux sonores dans la vie de tous les jours

3. Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface

👁️ Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface *schéma*

La figure 2 représente deux tuyaux d'axe Oz , raccordés en $z = 0$

- pour $z < 0$, la section est S_1 , la célérité des ondes sonores c_1 , et toute grandeur caractéristique du fluide porte l'indice 1 ;
- pour $z > 0$, la section est S_2 , la célérité des ondes sonores c_2 , etc...

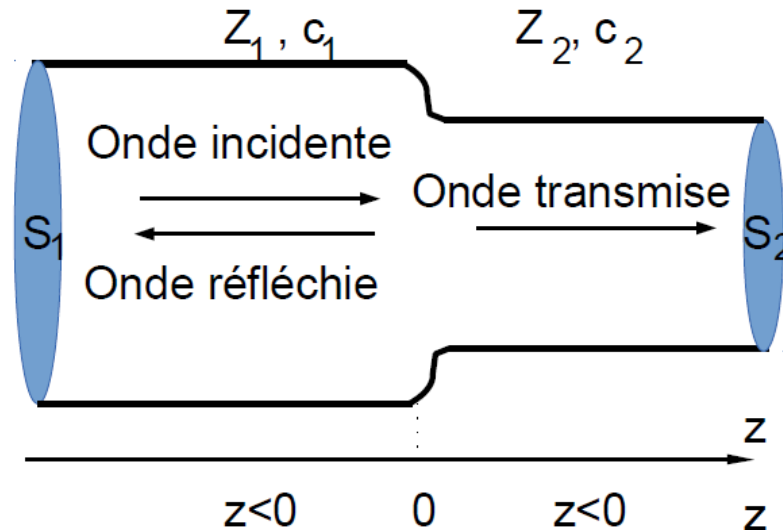


FIGURE 2 – Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface

🔪 5 Continuité de certaines grandeurs acoustiques à une interface *théorème*

la pression est bien entendu continue, comme on peut s'en assurer en imaginant la présence d'un piston de masse nulle entre les deux gaz.

Et le débit volumique est continu aussi. \Rightarrow

à l'interface $z = 0$,

$$P(z = 0^-, t) = P(z = 0^+, t) \quad \forall t$$

et

$$S_1 \cdot v_z(z = 0^-, t) = S_2 \cdot v_z(z = 0^+, t) \quad \forall t$$

✳️ Interface liquide-gaz et solide-gaz : *s'y retrouver*

les liquides et les gaz ayant des impédances acoustiques très différentes ($c_s(\text{liquides}) > c_s(\text{gaz})$ et $\mu_0(\text{liquides}) \gg \mu_0(\text{gaz})$), la réflexion est forte ($R \approx 1$) et la transmission très faible ($T \ll 1$).

La même remarque peut être faite au sujet de l'interface solide-gaz. Ceci explique en particulier l'écho (réflexion) et la faible transmission, encore atténuée par plusieurs interfaces (comme dans le cas du double vitrage).

Si l'on veut diminuer l'écho, il s'agira de juxtaposer un matériau d'impédance proche de l'air (tenture, mousse...) au contact de la paroi solide.

Si l'on veut améliorer la transmission des ondes sonores (ou ultra-sonores) il s'agira d'améliorer l'interface (coller sa montre à son oreille pour en entendre le tic-tac ou le battement cardiaque, ajouter un gel entre le corps et l'émetteur-récepteur dans le cas de

- l'échographie).



Effet d'un changement de la surface du tuyau : *s'y retrouver*

si l'on suppose que $Z_1 = Z_2$ mais $S_1 \neq S_2$, on trouve :

$$R = |r_v \cdot r_p| = \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2$$

La réflexion sera forte (et donc la transmission faible) si S_2 est très différente de S_1 .

Il s'agira, si l'on veut augmenter la transmission, d'augmenter progressivement la surface, comme le fait un porte-voix ou bien encore le pavillon d'un phonographe ou celui d'un instrument de musique à vent.



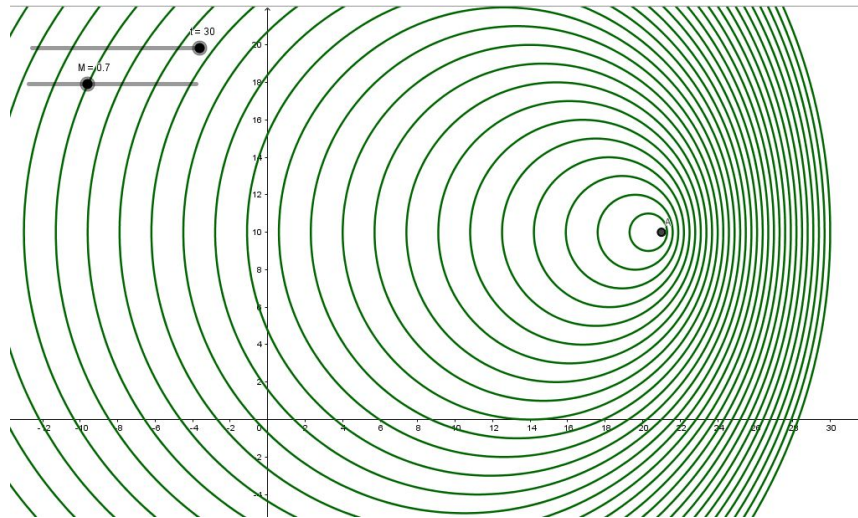
Phonographe d'Edison *photo*



Le phonographe d'Edison n'utilisait aucune amplification électronique, seulement un pavillon pour adapter l'impédance.

4. Emetteurs et récepteurs en mouvement

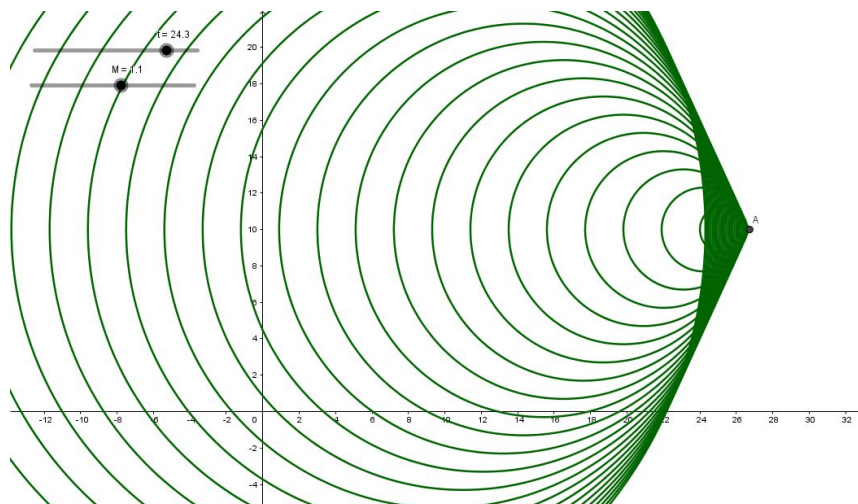
👁 Ondes émises par un avion subsonique *animation*



La fréquence des ondes sonores émises par un avion diffère pour l'observateur et pour l'émetteur.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Onde de choc provoquée par un avion supersonique *animation*



Les ondes sonores émises en de multiples endroits par un avion supersonique arrivent en même temps à l'observateur : c'est le "bang" supersonique.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

✳ Effet Doppler dans la vie courante : *s'y retrouver*


On connaît tous la variation de fréquence de la sirène des pompiers, par exemple : lorsque le véhicule se rapproche ($v_z < 0$), le son est aigu ($\nu = \nu_0 \cdot (1 - \frac{v_z}{c}) > \nu_0$), et lorsqu'il s'éloigne ($v_z > 0$), le son est grave ($\nu = \nu_0 \cdot (1 - \frac{v_z}{c}) < \nu_0$).

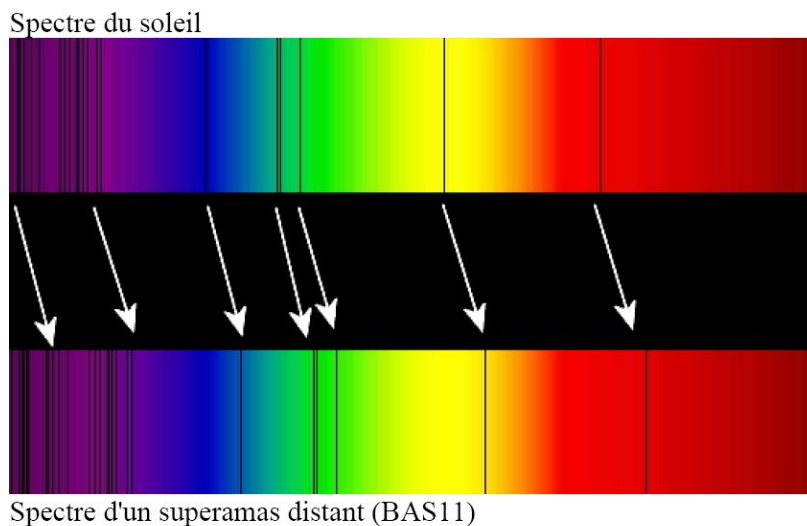
✳ Le "redshift" en astronomie : *s'y retrouver*

L'expansion de l'univers se caractérise par le fait que les astres s'éloignent de nous ($v_z > 0$). Aussi, les fréquences des ondes lumineuses qu'ils nous envoient nous paraissent plus faibles, ou leur longueurs d'onde plus grandes (on parle de déplacement vers le rouge, ou

en anglais de "redshift").

Comme la loi de Hubble stipule un rapport constant entre la vitesse et l'éloignement d'une étoile, la mesure de la vitesse d'un astre grâce au "redshift" permet de connaître sa distance à nous.

 **Spectres de deux étoiles** *photo*



Les raies sombres d'absorption de certains atomes (hydrogène en particulier) dans le spectre des étoiles sont d'autant plus déplacées vers le rouge que l'étoile s'éloigne plus vite de nous.

 **Le contrôle de la vitesse par radar :** *s'y retrouver*

les fameux radars sur la route mettent à contribution l'effet Doppler afin de mesurer la vitesse des véhicules : ces derniers réfléchissent l'onde qui leur est envoyée, en changeant la fréquence suivant leur vitesse.

 **Echographie Doppler :** *s'y retrouver*

la médecine utilise aussi l'effet Doppler pour mesurer la vitesse d'écoulement du sang dans les vaisseaux lors d'une échographie (envoi d'une onde ultrasonore).

III- Ondes sonores planes stationnaires

 **une onde acoustique stationnaire.** *schéma*

La figure 3 représente une onde acoustique stationnaire, avec des nœuds et des ventres pour la vitesse et pour la pression.

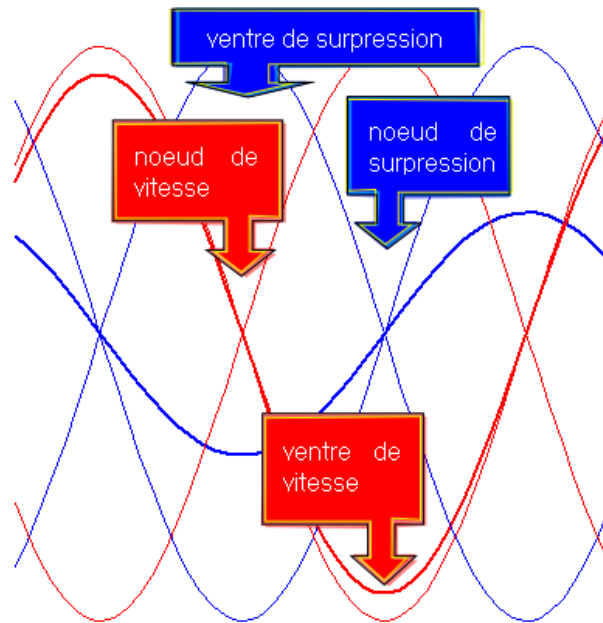




FIGURE 3 – une onde acoustique stationnaire.

 **Variation de la pression et la vitesse une onde acoustique stationnaire** *animation*
 | Au cours du temps, la pression et la vitesse une onde acoustique stationnaire varient.
 | Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

 **Conditions aux limites temporelles :** *s'y retrouver*
 | on peut souvent choisir l'origine des dates t telle que $\varphi_G = 0$.

6 Condition aux limites pour une extrémité ouverte : *théorème*

dans le cas d'une extrémité ouverte en $z = z_0$, la pression est la pression atmosphérique
 $P(z = z_0, t) = P_0$, donc \Rightarrow

$$p(z = z_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Il y a donc un nœud de pression en z_0 .

7 Condition aux limites pour une extrémité bouchée : *théorème*

dans le cas d'une extrémité bouchée en $z = z_0$, le fluide ne peut passer, donc \Rightarrow

$$v_z(z = z_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Il y a donc un nœud de vitesse en z_0 .

✳ Modes propres d'un tuyau fermé aux deux extrémités : s'y retrouver

A ces deux extrémités, il y a un nœud de vitesse. Aussi, $\varphi_F = \frac{\pi}{2}$, et on peut réécrire l'onde stationnaire pour l'harmonique p sous la forme

$$\begin{cases} v_z = -v_0 \cdot \sin\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ p = Z_c v_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Le numéro de l'harmonique (p) représente le nombre de fuseaux dans le tuyau :

$$L = p \frac{\lambda}{2} \quad \text{pour un tuyau fermé aux deux extrémités}$$

👁 Instruments à vent à embouchure de flûte *photo*



Un instrument de musique à vent dont le son est créé par la vibration de l'air se fendant sur un biseau appartient à la famille des flûtes. Canalisé par un conduit ou directement dirigé par les lèvres de l'instrumentiste, le filet d'air est mis en vibration sur la paroi qui constitue l'arête. Le déplacement d'air peut provenir de la bouche, quelquefois du nez, ou d'une soufflerie mécanique. Le biseau peut être :

droit sculpté dans une fenêtre comme celui de la flûte à bec (sur la photo),

en encoche de différentes formes comme celui taillé sur le rebord du tuyau de la quena des Andes Péruviennes,

en anneau comme celui de l'embouchure de la flûte traversière.

✳ Modes propres d'un tuyau ouvert aux deux extrémités s'y retrouver

dans ce cas, les deux extrémités ($z = 0$ et $z = L$) du tuyau sont ouvertes. A ces deux extrémités, il y a un nœud de pression. L'expression de l'onde stationnaire pour l'harmonique p est donc

$$\begin{cases} v_z = v_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ p = -Z_c v_0 \cdot \sin\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Aussi, $\varphi_F = 0$ et $k \cdot L = p \cdot \pi \Leftrightarrow$ Le numéro de l'harmonique (p) représente le nombre de fuseaux dans le tuyau :

$$L = p \frac{\lambda}{2} \quad \text{pour un tuyau ouvert aux deux extrémités}$$

👁 Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°1 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités *animation*

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités pour le mode fondamental (harmonique n°1). La pression ne varie pas aux extrémités (nœud de pression), alors que l'amplitude des variations de vitesse y est maximale (ventre de vitesse).

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités *schéma*

La figure 4 représente l'harmonique n°2 des ondes acoustiques stationnaires dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités.

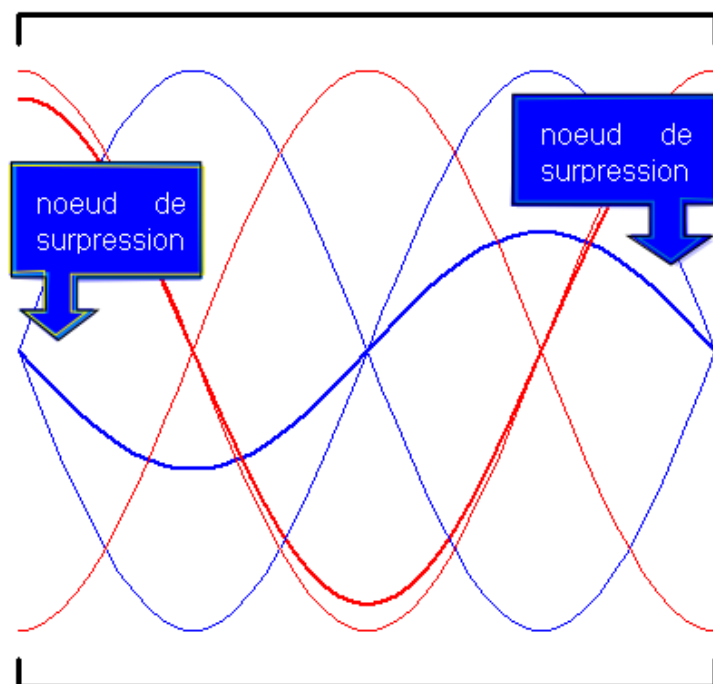


FIGURE 4 – Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités

👁 Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités *animation*

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités pour l'harmonique n°2. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise deux fuseaux de pression. Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Instruments à vent à anche *photo*



Pour produire un son, certains instruments à vent utilisent à une extrémité de leur tuyau une anche formée d'une lamelle (anche simple), libre ou battante, ou de deux lamelles (anche double) vibrant l'une contre l'autre, contrôlée ou non par les lèvres. Les anches sont le point commun d'une pléiade d'instruments aussi éclectiques que variés. De roseau, de métal ou de matière plastique, elles sont mises en vibration par une colonne d'air qui peut être produite :

par le souffle du musicien (clarinette, cf. photo, saxophone, hautbois...),

par une soufflerie mécanique (harmonium, accordéon, bandonéon...),

par une poche d'air alimentée par le souffle du musicien ou un soufflet (cornemuse, binou...).

☼ Modes propres d'un tuyau ouvert à une seule de ses extrémités *s'y retrouver*

dans ce cas, l'extrémité $z = 0$ est ouverte, ce qui impose un nœud de pression. Aussi, $\varphi_F = 0$. L'expression de l'onde stationnaire pour l'harmonique p est donc

$$\begin{cases} v_z = v_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ p = -Z_c v_0 \cdot \sin\left(2\pi \frac{p \cdot z}{2L}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

L'autre extrémité $z = L$ est fermée, ce qui impose un nœud de vitesse, soit $k \cdot L = p \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$L = p \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad \text{pour un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre}$$

👁 Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°1 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités *animation*

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour le mode fondamental (harmonique n°1). Sur l'extrémité ouverte, la pression ne varie pas (nœud de pression), alors que l'amplitude des variations de vitesse y est maximale (ventre de vitesse). Sur l'extrémité fermée, la vitesse ne varie pas (nœud de vitesse), alors que l'amplitude des variations de pression y est maximale (ventre de pression).

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités *schéma*

La figure 5 représente l'harmonique n°2 des ondes acoustiques stationnaires dans un tuyau ouvert à une de ses deux extrémités, et fermé à l'autre extrémité.

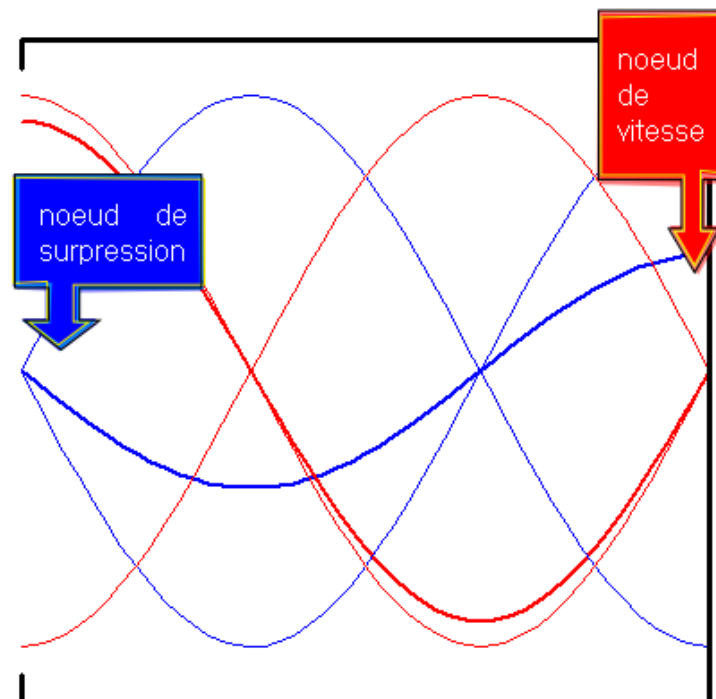


FIGURE 5 – Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités

👁 Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités *animation*

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour l'harmonique n°2. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise deux nœuds de pression, et deux nœuds de vitesse.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°3 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités *animation*

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour l'harmonique n°3. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise trois nœuds de pression, et trois nœuds de vitesse.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Le tube de Kundt : *vidéo*

Dans le tube de Kundt existent des ondes stationnaires sonores que l'on peut mesurer avec un micro à électret. On visualise pour certaines fréquences (de résonance) des fuseaux.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

✳ Jouer une note : *s'y retrouver*

le choix d'une note dans un instrument à vent consiste à changer la longueur L du tuyau, afin de sélectionner le fondamental. La longueur d'onde est d'autant plus grande que le tuyau est long : en allongeant le tuyau, on jouera une note plus grave.

Il existe différentes techniques pour jouer sur la longueur de L . On peut rallonger ou raccourcir le tuyau (avec une coulisse comme dans le cas du trombone)

On peut aussi utiliser un système à piston, comme dans le cas de la trompette.

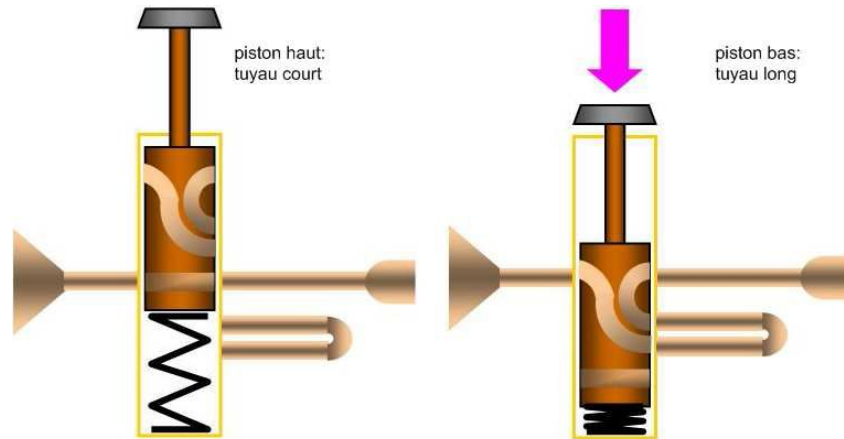
On peut boucher ou ouvrir des trous le long du tuyau avec les doigts (comme dans le cas de la flûte à bec), ou bien avec un système de clefs (comme dans le cas de la clarinette),

👁 Trombone à coulisse *photo*



On peut rallonger ou raccourcir le tuyau.

Trompette *photo*



On peut aussi utiliser un système à piston dans le cas de la trompette.

Instruments qui octavient : *s'y retrouver*

octavier veut dire sonner l'octave. C'est à dire donner, au lieu du son fondamental, le second harmonique.

$$L = p \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \Rightarrow \nu = \frac{c_s}{2L} \\ p = 2 \Rightarrow \nu' = \frac{2c_s}{2L} = 2.\nu \end{cases}$$

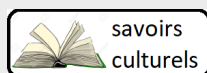
C'est le cas des instruments à vent qui, comme la flûte, ont deux extrémités ouvertes.

Instruments qui quintoient : *s'y retrouver*

quintoyer veut dire sonner la quinte. C'est à dire donner, au lieu du son fondamental, le troisième harmonique.

$$L = p \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow \nu = \frac{c_s}{4L} \\ p = 1 \Rightarrow \nu' = \frac{3c_s}{4L} = 3.\nu \end{cases}$$

C'est le cas des instruments à vent qui, comme la clarinette, ont une extrémité ouverte et l'autre bouchée.



Valeurs numériques (compléments) Ondes sonores dans les fluides

Quelques célérités des ondes sonores dans des gaz à 0°C

espèce	c_s en $m.s^{-1}$
O_2	317
air	331
N_2	339
H_2	1270

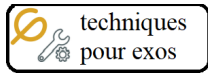
Quelques célérités des ondes sonores dans des liquides

espèce	c_s en $m.s^{-1}$
eau	1500
Hg	1450

Impédance acoustique de l'air : $Z_c = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Quelques niveaux sonores dans la vie de tous les jours

exemples	niveau sonore L
pièce silencieuse	30 dB
lave-vaisselle	50 dB
rue animée	75 dB
scooter accélérant	90 dB
avion qui décolle	120 dB
marteau-piqueur	130 dB



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Démonstration de l'équation de propagation des ondes acoustiques

En utilisant la vision eulérienne

à privilégier dans un milieu illimité

On considère que

- la pression varie peu : $P = P_0 + p$ avec $|p| \ll P_0$;
- la masse volumique non plus : $\mu = \mu_0 + \rho$ avec $|\rho| \ll \mu_0$;
- la vitesse du fluide $\vec{V} = \vec{0} + \vec{v}$ est petite devant la célérité de l'onde ($\|\vec{v}\| \ll c_s$).

Il faut linéariser :

- l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v})$$

- l'équation d'Euler

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}(p) \approx \mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

- et la compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \approx \frac{+1}{\mu_0} \frac{\rho}{p}$$

Puis il faut

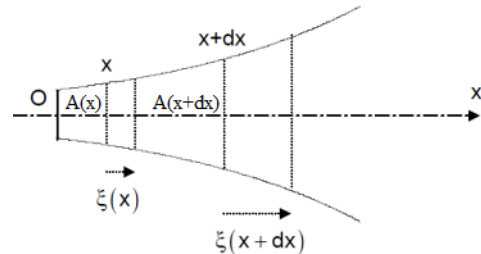
- éliminer la masse volumique μ

et obtenir deux équations (couplées) en vitesse et surpression.

En utilisant la vision lagrangienne

à privilégier dans un tuyau

On s'intéresse au système compris entre x et $x + dx$ qui se déplace de $\xi(x, t)$:



Il faut faire des bilans :

- de masse :

$$\frac{\partial(\mu A)}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v A)}{\partial x} = 0$$

- de quantité de mouvement :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

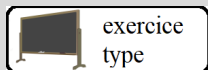
Il faut ensuite utiliser

- la compressibilité isentropique du fluide $\chi_S = \frac{-1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$ et la distensibilité du tuyau $D = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial P}$.

Pour obtenir deux équations (couplées) en vitesse et surpression.

Découpler les équations

Le plus simple est de re-dériver les deux équations différentielles couplées.



Exercice 14.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Démonstration de l'équation de d'Alembert pour les ondes sonores

1) Dans l'air illimité :

- 1.a) Montrer qu'un écoulement acoustique est potentiel.
- 1.b) Que vaut la vitesse \vec{v} en fonction du potentiel ϕ ?
- 1.c) Exprimer aussi la surpression en fonction du potentiel.
- 1.d) Montrer que le potentiel ϕ suit l'équation de D'Alembert.
- 1.e) En déduire que la surpression, la masse volumique et la vitesse suivent aussi l'équation de D'Alembert.

2) Dans un tuyau d'axe x , d'aire $A(x, t) = S_0 + S(x, t)$ (où $|S| \ll S_0$), de distensibilité $D = \frac{1}{S_0} \frac{\partial S}{\partial P}$:

- 2.a) Faire un bilan de masse.
- 2.b) Faire un bilan de quantité de mouvement.
- 2.c) En déduire l'équation de propagation de la vitesse et de la surpression.
- 2.d) Montrer que si $D = 0$, on retrouve la même équation que dans l'air illimité.

1)

- 1.a) En prenant le rotationnel de $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\text{grad}}(p)$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{v}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}}(p)) = \vec{0}$$

car le rotationnel d'un gradient est nul. Or \vec{v} étant variable, si $\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot} \vec{v}) = \vec{0}$, c'est que $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Aussi, \vec{v} est irrotationnel.

1.b) On peut donc écrire :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi) \Rightarrow \vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

1.c) En remplaçant la vitesse en fonction du potentiel ϕ dans $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{grad}(p)$, on trouve $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \overrightarrow{grad}\left(-\frac{p}{\mu_0}\right)$. On a donc $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{p}{\mu_0} + f(t)$. Comme le potentiel est défini à une fonction temporelle près ($\overrightarrow{grad}(\phi + g(t)) = \overrightarrow{grad}(\phi)$), on peut choisir $f(t) = 0$. Aussi, la surpression dérive du potentiel des vitesses par :

$$p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

1.d) En effet, quand on reporte $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi)$ et $p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ dans $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \text{div}(\vec{v})$, On trouve :

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} \text{div}(\overrightarrow{grad}(\phi)) = -\frac{1}{\chi_S} \Delta \phi$$

1.e) On peut dériver temporellement l'équation de d'Alembert portant sur le potentiel ϕ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Comme $p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ la surpression suit aussi :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta p$$

De plus, comme $\rho = \chi_S \cdot \mu_0 \cdot p$, on trouve aussi pour la masse volumique

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta \rho$$

Enfin, on peut dériver spatialement l'équation de d'Alembert portant sur le potentiel ϕ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\overrightarrow{grad}(\phi)) = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \overrightarrow{grad}(\text{div}(\overrightarrow{grad}(\phi))) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \overrightarrow{grad}(\text{div}(\vec{v}))$$

D'autre part, comme

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \vec{\nabla} \wedge (\overrightarrow{rot}(\vec{v})) = \overrightarrow{grad}(\text{div}(\vec{v}))$$

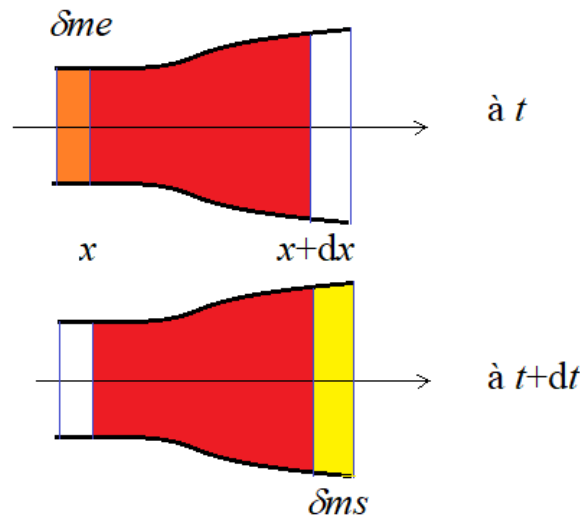
car $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Aussi, on trouve enfin pour la vitesse :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta \vec{v}$$

2)

2.a)

Faisons donc un bilan de masse (le système fermé est indicé f et le système ouvert indicé o) :



$$M_f(t) = M_o(t) + \delta m_e \quad \text{et} \quad M_f(t + dt) = M_o(t + dt) + \delta m_s$$

Comme $M_f(t) = M_f(t + dt)$, $\frac{M_o(t+dt) - M_o(t)}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{(\mu(x, t + dt) A(x, t + dt) dx - \mu(x, t) A(x, t) dx)}{dt}$$

$$+ \frac{(\mu(x + dx, t) v_x(x + dx, t) dt A(x + dx, t) - \mu(x, t) v_x(x, t) dt A(x, t))}{dt} = 0$$

donc $\frac{\partial(\mu A)}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v_x A)}{\partial x} = 0$ qui donne au premier ordre $\mu_0 \frac{\partial S}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_0 S_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

2.b)

Faisons donc un bilan de quantité de mouvement :

$$\vec{P}_f(t) = \vec{P}_o(t) + \delta m_e \vec{v}_e \quad \text{et} \quad \vec{P}_f(t + dt) = \vec{P}_o(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$$

Comme $\frac{\vec{P}_f(t+dt) - \vec{P}_f(t)}{dt} = (P_e A_e - P_s A_s) \vec{u}_x$,

$$\frac{\vec{P}_o(t + dt) - \vec{P}_o(t)}{dt} + \frac{\delta m_s \vec{v}_s}{dt} - \frac{\delta m_e \vec{v}_e}{dt} = (P_e A_e - P_s A_s) \vec{u}_x \Rightarrow$$

$$\frac{(\mu(x, t + dt) A(x, t + dt) dx v_x(x, t + dt) - \mu(x, t) A(x, t) dx v_x(x, t))}{dt}$$

$$+ \frac{(\mu(x + dx, t) v_x(x + dx, t) dt A(x + dx, t) v_x(x + dx, t) - \mu(x, t) v_x(x, t) dt A(x, t) v_x(x, t))}{dt}$$

$$= (P(x, t) A(x, t) - P(x + dx, t) A(x + dx, t))$$

donc

$$\frac{\partial(\mu A v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v_x^2 A)}{\partial x} = - \frac{\partial(P A)}{\partial x}$$

qui donne au premier ordre $\mu_0 S_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + P_0 \frac{\partial S}{\partial x} + S_0 \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

2.c) En utilisant

la distensibilité, on trouve : $S_1 = D S_0 p$

et la compressibilité : $\rho = \chi \mu_0 p$,

qui dans la précédente équation trouvée donnent $(D + \chi) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$.

3) On fait subir $\frac{\partial}{\partial x}$ à l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation trouvée à la question précédente :

$$(D + \chi) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = 0$$

En combinant les deux, on trouve donc l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0(D+\chi)} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ (en faisant les dérivations inverses, on serait arrivé à l'équation de D'Alembert pour v_x), qui fait apparaître la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(D+\chi)}}$.



Exercice 14.2 pour s'entraîner
Linéarisation de la conservation de la masse

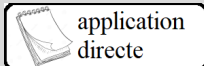
Que donne la conservation de la masse en mécanique des fluides à l'ordre nul et au premier ordre ?

On a vu en mécanique des fluides que la masse volumique vérifiait

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \cdot \vec{v}) = 0$$

A l'ordre nul : $\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \cdot \vec{0}) = 0$

et au premier ordre $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \cdot \vec{v}) = 0$.



Exercice 14.3 pour s'entraîner
Linéarisation de l'équation d'Euler

Que donne l'équation d'Euler à l'ordre nul et au premier ordre ? On négligera les effets de la pesanteur.

En considérant les phénomènes de viscosité négligeables, on peut appliquer l'équation d'Euler dans un référentiel galiléen (seuls le poids et les forces de pression interviennent),

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \cdot (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mu \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

A l'ordre nul, on trouve : $\vec{0} = \mu_0 \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P_0)$, qui est la relation fondamentale de l'hydrostatique. Le premier ordre est :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)$$

L'équation du mouvement d'une particule de fluide donne à l'ordre nul la relation fondamentale de l'hydrostatique et au premier ordre :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)$$



Exercice 14.4 pour s'entraîner
Linéarisation de la compressibilité

Que donne la linéarisation de la compressibilité isentropique ?

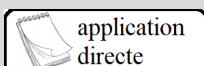
Le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

devient linéarisé : $\chi_S = \frac{\pm 1}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{P - P_0} = \frac{\pm 1}{\mu_0} \frac{\rho}{p}$ On retiendra la linéarisation de la compressibilité isentropique sous la forme :

$$\rho = \chi_S \cdot \mu_0 \cdot p$$

(les variations de masse volumique sont proportionnelles aux variations de pression).



Exercice 14.5 pour s'entraîner
Vitesse du son dans le cas des gaz

- 1) Montrer que la célérité du son dans un gaz parfait à la température T_0 est $c_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{M}}$
- 2) Application numérique dans le cas de l'air ($M = 29g \cdot mol^{-1}$), gaz diatomique ($\gamma = \frac{7}{5}$), à température ambiante ($T_0 = 25^\circ C$).

1) Si on assimile ce gaz à un gaz parfait, l'évolution isentropique est donnée par la loi de Laplace vue en thermodynamique ($P \cdot V^\gamma = cste$), qu'on peut réécrire $\frac{P}{\mu^\gamma} = cste$, soit $P = A \cdot \mu^\gamma$ où A est une constante. Ainsi, $\frac{\partial P}{\partial \mu} = A \cdot \gamma \cdot \mu^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\mu} \approx \gamma \frac{P_0}{\mu_0}$. On peut faire appel à l'équation d'état des gaz parfaits, $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ qui se réécrit $P = \frac{\mu \cdot R \cdot T}{M}$ où M est la masse molaire du gaz, et qui, à l'ordre nul donne $P_0 = \frac{\mu_0 \cdot R \cdot T_0}{M}$. On trouve une célérité des ondes sonores dans les gaz parfait qui suivent une évolution isentropique

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T_0}{M}}$$

où l'on voit que la célérité des ondes sonores croît comme la racine carrée de la température absolue.

2) Une application numérique dans le cas de l'air ($M = 29g \cdot mol^{-1}$), gaz diatomique ($\gamma = \frac{7}{5}$), à température ambiante ($T_0 = 25^\circ C$) donne :

$$c_s = 346m \cdot s^{-1}$$



Exercice 14.6 pour s'entraîner Propagation du son

- 1) Retrouver les équations de propagation du son à l'aide d'une description lagrangienne du fluide dans une conduite de section S constante.

Le déplacement, à l'instant t , d'une particule de fluide d'abscisse x lorsque le fluide est au repos est noté $\xi(x, t)$. La surpression et la masse volumique de cette tranche sont $p(x, t)$ et $\mu(x, t)$. La masse volumique $\mu(x, t)$ désigne, à l'instant t , la masse volumique de la particule suivie dans son mouvement, dont l'abscisse à la date t correspond à $x + \xi(x, t)$, et non pas x .

En évaluant la variation de masse volumique d'une tranche élémentaire de fluide, de section S et d'épaisseur dx au repos, on trouve :

$$\mu = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'équation du mouvement de cette même tranche de fluide donne :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En utilisant la relation $\mu = \mu_0 \cdot \chi_S \cdot p$ et la vitesse $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, on retrouve le système d'équations couplées réduit à la propagation unidimensionnelle :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



Exercice 14.7 pour s'entraîner Gaston, y'a l'téléphon qui son

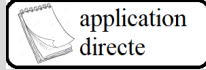
- 1) Gaston se demande pourquoi, connaissant la vitesse du son, lors d'une conversation téléphonique les paroles ne mettent pas plusieurs heures pour parvenir à un interlocuteur situé à plusieurs milliers de kilomètres. Que lui répondre ?

Un constructeur de casques audio sans fil donne les caractéristiques techniques suivantes :

- Réponse fréquentielle : $20 - 22000Hz$
- fréquence porteuse : $433MHz$.

- 2) Expliquer à Gaston ce que cela signifie.

- 1) Les ondes sonores sont converties en ondes électromagnétiques et réciproquement. Ce sont ces dernières qui se propagent.
- 2) Les $20 - 22000\text{Hz}$ correspondent au spectre audible et représentent les fréquences des enveloppes qui sont beaucoup plus faibles que la fréquence de l'onde porteuse, 433MHz . Il s'agit d'ondes électromagnétiques dans le domaine des micro-ondes ($\lambda = 70\text{cm}$) qui sont converties en ondes acoustiques au niveau des casques.



Exercice 14.8 pour s'entraîner

Octaves et demi-tons

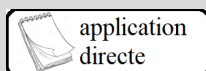
- 1) Rappeler la définition d'une octave.
- 2) Sur combien d'octaves s'étend le domaine audible ?
Une oreille exercée est capable de différencier un écart d'un dixième de demi-ton tempéré (il y a douze demi-tons tempérés dans une octave) dans de bonnes conditions d'écoute.
- 3) À quel écart relatif de fréquence cela correspond donc un dixième de demi-ton ?

- 1) Une octave correspond à un doublement de fréquence.
- 2) $\nu_{min} = 20\text{Hz}$ est la plus petite fréquence audible, $\nu_{max} = 20\text{kHz}$ est la plus grande. Le nombre N d'octaves est tel que $\nu_{max} = 2^N \cdot \nu_{min}$, soit encore

$$N = \frac{\ln\left(\frac{\nu_{max}}{\nu_{min}}\right)}{\ln(2)} = 10 \text{ octaves}$$

- 3) Un demi-ton tempéré correspond à un rapport de fréquences $\frac{\nu'}{\nu} = 2^{\frac{1}{12}}$. Un dixième de demi-ton tempéré correspond donc à un rapport de fréquences $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{120}}$.
Cela correspond à un écart relatif de fréquence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2^{\frac{1}{120}} - 1 = 0,6\%$$



Exercice 14.9 pour s'entraîner

Oiseaux et éléphants

- 1) Montrer que les longueurs d'onde audibles par l'oreille humaine dans des conditions standard sont à l'échelle humaine.
- 2) Pourquoi a priori un barrissement, est-il plus grave qu'un piaillage ?
- 3) Pourquoi peut-on entendre des fréquences que l'on ne sait pourtant pas chanter ?

- 1) Pour $c = 340\text{m/s}$, $\nu \in [20\text{Hz}; 20\text{kHz}]$ correspond à $\lambda \in [1,7\text{cm}; 17\text{m}]$.
Les longueurs d'onde sont de l'ordre de la taille de la source.
- 2) Un barrissement correspond donc à des longueurs d'onde plus grandes qu'un piaillage donc à un son plus grave.
- 3) Les cordes vocales ont un spectre d'émission moins étendu que le spectre de réception de l'oreille. La sensibilité très fine de cette dernière met en jeu des mécanismes subtils permis par une anatomie très raffinée.



Exercice 14.10 pour s'entraîner

Seuil de douleur

- 1) Dans le cas du seuil de douleur ($L = 120\text{dB}$), déterminer
 - 1.a) l'amplitude de la surpression p_{max} ;
 - 1.b) l'amplitude de la vitesse v_{max} .
- 2) Vérifier qu'on est bien dans le cas d'une perturbation.

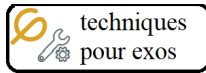
- 1) Dans le cas du seuil de douleur, une application numérique donne :

$$L = 120dB \Leftrightarrow I = 1W.m^{-2} = \langle p.v \rangle = Z_c \langle v^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{Z_c}$$

1.a) $\Leftrightarrow p_{max} = \sqrt{2.Z_c.I} = 30Pa.$

1.b) $\Leftrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2.I}{Z_c}} = 75mm/s$

- 2) On vérifie bien que $p_{max} \ll P_0 = 10^5 Pa$ et $v_{max} \ll c_s = 340m.s^{-1}$.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Etudier la discontinuité d'une onde acoustique à une interface

Ondes en présence à une interface

Il existe trois ondes :

- l'onde incidente $\psi_i \left(t - \frac{z}{c_1} \right)$ telle que $\vec{v}_i = \psi_i \left(t - \frac{z}{c_1} \right) \vec{u}_z$ et $p_i = Z_1 \psi_i \left(t - \frac{z}{c_1} \right)$ dans le premier tuyau ($z < 0$);
- l'onde réfléchiée $\psi_r \left(t + \frac{z}{c_1} \right)$ telle que $\vec{v}_r = \psi_r \left(t + \frac{z}{c_1} \right) \vec{u}_z$ et $p_r = -Z_1 \psi_r \left(t + \frac{z}{c_1} \right)$ dans le premier tuyau ($z < 0$);
- l'onde transmise $\psi_t \left(t - \frac{z}{c_2} \right)$ telle que $\vec{v}_t = \psi_t \left(t - \frac{z}{c_2} \right) \vec{u}_z$ et $p_t = Z_2 \psi_t \left(t - \frac{z}{c_2} \right)$ dans le second tuyau ($z > 0$).

Conditions de continuité à l'interface

Il s'agit d'abord de déterminer la condition à l'interface. Dans ce cas, les conditions de continuité à l'interface sont :

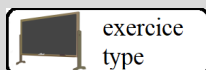
- la continuité du débit volumique $S_1 v(x = x_0^-, t) = S_2 v(x = x_0^+, t) \forall t$;
- la continuité de la pression $p(x = x_0^-, t) = p(x = x_0^+, t) \forall t$ **il n'y a rien entre les deux tuyaux ! Sinon, il faut faire une étude mécanique du milieu les séparant.**

Détermination des coefficients

Le tout donne un système d'équations qui permet de déterminer les coefficients de réflexion :

- r_v en vitesse
 - ou r_p en surpression
- et de transmission
- t_v en vitesse
 - ou t_p en surpression

Le calcul du coefficient de réflexion énergétique mène à $R = |r|^2$. On en déduit le coefficient de transmission énergétique par $T = 1 - R$.



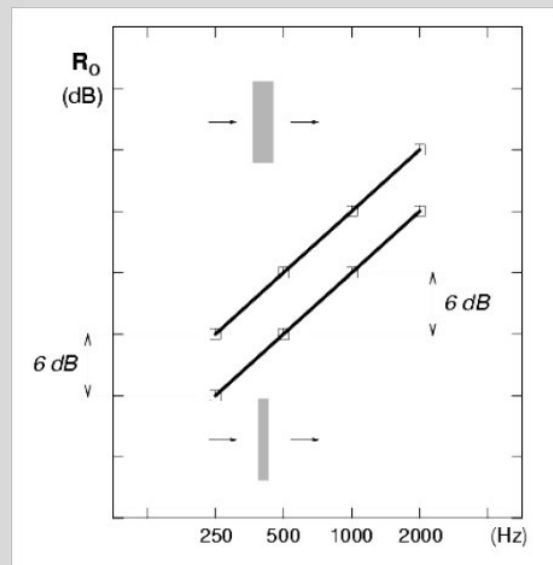
Exercice 14.11 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Réflexion - transmission des ondes acoustiques progressives

Une formule simple de l'indice d'affaiblissement pour une onde acoustique ayant une incidence normale sur une paroi montre que l'atténuation augmente de 6 dB avec le doublement de la masse par unité de surface, mais également de 6 dB chaque fois que la fréquence est doublée. Ceci est connu sous le nom de loi de masse, car seuls les effets d'inertie sont pris en compte. Malgré sa simplicité, cette dernière fournit une bonne estimation du comportement des parois. (d'après http://vibroacoustique.fr/cours/M03_C01/co/grain08.html).

On modélise le mur par une paroi de masse M , de section S séparant deux pièces remplies d'air d'impédance acoustique Z_a .

- 1) Déterminer les coefficients de transmission et de réflexion pour une onde acoustique plane progressive harmonique de fréquence ν se propageant d'une pièce vers une autre.
- 2) En déduire la loi de masse.



1)

Onde incidente :

$$\begin{cases} p_i = p_{i_m} e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \\ v_i = \frac{p_{i_m}}{Z} e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \end{cases}$$

Onde réfléchi : ne pas oublier le changement de signe pour v_r , classique mais piègeant !

$$\begin{cases} p_r = p_{r_m} e^{j\omega(t + \frac{x}{c})} \\ v_r = -\frac{p_{r_m}}{Z} e^{j\omega(t + \frac{x}{c})} \end{cases}$$

Onde transmise :

$$\begin{cases} p_t = p_{t_m} e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \\ v_t = \frac{p_{t_m}}{Z} e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \end{cases}$$

Les vitesses de l'air au contact du mur de part et d'autre de celui-ci s'identifient, bien sûr, à sa vitesse, $j\omega X_m e^{j\omega t}$, on a donc :

$$v_i(x = 0^-, t) + v_r(x = 0^-, t) = v_t(x = 0^+, t) = j\omega X_m e^{j\omega t}$$

soit :

$$p_{i_m} - p_{r_m} = p_{t_m} = j Z \omega X_m \quad (1)$$

Quant à la pression, si elle était continue, le bilan des forces de pression sur le mur serait nul et celui-ci ne se déplacerait pas. Il faut donc remplacer cette hypothèse de continuité par un bilan de force sur le mur, sans oublier le rappel élastique :

$$M \ddot{X} = + (p_{i_m} + p_{r_m} - p_{t_m}) S e^{j\omega t}$$

soit :

$$p_{i_m} + p_{r_m} - p_{t_m} = \frac{-M \omega^2}{S} X_m \quad (2)$$

Le coefficient de transmission est $t = \frac{p_{t_m}}{p_{i_m}}$. La première équation donne dans la seconde :

$$p_{i_m} - p_{t_m} = \frac{-M \omega^2}{2S} X_m$$

soit :

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{-M \omega^2}{2j Z \omega S}$$

D'où on tire :

$$t = \frac{2j S Z}{2j S Z - M \omega}$$

Donc le coefficient de réflexion est $r = \frac{p_{r_m}}{p_{i_m}}$. Comme (1) donne $1 - r = t$, on trouve

$$r = 1 - t = 1 - \frac{2j S Z}{2j S Z - M \omega} = \frac{-M \omega}{2j S Z - M \omega} = \frac{1}{1 - \frac{j \omega_0}{\omega}}$$

avec $\omega_0 = \frac{2 S Z}{M}$.

2) Loi de masse

Ordre de grandeur si on fait apparaître l'épaisseur du mur e :

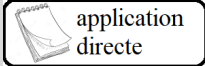
$$\omega_0 = \frac{2 e Z}{\mu} \approx \frac{2 \times 0,1 \times 440}{6 \times 10^3} \approx 10^{-2} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans le domaine acoustique, on est donc aux hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$).

$$R \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \Rightarrow R_{\text{dB}} = 10 \log R = 20 \log \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)$$

Donc :

- si la fréquence double $\nu' = 2\nu$, $R'_{\text{dB}} = R_{\text{dB}} + 20 \log(2) = R_{\text{dB}} + 3 \text{ dB}$
 - si la masse surfacique double $\nu'_0 = \nu_0/2$, $R'_{\text{dB}} = R_{\text{dB}} + 20 \log(2) = R_{\text{dB}} + 3 \text{ dB}$
- (cqfd).



Exercice 14.12 pour s'entraîner

Forme des ondes acoustiques planes

On peut écrire les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sous trois types :

- $\phi = cste$, qu'on exclut habituellement ;
- $\phi = f\left(t - \frac{z}{c_s}\right)$, onde plane progressive vers les z croissants ;
- $\phi = g\left(t + \frac{z}{c_s}\right)$, onde plane progressive vers les z décroissants.

Déterminer alors la forme de :

- 1) la surpression
- 2) la vitesse.

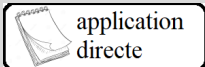
1) Comme $p(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu_0 \left[\frac{\partial f\left(t - \frac{z}{c_s}\right)}{\partial t} + \frac{\partial g\left(t + \frac{z}{c_s}\right)}{\partial t} \right]$.

D'autre part, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z = \left[\frac{\partial f\left(t - \frac{z}{c_s}\right)}{\partial z} + \frac{\partial g\left(t + \frac{z}{c_s}\right)}{\partial z} \right] \vec{u}_z$. Du potentiel, on déduit la pression :

$$p(z, t) = -\mu_0 \cdot \left[f' \left(t - \frac{z}{c_s} \right) + g' \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \right]$$

- 2) et la vitesse :

$$\vec{v} = \left[-f' \left(t - \frac{z}{c_s} \right) + g' \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \right] \frac{\vec{u}_z}{c_s}$$



Exercice 14.13 pour s'entraîner

Conditions de continuité à une interface

$v_z = \psi$. Montrer que les ondes transmises et réfléchies à une interface 1 / 2 sont

$$\begin{cases} \psi_t(t, z = 0^+) = \frac{2}{Z_1 + S_2} \psi_i(t, z = 0^-) = \frac{S_1}{S_2} \frac{2Z_1}{Z_1 + S_2} \psi_i(t, z = 0^-) \\ \psi_r(t, z = 0^-) = \frac{Z_1 - S_1}{Z_1 + S_2} \psi_i(t, z = 0^-) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + S_2} \psi_i(t, z = 0^-) \end{cases}$$

La continuité de la pression est vraie à l'ordre nul (en l'absence d'onde $P_0(z = 0^-, t) = P_0(z = 0^+, t) \forall t$), et vraie donc aussi pour la perturbation

$$p(z = 0^-, t) = p(z = 0^+, t) \forall t$$

soit

$$Z_1 \cdot [\psi_i(t, z = 0^-) - \psi_r(t, z = 0^-)] = Z_2 \cdot \psi_t(t, z = 0^+) \forall t$$

La continuité du débit devient

$$S_1 \cdot [\psi_i(t, z = 0^-) + \psi_r(t, z = 0^-)] = S_2 \cdot \psi_t(t, z = 0^+) \forall t$$

Les deux équations de continuité donnent par différence

$$2 \cdot \psi_i(t, z = 0^-) = \left[\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{S_2}{S_1} \right] \cdot \psi_t(t, z = 0^+)$$

de même, on trouve à partir des deux équations de continuité

$$\frac{Z_1}{Z_2} \cdot [\psi_i(t, z = 0^-) - \psi_r(t, z = 0^-)] = \frac{S_1}{S_2} \cdot [\psi_i(t, z = 0^-) + \psi_r(t, z = 0^-)]$$



Exercice 14.14 pour s'entraîner

Coefficient de réflexion en amplitude

Déterminer les coefficients de réflexion en amplitude de la vitesse et de la surpression à une interface.

On part des conditions de continuité.

$$r_v = \frac{\psi_r(z = 0^+, t)}{\psi_i(z = 0^-, t)} = \frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$

et

$$r_p = \frac{-Z_1 \cdot \psi_r(z = 0^-, t)}{Z_1 \cdot \psi_i(z = 0^-, t)}$$

On trouve

$$r_p = -\frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} = -r_v$$



Exercice 14.15 pour s'entraîner

Coefficients de transmission en amplitude

Déterminer les coefficients de transmission en amplitude de la vitesse et de la surpression à une interface.

On part des conditions de continuité.

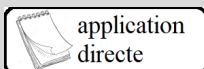
$$\tau_v = \frac{\psi_t(z = 0^+, t)}{\psi_i(z = 0^-, t)}$$

et

$$\tau_p = \frac{Z_2 \cdot \psi_t(z = 0^+, t)}{Z_1 \cdot \psi_i(z = 0^-, t)}$$

On trouve

$$\tau_p = \frac{Z_2}{Z_1} \tau_v = \frac{2 \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$



Exercice 14.16 pour s'entraîner

Coeur qui bat

On donne les masses volumiques de l'eau $\mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de l'air $\mu_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ainsi que la célérité des ondes acoustiques dans l'air $c_a = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et dans l'eau $c_e = 4 \cdot c_a$.

- 1) Estimer l'impédance sonore de l'air et de l'eau et les comparer.
- 2) Calculer le coefficient de transmission énergétique T d'une onde sonore à l'interface air-eau.
- 3) Expliquer pourquoi l'on entend pas naturellement les battements de cœur d'une autre personne à moins, par exemple, de coller l'oreille contre son corps.

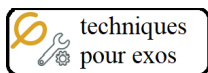
- 1) Pour l'air, $Z_a = 440 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.
Pour l'eau, $Z_e = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$Z_e \gg Z_a$$

- 2) Le coefficient de transmission énergétique est donné par

$$T = \frac{4Z_a \cdot Z_e}{(Z_a + Z_e)^2} = 0,1\%$$

3) Une onde sonore est très peu transmise à l'interface air/eau. L'impédance du corps est voisine de celle de l'eau. En collant l'oreille suffisamment, la couche d'air peut être rendue négligeable (plus fine que les longueurs d'onde acoustiques) et l'interface sépare alors deux milieux d'impédance voisine.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Ondes acoustiques planes stationnaires harmoniques

Utilisation des OPSM

Dans un milieu cylindrique limité (entre $z = 0$ et $z = \ell$), on peut chercher les solutions sous la forme d'ondes planes stationnaires :

$$\Psi(z, t) = \Psi_0 \cos(\omega t + \phi_t) \cos(kz + \phi_z)$$

Attention : si le tuyaux n'est pas cylindrique (cone par exemple), les ondes ne seront pas planes !

Dualité des ondes acoustiques

Ψ est la vitesse v ou la surpression. Une relation de couplage entre p et v montre que les deux sont en quadrature de phase : un nœud pour l'un correspond à un ventre pour l'autre.

Modes propres du tuyau

Les conditions aux limites imposent une quantification de ω (et donc k). Seuls certains modes peuvent exister.

Conditions aux limites

Conditions aux limites pour une extrémité ouverte :

dans le cas d'une extrémité ouverte en $z = z_0$, la pression est la pression atmosphérique $P(z = z_0, t) = P_0$, donc il y a donc un nœud de pression en z_0 :

$$p(z = z_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Condition aux limites pour une extrémité bouchée :

dans le cas d'une extrémité bouchée en $z = z_0$, le fluide ne peut passer, donc il y a donc un nœud de vitesse en z_0 :

$$v_z(z = z_0, t) = 0 \quad \forall t$$

Modes propres d'un tuyau fermé aux deux extrémités :

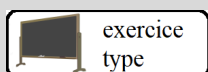
à ces deux extrémités, il y a un nœud de vitesse. La longueur du tuyau ℓ correspond à un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ de fuseaux : $\ell = n \frac{\lambda}{2}$.

Modes propres d'un tuyau ouvert aux deux extrémités

à ces deux extrémités, il y a un nœud de pression. La longueur du tuyau ℓ correspond à un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ de fuseaux : $\ell = n \frac{\lambda}{2}$.

Modes propres d'un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre

à une extrémité, il y a un nœud, à l'autre un ventre. La longueur du tuyau ℓ correspond à un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ de fuseaux et un demi fuseau en plus : $\ell = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$.



Exercice 14.17 (le prof fait cet exercice type jeudi) Ondes acoustiques stationnaires dans un tuyau

L'analyse harmonique du son émis par un diapason posé sur sa caisse de résonance contient essentiellement un harmonique de fréquence $\nu = 440\text{Hz}$ (la note est un la). La caisse de résonance est un parallélépipède creux, dont la plus grande dimension est $L = 19,5\text{cm}$, l'un des bouts étant fermé, l'autre ouvert.

1) Comment expliquer le choix de cette dimension ?



1) Une extrémité de la caisse est bouchée, l'autre libre. Pour le premier harmonique, $L = \frac{\lambda}{4}$. Le mode fondamental d'oscillation d'ondes sonores planes se propageant dans la direction des arêtes de plus grande dimension a donc une fréquence égale à $\nu' = \frac{c}{4.L}$ avec $c = 340m.s^{-1}$ (vitesse du son dans l'air atmosphérique à $20^\circ C$). On obtient

$$\nu' = \frac{c}{4.L} = 436Hz$$

très proche de la fréquence du son émis, dont la fréquence est imposée par les vibrations du diapason. La caisse du diapason est bien une caisse de résonance.



Exercice 14.18 pour s'entraîner Onde stationnaire et OPPM

On s'intéresse à une onde stationnaire dont la vitesse est

$$v_z = v_0 \cdot \cos(k.z + \varphi_F) \cdot \cos(\omega.t + \varphi_G)$$

1) Montrer qu'elle due à la superposition

- d'une OPPM incidente $\psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) = \frac{v_0}{2} \cos(\omega.t - k.z + \varphi_G - \varphi_F)$
- et d'une OPPM réfléchie $\psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) = \frac{v_0}{2} \cos(\omega.t + k.z + \varphi_G + \varphi_F)$

2) En déduire que la pression de l'onde stationnaire est

$$p = -Z_c v_0 \cdot \sin(k.z + \varphi_F) \cdot \sin(\omega.t + \varphi_G)$$

1) Elle peut se réécrire

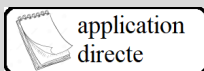
$$v_z = \frac{v_0}{2} [\cos(\omega.t - k.z + \varphi_G - \varphi_F) + \cos(\omega.t + k.z + \varphi_G + \varphi_F)]$$

La pression est donc la superposition

- d'une OPPM incidente $Z_c \psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) = Z_c \frac{v_0}{2} \cos(\omega.t - k.z + \varphi_G - \varphi_F)$
- et d'une OPPM réfléchie $-Z_c \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) = -Z_c \frac{v_0}{2} \cos(\omega.t + k.z + \varphi_G + \varphi_F)$

2) L'onde de pression peut donc se réécrire

$$p = -Z_c \frac{v_0}{2} [\cos(\omega.t - k.z + \varphi_G - \varphi_F) - \cos(\omega.t + k.z + \varphi_G + \varphi_F)]$$



Exercice 14.19 pour s'entraîner Caractéristiques d'une onde stationnaire

1) Montrer que les nœuds pour la pression et les ventres pour la vitesse sont aux mêmes endroits, alors que les nœuds pour la vitesse et les ventres pour la pression coïncident.

2) En déduire que les fuseaux ont une largeur $\delta z = \frac{\lambda}{2}$.

1) Les nœuds pour la pression correspondent à

$$p = 0 \forall t \Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi \text{ où } q \in \mathbb{Z}$$

et les ventres pour la vitesse à l'amplitude de v_z maximale

$$\Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi \text{ où } q \in \mathbb{Z}$$

Les nœuds pour la vitesse correspondent à

$$v_z = 0 \forall t \Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi + \frac{\pi}{2} \text{ où } q \in \mathbb{Z}$$

et les ventres pour la pression à l'amplitude de p maximale

$$\Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi + \frac{\pi}{2} \text{ où } q \in Z$$

2) Les fuseaux (aussi bien pour la pression que pour la vitesse) sont l'espace entre deux nœuds consécutifs

$$\Leftrightarrow k.\delta z = \pi$$

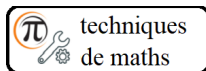


Exercice 14.20 pour s'entraîner
Harmoniques d'un tuyau

1) Quelle est la fréquence de la première harmonique émise par un tuyau de longueur $L = 10m$ fermé à ses deux extrémités ?

1) La longueur du tuyau est égale à deux demi-longueurs d'onde pour la première harmonique : $L = \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow$

$$\nu = \frac{c}{L} = 34Hz$$



Techniques mathématiques à maîtriser Effectuer des développements limités

Développements limités

On peut développer la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = a$ par la formule de Taylor :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

En particulier :

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$;
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + 0(x^n)$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n})$;
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1})$;
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + 0(x^5)$.

Linéarisation d'une expression : méthode des perturbations

Exemple du pendule simple aux petits angles.

L'équation du pendule simple est : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

A l'ordre 0, $\theta = \theta_0 = 0$, et puisque c'est une constante, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, donc la relation est vraie à l'ordre 0.

On perturbe cette solution : $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_1$ avec $|\theta_1| \ll 1$ (un "petit angle").

A l'ordre 1, l'équation devient, puisque $\sin \theta \approx \theta_1$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \theta_1 = 0$$

Détermination d'une distance approximative

Exemple : trouver la distance AB avec $A = (a, 0, 0)$, $B = (x, y, d)$ et $|a|, |x|, |y|$ qui sont petits devant d .

Une possibilité est d'exprimer celle-ci grâce à :

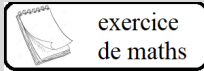
$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2} = (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^{\frac{1}{2}} = (a^2 + x^2 + y^2 + d^2 - 2ax)^{\frac{1}{2}}$$

Le terme d'ordre 0 (ici d) doit ensuite être mis en facteur :

$$AB = \left(d^2 \left[1 + \left(\frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{d^2} \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} = d(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{d^2} \right)$$

soit le développement limité :

$$AB \approx d + \frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{2d}$$



Exercice 14.21 pour s'entraîner

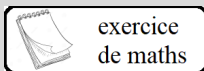
Linéarisation d'une équation différentielle autour d'une position d'équilibre

1) Linéariser la relation $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ autour de la solution $\theta = \theta_0$.

1) Autour de la solution $\theta = \theta_0 + \varepsilon : \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ et

$$\sin \theta = \sin(\theta_0 + \varepsilon) = \sin(\theta_0) + \varepsilon \cos(\theta_0)$$

donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ devient à l'ordre 1 : $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \cos(\theta_0) \varepsilon = 0$.



Exercice 14.22 pour s'entraîner

Linéarisation d'une équation différentielle autour d'une autre position d'équilibre

1) Linéariser la relation $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \gamma(\theta - a)^2 = 0$ autour de la solution $\theta = \theta_0$.

1) Autour de la solution $\theta = \theta_0 + \varepsilon :$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

et

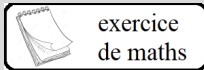
$$(\theta - a)^2 = (\theta_0 + \varepsilon - a)^2 = (\theta_0 - a)^2 + 2(\theta_0 - a)\varepsilon + \varepsilon^2 = 2(\theta_0 - a)\varepsilon$$

au premier ordre.

Donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \gamma(\theta - a)^2 = 0$ devient à l'ordre 1 : $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \lambda \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\gamma(\theta_0 - a)\varepsilon = 0$.

Or à l'ordre 0, on trouve $\theta_0 - a = 0$, donc la linéarisation est :

$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \lambda \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ (qu'on aurait pu trouver directement car le terme $(\theta - a)^2$ n'est pas linéaire).

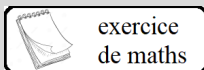


Exercice 14.23 pour s'entraîner

Linéarisation d'une fonction connue autour d'un point

1) Linéariser la fonction $f(x) = \frac{x(a+x)}{b+cx}$ autour de $x = 0$.

1) Autour de $x = 0$, $f(x) \approx \frac{ax}{b}$.



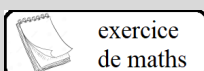
Exercice 14.24 pour s'entraîner

Linéarisation d'une fonction inconnue autour d'un point

1) Linéariser la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ autour de (f_0, x_0) .

1) Autour de (f_0, x_0) , $f = f_0 + f' \Rightarrow df = f'$ et $x = x_0 + x' \Rightarrow dx = x'$, donc la fonction devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} = \frac{f'}{x'}$$



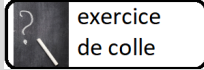
Exercice 14.25 pour s'entraîner

Linéarisation d'une expression à plusieurs variables autour d'un point

1) Linéariser l'expression $\frac{x(a+x)}{b+cx} + \frac{xy}{d} + gy + \sin x = 0$ autour de $(x = 0, y = 0)$.

1) Autour de $x = 0$ et $y = 0$,

$$\frac{ax}{b} + 0 + gy + x \approx 0$$

exercice
de colle**Exercice 14.26**
Vent et propagation du son

On considère un écoulement d'air à vitesse constante $u_0 > 0$ (dans la direction et le sens de l'axe (Ox)), la même en tout point. Dans cet écoulement se propage une onde sonore plane progressive dans la direction de l'axe (Ox) .

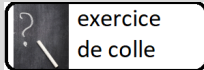
1) Trouver l'équation de propagation de la surpression acoustique $p(x, t)$ dans le cadre de l'approximation acoustique.

Une O.P.P.M. se propage dans l'écoulement. En notation complexe $p(x, t)$ s'écrit

$$\tilde{p}(x, t) = \tilde{p}_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

2) Trouver la relation de dispersion entre k et ω et interpréter le résultat obtenu.

3) Que doit-on entendre par l'expression «le vent porte le son» ?

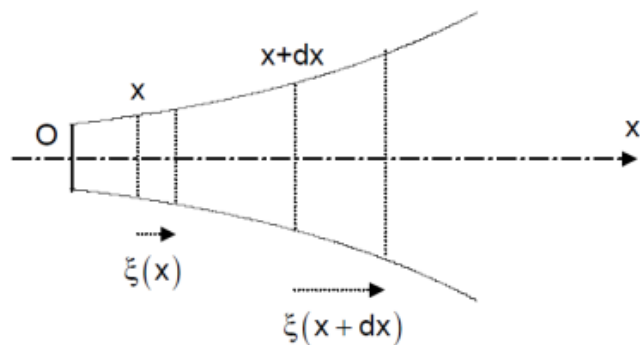


exercice
de colle

Exercice 14.27 Haut-parleur exponentiel

Un haut-parleur à pavillon est un haut-parleur ou un élément de haut-parleur qui utilise un pavillon acoustique pour augmenter l'efficacité globale du ou des éléments d'entraînement. Une forme courante (figure à droite) consiste en un moteur à chambre de compression qui produit des ondes sonores à l'aide d'un petit diaphragme métallique mis en vibration par un électroaimant, fixé à un pavillon, un conduit évasé pour conduire les ondes sonores à l'air libre. Un autre type est un haut-parleur de graves monté dans une enceinte de haut-parleur qui est divisée par des cloisons internes pour former un conduit évasé en zigzag qui fonctionne comme un pavillon ; ce type est appelé haut-parleur à pavillon replié. Le pavillon sert à améliorer l'efficacité du couplage entre le haut-parleur et l'air. Le pavillon peut être considéré comme un « transformateur acoustique » qui assure l'adaptation d'impédance entre le matériau relativement dense du diaphragme et l'air moins dense. Il en résulte une plus grande puissance de sortie acoustique pour un haut-parleur donné.

La partie étroite du pavillon située proche du haut-parleur est appelée "gorge" et la grande extrémité, la plus éloignée du haut-parleur, est appelée « bouche ».



https://fr.wikipedia.org/wiki/Haut-parleur_à_pavillon

Un tuyau présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe des x et a une section dépendante de l'abscisse, dont le profil est $S(x) = S_0 \exp(mx)$ où m est une constante strictement positive telle que $m\lambda \ll 1$. Il est rempli d'un fluide dont la masse volumique au repos est μ_0 et la pression P_0 à l'équilibre. On désigne par $p(x, t)$ la surpression et par $\xi(x, t)$ l'élongation en présence d'une perturbation acoustique. La pression totale est : $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$.

1) Equation de propagation

1.a) En appliquant le théorème de la quantité de mouvement à une tranche de fluide d'épaisseur dx se trouvant à l'abscisse x , montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

1.b) Montrez que :

$$p = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x}$$

1.c) Dédurre des précédentes relations la relation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + m \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

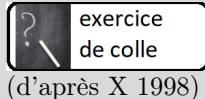
2) Résolution

2.a) Chercher des solutions sous la forme

$$\underline{\xi}(x, t) = \underline{\xi}_0 \exp[-i(\omega t - kx)]$$

2.b) Que faut-il pour que l'onde se propage ?

2.c) Discuter alors de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.



exercice
de colle

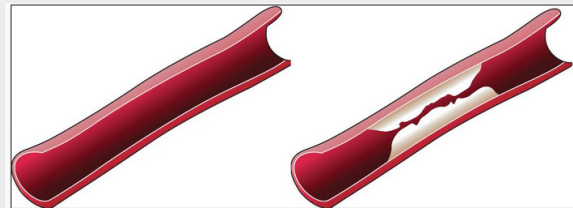
(d'après X 1998)

Exercice 14.28 L'artériosclérose

La maladie coronarienne est aussi connue sous le nom d'athérosclérose.

Chez une personne en santé, les artères sont flexibles et élastiques. L'athérosclérose est une maladie causée par l'accumulation de dépôts graisseux et d'autres substances à la surface interne des artères. Au fil des ans, ces dépôts forment des plaques ce qui rend les artères plus rigides et diminue leur diamètre interne ; la circulation sanguine peut alors devenir insuffisante pour assurer un apport en oxygène adéquat aux différentes parties du corps. L'athérosclérose peut se produire dans toutes les artères du corps dont les artères du cœur (coronaires) ; l'information qui suit concerne les artères coronaires. Lorsque les artères coronaires (artères qui nourrissent le cœur) sont affectées, on parle alors de maladie coronarienne.

Le rétrécissement progressif du diamètre des artères peut réduire petit à petit l'apport de sang au cœur et progressivement donner ce qu'on appelle de l'angine. Par contre, s'il y a un blocage soudain d'une artère par un caillot (associé ou non à un rétrécissement), on parlera de syndrome coronarien aigu (infarctus du myocarde ou angine instable).



<https://www.icm-mhi.org/fr/soins-et-services/maladies-cardiovasculaires/arteriosclerose-maladie-coronarienne>

On s'intéresse à l'artère aorte, de diamètre 10mm. La masse volumique du sang peut être assimilée à celle de l'eau ($\mu_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). On prendra pour le débit cardiaque humain $Q = 4,5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$.

On considère un tube élastique de longueur infinie que l'on repère avec un axe Ox . On supposera par la suite que toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de l'abscisse x et du temps t . A l'intérieur de ce tube on trouve un fluide que l'on considère non visqueux. On notera $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ la masse volumique de ce fluide ; $P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$ la pression et $u(x, t)$ sa vitesse que l'on supposera dirigée selon l'axe Ox . Les grandeurs ρ_0 et P_0 correspondent à l'état du fluide au repos. Les effets de pesanteur sont négligés.

1)

1.a) Justifier que l'on peut négliger les effets de la viscosité pour étudier la dynamique de la circulation dans cette partie du système circulatoire. Ecrire l'équation d'Euler pour le fluide.

1.b) Linéariser l'équation obtenue. A quelles conditions peut-on le faire ? [On vérifiera à la fin de cette section que ces conditions sont bien satisfaites.]

2) Le tube est élastique de section variable $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$.

2.a) Etablir l'équation exprimant la conservation de la matière. [On considérera le fluide dans le volume compris entre x et $x + dx$.]

2.b) Linéariser cette équation. En utilisant le coefficient de compressibilité isentropique du fluide χ et le coefficient de distensibilité du tube $D = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial P}$, obtenir une équation reliant $\frac{\partial P_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. En déduire l'équation de propagation pour les ondes dans ce tube et montrer que leur célérité est donnée par :

$$\frac{1}{c^2} = \rho_0 (\chi + D)$$

3) La masse volumique du sang ainsi que sa compressibilité sont semblables à celles de l'eau. La célérité du son dans l'eau vaut $c_s = 1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer la célérité des ondes dans un tube métallique dont la distensibilité vaut $D_m = 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ et dans un vaisseau sanguin où la distensibilité vaut $D_v = 4 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Comparer les valeurs obtenues.

4) On place en $x = 0$ une pompe imposant un débit massique $Q_m(t)$ à l'origine. On suppose que cet écoulement est tel que les vitesses et surpressions sont petites.

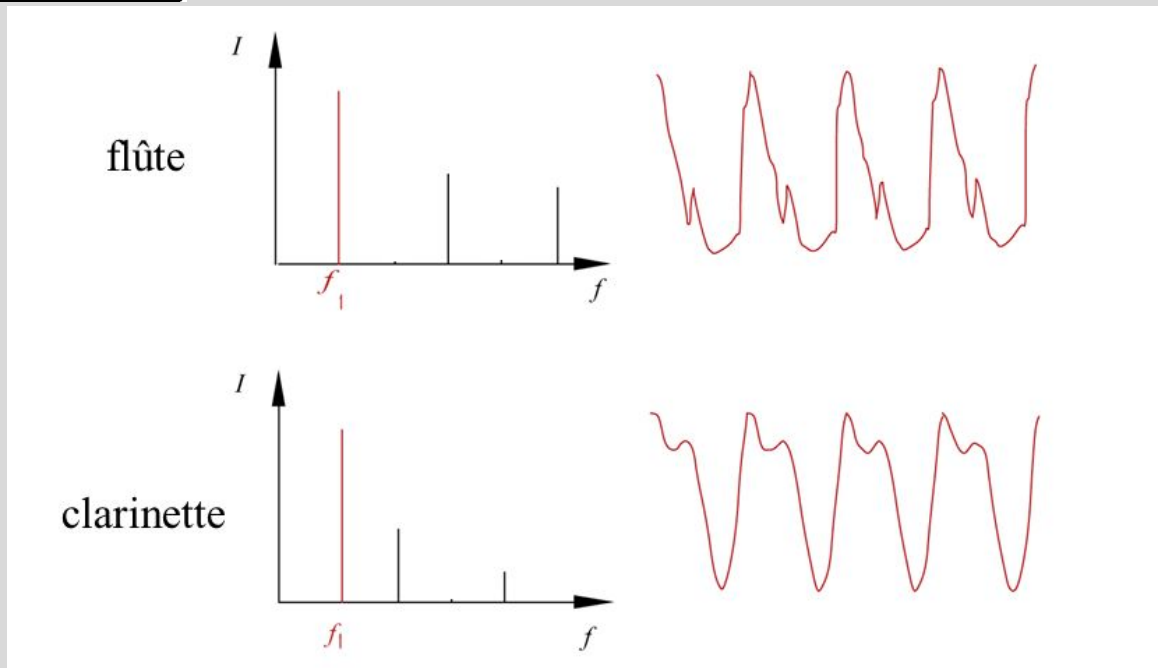
4.a) En supposant qu'aucune onde ne provient de l'infini, déterminer l'expression de la vitesse $u(x, t)$ et de la surpression $P_1(x, t)$ du fluide sur le demi-axe Ox positif à l'aide de la fonction Q_m .

4.b) Quel est l'ordre de grandeur de la surpression nécessaire pour assurer ce débit ? Comparer avec le cas d'un tube rigide. Commenter.

4.c) Avec l'âge, la distensibilité des vaisseaux diminue (artériosclérose). Quels effets de ce phénomène prévoyez-vous sur l'organisme ? Un moyen de traitement est d'insérer un ballon (très allongé) rempli de gaz dans l'aorte, ne l'obturant qu'en partie ; justifier qualitativement ce procédé.

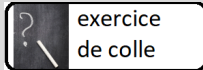
?
exercice
de colle

Exercice 14.29
Flûtes et clarinettes



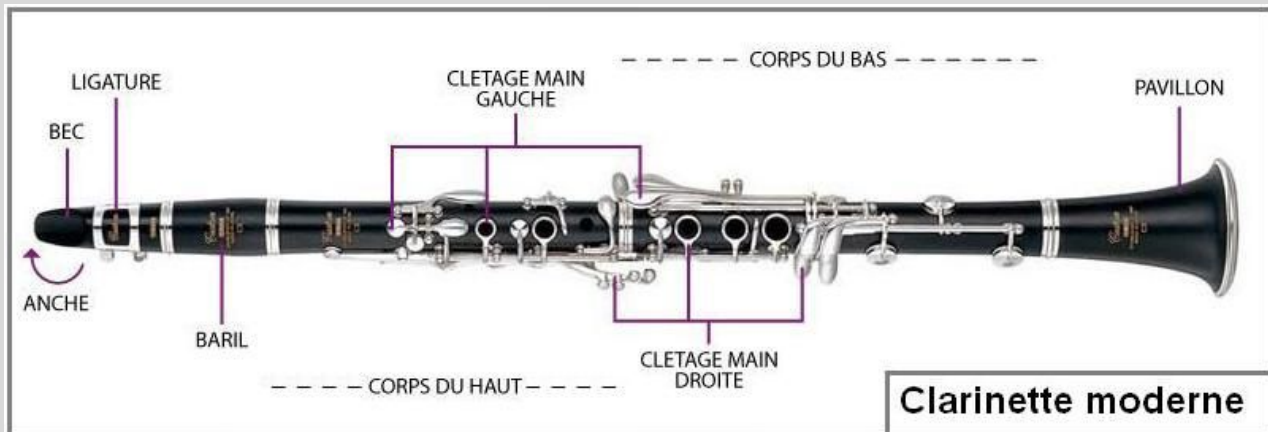
Pour une flûte, l'extrémité $z = 0$ peut être considérée comme quasiment ouverte. Par contre, pour une clarinette, l'anche située en $z = 0$ se comporte comme un obstacle rigide. Pour les deux instruments, le tuyau est limité par les plans $z = 0$ et $z = L$. L'extrémité $z = L$ est ouverte.

- 1) Flûte :
 - 1.a) Déterminer les fréquences propres de la flûte.
 - 1.b) Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau pour les deux premiers modes.
- 2) Mêmes questions pour la clarinette.
- 3) Comparaison
 - 3.a) Comparer le timbre (c'est-à-dire les différents harmoniques émis) des deux instruments.
 - 3.b) A longueur égale, quel instrument, flûte ou clarinette, produit le son le plus grave ?



exercice
de colle

Exercice 14.30 Clarinette



On s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz .

L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le rapport entre les capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v est $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$. On prendra la constante des gaz parfaits égale à $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression P_0 et la masse volumique μ_0 . En présence de l'onde sonore, l'état du fluide est décrit par :

- la pression $P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$;
- la masse volumique $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$;
- la vitesse particulière $\vec{u}(M, t)$.

1) Déterminer l'équation des ondes sonores.

2) On étudie la propagation des ondes sonores dans un tuyau à section circulaire, de très grande longueur selon l'axe Oz . L'impédance caractéristique du tuyau est notée Z_c .

2.a) Établir alors la relation entre la surpression et la vitesse particulière pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z croissants puis pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z décroissants.

2.b) Établir l'expression de Z_c en fonction de μ_0 et c .

On se place dans l'hypothèse d'une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques qui se propagent dans le tuyau de section constante d'aire S : $p_1(z, t) = A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)}$.

On définit l'impédance acoustique \underline{Z}_z en un point d'abscisse z par la relation : $\underline{Z}_z = \frac{p_1(z, t)}{u_z(z, t)}$.

2.c) Etablir l'équation suivante :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \frac{\underline{Z}_L \cos(kL) + j Z_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + j \underline{Z}_L \sin(kL)}$$

où \underline{Z}_0 et \underline{Z}_L sont les valeurs de \underline{Z}_z respectivement en $z = 0$ et $z = L$.

3) Application à la clarinette

Pour la clarinette, assimilée à un cylindre entre $z = 0$ et $z = L$, l'extrémité $z = L$ est ouverte. Par contre l'anche située en $z = 0$ se comporte comme un obstacle rigide. En première approximation, on suppose que l'impédance acoustique est nulle au niveau d'une extrémité ouverte.

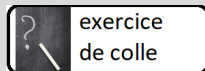
3.a) Que deviennent \underline{Z}_L et \underline{Z}_0 ?

3.b) Quelles conséquences ces hypothèses ont-elles sur l'onde dans le tuyau d'une part et à l'extérieur d'autre part ?

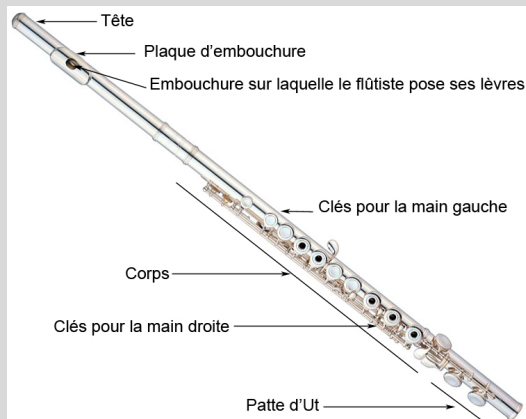
3.c) En déduire les fréquences propres de la clarinette.

3.d) Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau.

3.e) Expliquer le rôle du trou de registre situé à la distance $L/3$ (environ) de l'extrémité $z = 0$ de la clarinette.



Exercice 14.31 Flûte traversière



On s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz .

L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le rapport entre les capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v est $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$. On prendra la constante des gaz parfaits égale à $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression P_0 et la masse volumique μ_0 . En présence de l'onde sonore, l'état du fluide est décrit par :

- la pression $P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$;
- la masse volumique $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$;
- la vitesse particulaire $\vec{u}(M, t)$.

1) Déterminer l'équation des ondes sonores.

2) On étudie la propagation des ondes sonores dans un tuyau à section circulaire, de très grande longueur selon l'axe Oz . L'impédance caractéristique du tuyau est notée Z_c .

2.a) Établir alors la relation entre la surpression et la vitesse particulaire pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z croissants puis pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z décroissants.

2.b) Établir l'expression de Z_c en fonction de μ_0 et c .

On se place dans l'hypothèse d'une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques qui se propagent dans le tuyau de section constante d'aire S : $p_1(z, t) = A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)}$.

On définit l'impédance acoustique \underline{Z}_z en un point d'abscisse z par la relation : $\underline{Z}_z = \frac{p_1(z, t)}{u_z(z, t)}$.

2.c) Etablir l'équation suivante :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \frac{\underline{Z}_L \cos(kL) + j Z_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + j \underline{Z}_L \sin(kL)}$$

où \underline{Z}_0 et \underline{Z}_L sont les valeurs de \underline{Z}_z respectivement en $z = 0$ et $z = L$.

3) Application à la flûte traversière

Pour la flûte traversière, assimilée à un cylindre entre $z = 0$ et $z = L$, extrémités ouvertes.

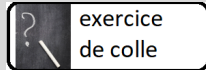
3.a) Que deviennent \underline{Z}_L et \underline{Z}_0 ?

3.b) Quelles conséquences ces hypothèses ont-elles sur l'onde dans le tuyau d'une part et à l'extérieur d'autre part ?

3.c) En déduire les fréquences propres de la flûte traversière.

3.d) Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau.

3.e) Déterminer la longueur approximative d'une flûte traversière dont le fondamental est un mi de fréquence 330 Hz.



Exercice 14.32 Instruments à vent

Tous les instruments de musique acoustiques possèdent un système mécanique vibrant appelé excitateur. Ce peut être :

- une corde (guitare, violon, banjo, harpe...);
- une anche (libre ou battante) ou un biseau (orgue acoustique à tuyaux, flûte à bec, clarinette, hautbois...);
- une membrane tendue (peau, boyau, tissu, matière plastique) ou un matériau dur (bois, métal, argile, verre...) dans les instruments à percussion (djembé, tambour, xylophone, triangle, timbale, woodblock, crécelle...).

La vibration étant généralement trop faible pour être audible, il est nécessaire de l'amplifier : c'est le rôle de la caisse de résonance ou résonateur. Dans chaque cas, le système vibrant est associé à un système assurant le couplage avec l'air : caisse de résonance (instruments à cordes et à percussion, tuyaux pour les instruments à vent).

L'air contenu dans le résonateur, mis en résonance, produit l'onde sonore.

Instruments de musique à vent

Les instruments à vent sont des instruments de musique qui produisent un son grâce à la mise en vibration de l'air dans un corps sonore (résonateur). On dit que la colonne d'air de l'instrument est excitée.

On peut classer les instruments à vent selon le système excitateur :

- Instruments à anche lippale (trompette, cor, trombone...) : le son est produit par la tension élastique des lèvres de l'exécutant, qui met en vibration la colonne d'air de l'instrument.
- Instruments à biseau (flûte à bec, tuyau d'orgue à embouchure de flûte...) : un jet d'air est envoyé sur une arête (le biseau), qui le divise en créant des tourbillons. Une partie du jet d'air est envoyé à l'extérieur, l'autre entre dans l'instrument et se trouve renforcée par la colonne d'air vibrante du tuyau, ce dernier servant de résonateur.
- Instruments à anche battante simple (clarinette, saxophone...) : le son est produit par une anche qui ferme périodiquement l'arrivée de l'air dans l'embouchure en forme de bec, mettant ainsi en vibration la colonne d'air de l'instrument.
- Instruments à anche battante double (hautbois, cornemuse...) : l'anche double se compose de deux fines lamelles de roseau fixées sur un petit tube de métal et dont les extrémités s'entrechoquent, entraînant une vibration de l'air dans le corps de l'instrument.
- Instruments à anche libre (harmonica, accordéon...) : les sons sont produits grâce à des anches métalliques qui vibrent librement dans une colonne d'air.

Pour obtenir des sons intenses, les systèmes excitateurs doivent être couplés à une colonne d'air contenue dans le résonateur de l'instrument à vent.

Dans le cas des instruments à vent à embouchure de flûte, l'ouverture au niveau du biseau est assez importante. Cette extrémité du tube de l'instrument se comporte comme une extrémité ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/ouverte.

Dans le cas des instruments à vent à anche, l'extrémité au niveau de l'anche est fermée alors que l'autre extrémité est en général ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/fermée.

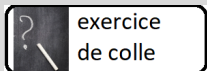
Lorsqu'une colonne d'air d'un tuyau sonore entre en vibration, elle est le siège d'un phénomène d'ondes stationnaires produites par l'interférence de deux ondes progressives identiques qui se déplacent en sens contraire.

1) Instruments à vent

- 1.a) Ecrire la forme mathématique de la surpression et de la vitesse dans les tuyaux sonores.
- 1.b) En déduire qu'un nœud pour l'un correspond à une ventre pour l'autre.

2) Divers types d'instruments à vent

- 2.a) Quelles sont les conditions aux limites imposées aux extrémités des tuyaux sonores, pour chacun des types d'instruments de musique à vent ?
- 2.b) Faire un schéma du fondamental et de la première harmonique pour la surpression et la vitesse dans les tuyaux sonores, pour chacun des types d'instruments de musique à vent.
- 2.c) Le timbre de chacun des types d'instruments de musique à vent est-il identique ?



Exercice 14.33
Tuyau rectangulaire et tuyau cylindrique

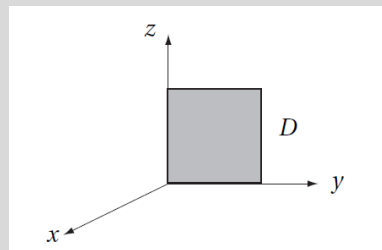
Avec un instrument à vent, lorsque l'instrumentiste joue des notes montant vers les aigus, le rapport de la longueur d'onde au diamètre du tuyau décroît et des ondes non planes peuvent se propager.

1) On s'intéresse au guidage d'une onde sonore par un tuyau d'orgue de section carrée de côté D .

Justifier la forme $p(x, y, z, t) = Y(y) Z(z) \exp(i(kx - \omega t))$ sous laquelle on va rechercher des solutions de l'équation d'onde.

Démontrer que la pulsation ω et le nombre d'onde k sont liés à la dimension transversale D du tuyau par :

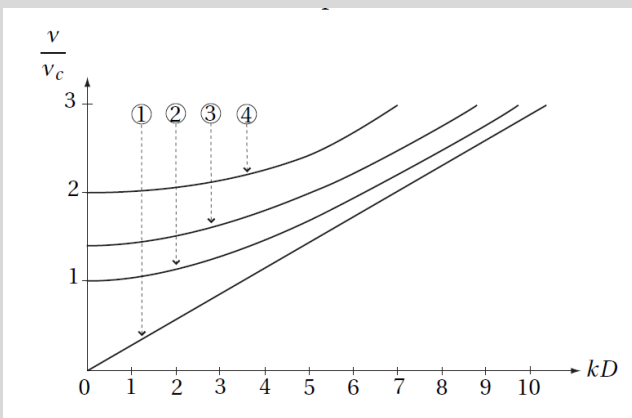
$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\pi^2 c^2}{D^2} (a^2 + b^2) \quad a \text{ et } b \text{ étant des nombres entiers.}$$



2) Exprimer la relation précédente sous la forme $\frac{\nu}{\nu_c} = f(\{a, b\}, kD)$ dans laquelle $\nu_c = \frac{c}{2D}$.

Le tracé ci-contre représente les courbes des premiers modes $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 1\}$, $\{0, 2\}$ et $\{2, 0\}$.

Associer à chacune de ces courbes le mode correspondant.

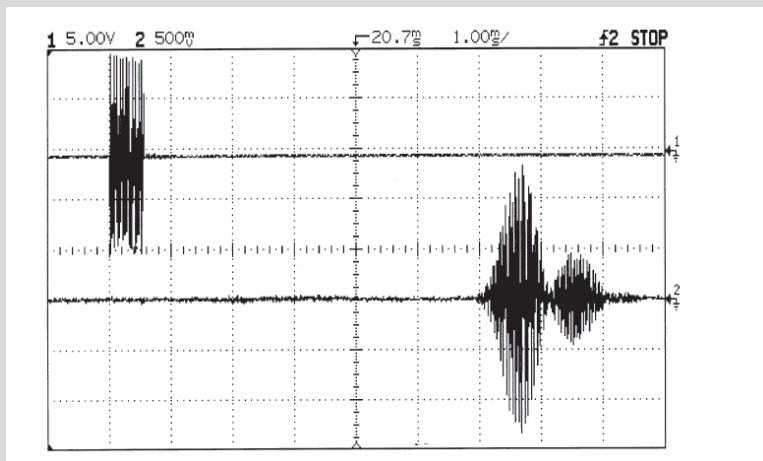


3) Les instruments réels à section constante sont cylindriques, de rayon a . L'étude se fait de la même façon que pour un tuyau à section carrée mais le résultat fait intervenir d'autres fonctions. La fréquence de coupure la plus basse est alors : $f_c = \frac{1,84 c}{2\pi a}$.

Effectuer l'application numérique pour un tuyau de rayon $a = 1$ cm. L'hypothèse d'une onde plane seule dans le tuyau est-elle plausible ?

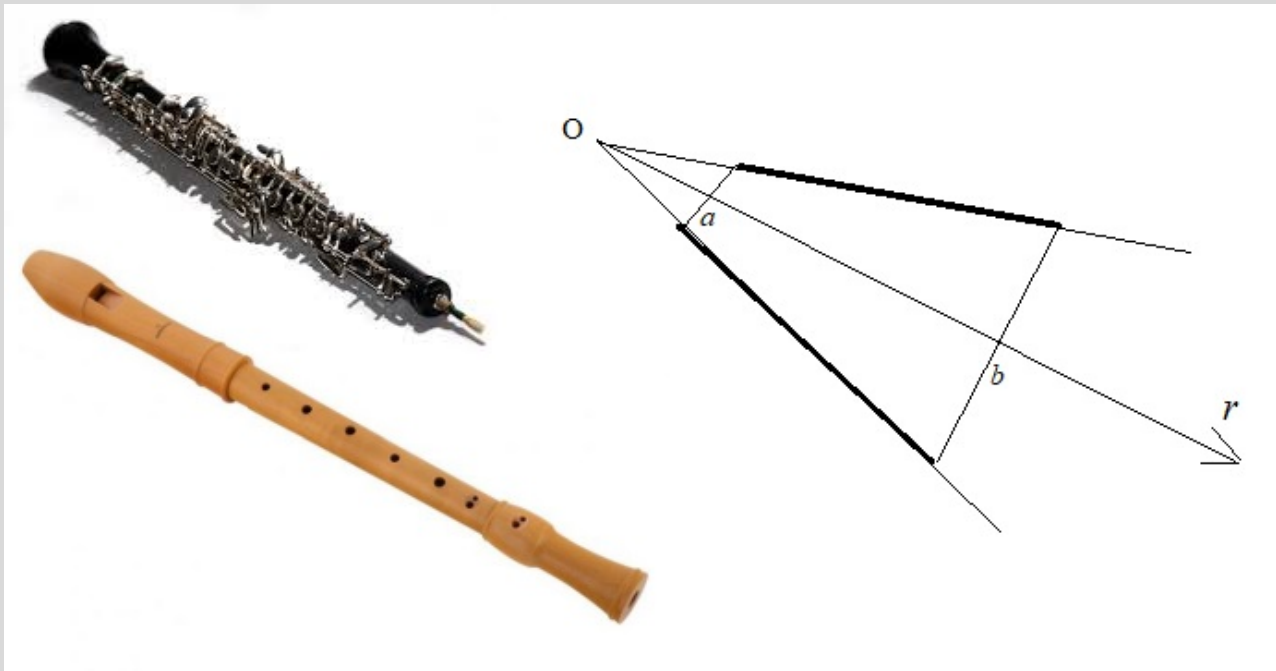
4) On réalise l'expérience suivante : un émetteur d'ultrasons envoie des trains d'onde de fréquence $f_e = 40,0$ kHz, de durée $\Delta t = 500 \mu s$, dans un tuyau cylindrique de diamètre 35,0 mm. Un récepteur est placé à l'autre extrémité du tuyau, sur l'axe de celui-ci, face à l'émetteur. La distance entre l'émetteur et le récepteur est $L = 201$ cm. On observe à l'oscilloscope les signaux suivants :

L'émetteur est relié à la voie 1 de l'oscilloscope, le récepteur à la voie 2. Expliquer le signal observé au niveau du récepteur. Mesurer la vitesse de propagation des modes observés.



exercice
de colle

Exercice 14.34
Flûte et hautbois



Un tuyau conique de sommet imaginaire O se limite à la portion de cône entre les rayons a et b . Il est siège d'une onde sphérique stationnaire, somme de deux ondes progressives dans les deux sens de même amplitude mais déphasées.

On se place dans un repère sphérique de centre O . On donne l'expression de la pression acoustique complexe :

$$\tilde{p}(r, t) = \frac{A}{r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} + \frac{B}{r} e^{j\omega(t + \frac{r}{c})}$$

1) Généralités.

1.a) Donner l'expression de la vitesse acoustique complexe \tilde{v} .

1.b) L'extrémité $r = b$ débouche sur l'atmosphère et se comporte comme un nœud de pression. Exprimer B en fonction de A .

2) L'instrument est une flûte à bec.

L'extrémité $r = a$ est un biseau qui se comporte lui aussi comme un nœud de pression.

2.a) Quelles sont les fréquences possibles ?

2.b) Y a-t-il une différence avec la flûte traversière de perce cylindrique de longueur $L = \frac{p\lambda}{2}$ où λ est la longueur d'onde et $p \in N$?

2.c) On dit que les flûtes à bec et traversière «octavient». Expliquer.

3) L'instrument est instrument conique à anche : un hautbois (ou un saxophone).

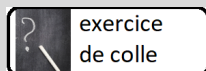
L'extrémité $r = a$ est une anche et se comporte comme un nœud de vitesse.

3.a) Montrer que l'on doit alors avoir : $\tan\left(\omega \frac{b-a}{c}\right) = -\frac{\omega \cdot a}{c}$.

La résolution (numérique) donne des solutions de type : $f_n = \frac{x_n c}{4 \cdot (b-a)}$ avec $x_1 = 1,56$ puis $x_2 = 3,33$ et $x_3 = 5,22$, $x_4 = 7,17, \dots$

3.b) La longueur d'une clarinette de perce cylindrique est reliée aux longueur d'onde λ par $L = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$ avec $p \in N$. Comparer aux résultats trouvés pour le hautbois.

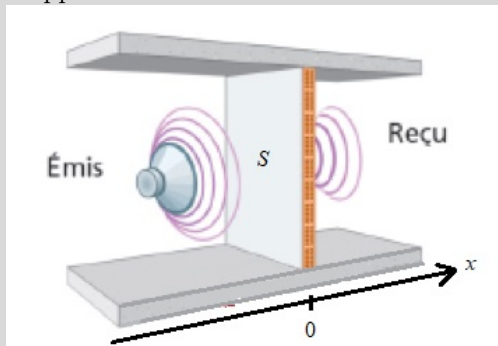
3.c) On dit que la clarinette «quintoie». Pourquoi ?



exercice
de colle

Exercice 14.35 La dispute chez les voisins

Une onde sonore plane progressive sinusoïdale se propage dans l'air (vitesse du son c et impédance acoustique $Z = 400$ S.I.) de l'appartement de mon voisin qui se dispute avec sa femme, et arrive sous incidence normale sur le mur qui le sépare de mon appartement. On s'intéresse à la transmission du son par le mur qui sépare les deux appartements.



On supposera que l'épaisseur du mur est négligeable devant la longueur d'onde du phénomène. Ainsi, on va négliger la propagation de l'onde dans le mur qui va se déplacer en bloc. Cela dit, le mur ne se déplace pas comme un piston car ses bords restent accrochés au plafond, au sol et aux murs contigus. Si le centre du mur se déplace et ses bords restent fixes, le mur se cintre et l'élasticité va tendre à le redresser. Cette tendance sera qualitativement modélisée par un rappel élastique de raideur k et le mouvement de la partie centrale du mur le sera par une masse mobile M , de surface S en translation. On ne tiendra donc pas compte de l'épaisseur du mur, positionné en $x = 0$.

1) Coefficient de transmission

1.a) Rappeler la forme mathématique des ondes complexes incidente, réfléchi et transmise.

1.b) En notant la position complexe du mur $\tilde{X} = X_m e^{j\omega t}$, écrire la continuité de la vitesse et de la pression.

1.c) Écrire une équation sur la pression au contact du mur.

1.d) Calculer le coefficient de transmission en amplitude.

2) Interprétation.

2.a) Interpréter ce résultat en terme de filtre.

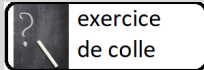
2.b) On peut négliger l'élasticité du mur aux fréquences audibles. Qu'en déduire pour $\sqrt{\frac{k}{M}}$? Dans le domaine audible, montrer alors que

$$t(\omega) \approx \frac{\omega_1}{\omega}$$

Que vaut ω_1 ?

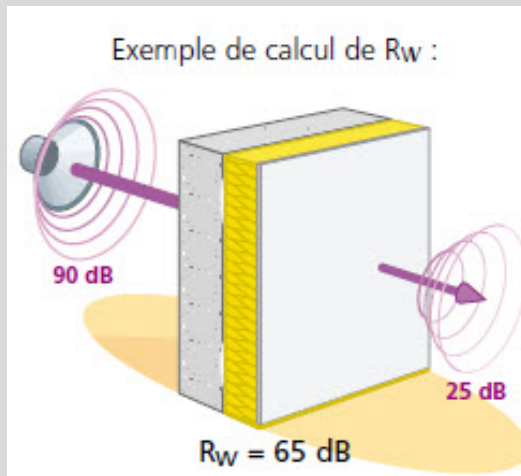
2.c) En cas de dispute conjugale chez les voisins, on entend surtout le mari. Pourquoi?

2.d) Quelle doit être l'épaisseur d'une cloison de masse volumique $\mu = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour un affaiblissement de 40 dB à 200 Hz?



exercice
de colle

Exercice 14.36 Mur phonique

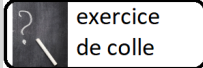


Une onde sonore plane progressive sinusoïdale se propage dans l'air d'une pièce à une autre et arrive sous incidence normale sur le mur qui les sépare.

On supposera que l'épaisseur du mur est négligeable devant la longueur d'onde du phénomène. Ainsi, on va négliger la propagation de l'onde dans le mur qui va se déplacer en bloc. Cela dit, le mur ne se déplace pas comme un piston car ses bords restent accrochés au plafond, au sol et aux murs contigus. Si le centre du mur se déplace et ses bords restent fixes, le mur se cintre et l'élasticité va tendre à le redresser. Cette tendance sera qualitativement modélisée par un rappel élastique de raideur k et le mouvement de la partie centrale du mur le sera par une masse mobile M , de surface S en translation. On ne tiendra donc pas compte de l'épaisseur du mur, positionné en $x = 0$.

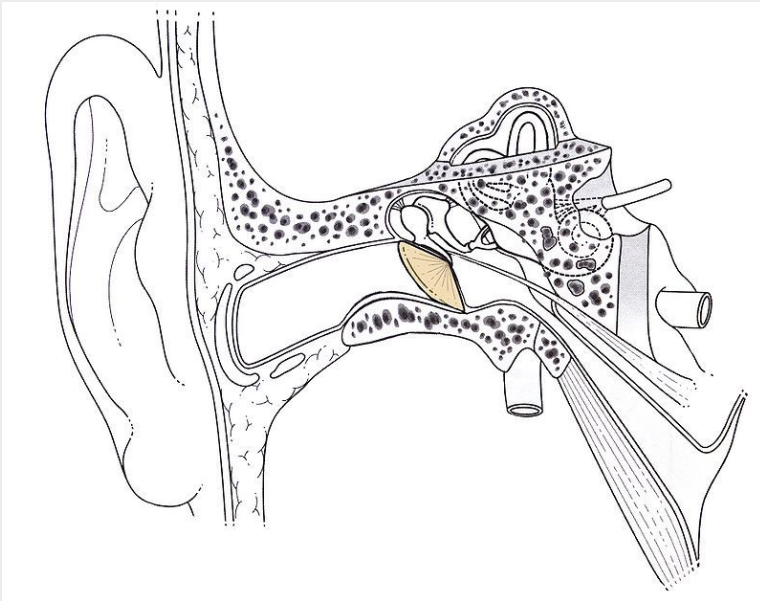
La vitesse du son est $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et impédance acoustique de l'air $Z = 400 \text{ S.I.}$.

- 1) Calculer le coefficient de transmission en amplitude $t(\omega)$ du mur et tracer l'allure du graphique $t(\omega)$.
- 2) Quelle doit être l'épaisseur d'une cloison de masse volumique $\mu = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour un affaiblissement de 40 dB à 200 Hz ?



exercice
de colle

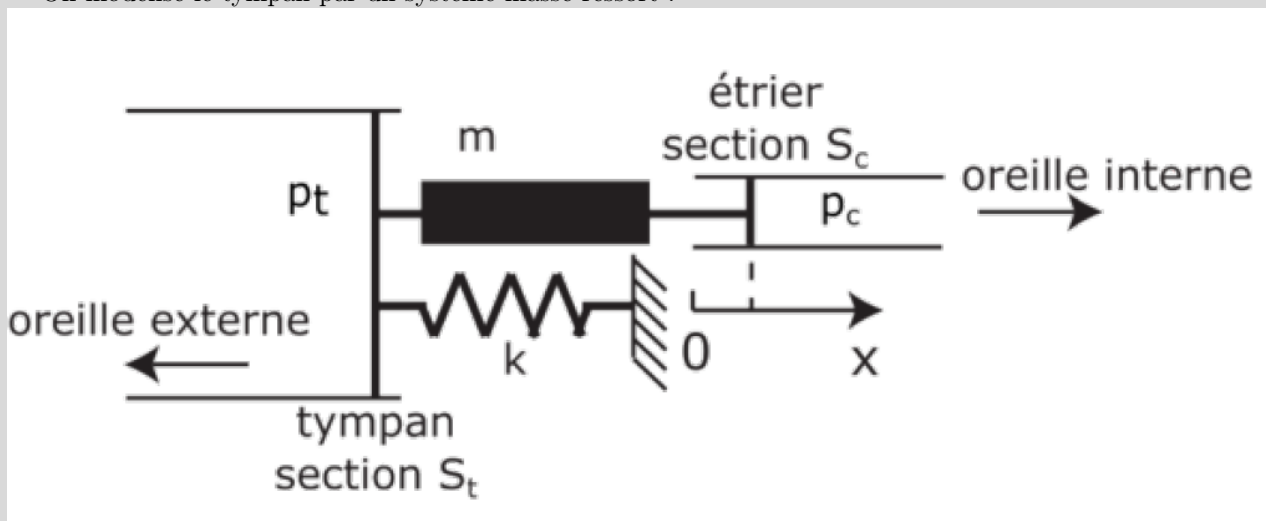
Exercice 14.37 Le tympan de l'oreille



En anatomie, le tympan est une membrane fibreuse séparant l'oreille externe et l'oreille moyenne. Le tympan est chargé de récolter les vibrations dues aux sons arrivant par le conduit auditif externe, et de les transmettre à la chaîne ossiculaire.

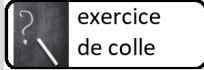
https://fr.wikipedia.org/wiki/Tympan_humain

On modélise le tympan par un système masse-ressort :



L'oreille externe baigne dans l'air, alors que l'oreille interne baigne dans un liquide organique que l'on assimilera à de l'eau.


- 1) Une onde sonore arrive sur le tympan, établir l'équation différentielle qui régit le mouvement du tympan. On s'intéresse au gain de pression $G(\omega) = \frac{P_c}{P_t}$ où P_c et P_t sont les pressions complexes respectivement associées aux ondes après et avant e tympan.
- 2) Déterminer l'expression de $G(\omega)$ qu'on écrira sous la forme canonique d'un filtre.

exercice
de colle**Exercice 14.38**
Ecouter un cœur qui bat

Un stéthoscope (du grec stêthos, « poitrine », et scope du grec ancien skopein, « observer ») est un instrument acoustique, servant principalement dans le domaine médical ou vétérinaire (du moins pour les animaux d'une certaine taille), pour l'auscultation, c'est-à-dire l'écoute des sons internes du corps. Mais il peut être aussi employé dans d'autres domaines, notamment pour l'identification et la localisation d'un bruit dans un objet, un appareil ou une installation.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Stéthoscope>.

- 1) Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la vitesse et de la surpression à une interface.
- 2) On donne les masses volumiques de l'eau $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de l'air $\mu_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ainsi que la célérité des ondes acoustiques dans l'air $c_a = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et dans l'eau $c_e = 4 c_a$.
 - 2.a) Estimer l'impédance sonore de l'air et de l'eau et les comparer.
 - 2.b) Calculer le coefficient de transmission énergétique T d'une onde sonore à l'interface air-eau.
 - 2.c) Expliquer pourquoi l'on n'entend pas naturellement les battements de cœur d'une autre personne à moins, par exemple, de coller l'oreille contre son corps.

 **exercice de colle**

Exercice 14.39
Echographie



L'échographie utilise les ultrasons. Ce sont des ondes acoustiques hautes fréquences qui sont inaudibles par l'homme (les ultrasons ont une fréquence de 20 kHz à 1 GHz).

Une partie des ondes sonores (et donc les ultrasons) rebondissent lorsque l'impédance acoustique change, c'est-à-dire aux interfaces entre les différents milieux. C'est pour cette raison que sous l'eau, on entend très peu ce qui se passe à la surface car une grande partie des ondes sonores rebondissent sur l'eau et très peu sont transmises sous l'eau car les impédances de l'eau et de l'air sont très différentes.

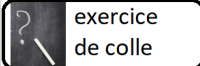
	masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	Vitesse du son ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Impédance acoustique ($\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$)
air	1,204	343	418
eau	1000	1480	$1,48 \times 10^6$

Le principe de l'échographie revient à balayer à l'aide d'ultrasons une zone à étudier (par exemple l'utérus d'une future maman) et de mesurer et d'analyser les ondes ayant rebondi aux différentes interfaces (l'écho des ultrasons) de manière à reconstituer une image des différents milieux traversés.

On applique un gel échographique sur la zone à analyser. Ce gel possède une impédance acoustique proche de celle de la peau de manière à ce qu'il n'y ait pas d'air entre la peau et la sonde car l'air ayant une impédance très faible fausserait les mesures. C'est également pour cette raison que l'échographie ne peut pas être utilisée comme méthode d'imagerie médicale pour les poumons ou la trachée qui contiennent de l'air.

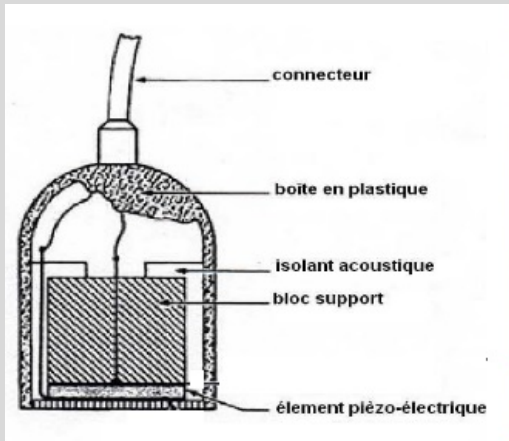
Le gel échographique Extraits de «science-for-everyone.over-blog.com»

1) Evaluer le rapport I_a/I_s de l'intensité avec et en absence d'une bulle d'air sur le trajet des ondes utilisées pour l'échographie.



exercice
de colle

Exercice 14.40 Le gel échographique



- 1) Réflexion et transmission entre deux milieux d'impédance acoustiques respectives Z_1 et Z_2 .
1.a) Montrer que les coefficients de réflexion en pression r_p et en vitesse r_v vérifient :

$$r_p = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -r_v$$

- 1.b) En déduire que le coefficient de réflexion en énergie est

$$R = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

et donc que le coefficient de transmission en énergie est

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

2) Une onde plane ultrasonore se propage dans un échantillon d'aluminium suivant l'axe (Ox) . On désire étudier cette onde à l'aide d'un détecteur (céramique piézo-électrique reliée à un amplificateur) placé contre l'échantillon. Malgré un bon contact, une couche d'air subsiste. On supposera les milieux non absorbants.

2.a) Déterminer R et T les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques correspondant à l'interface aluminium-air, et R' et T' ceux de l'interface air-détecteur, en fonction des impédances acoustiques respectives r_{Al} , r_{air} , r_d de l'échantillon d'aluminium, de l'air, du détecteur.

2.b) Expliquer pourquoi, compte tenu des fluctuations d'épaisseur le long de la couche, on peut négliger les interférences entre les ondes dans les milieux.

2.c) Déterminer l'intensité sonore I_d reçue par le détecteur en fonction de l'intensité incidente I_0 , en tenant compte des réflexions multiples. On exprimera $\frac{I_d}{I_0}$ en fonction de r_{Al} , r_{air} et r_d .

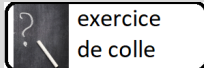
2.d) Application numérique : calculer la valeur du rapport $\frac{I_d}{I_0}$ pour $r_{Al} = 16,9 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $r_d = 31 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $r_{air} = 428 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

3) Pour limiter la perte d'intensité, on place entre l'aluminium et le détecteur une couche de glycérine d'impédance acoustique $r_{gl} = 24,2 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ assurant un bon contact entre l'aluminium et le détecteur.

3.a) Déterminer la nouvelle valeur I'_d de l'intensité sonore dans le détecteur en fonction de r_{Al} , r_{gl} , r_d et I_0 .

3.b) Calculer la nouvelle valeur du rapport $\frac{I'_d}{I_0}$.

3.c) Commenter.



exercice
de colle

Exercice 14.41 Résonateur de Helmholtz



Un résonateur est une cavité qui, excitée par le son d'un instrument de musique, permet de renforcer un des harmoniques composant le son. Le résonateur de Helmholtz est constitué par une cavité sphérique de volume V_0 , ouverte sur l'extérieur par un tube très court d'axe (Ox) orienté vers l'extérieur, de longueur d , de section s , contenant de l'air (assimilable à un gaz parfait dont on connaît le rapport γ) de masse volumique μ . Le volume V_0 est supposé très grand devant le volume du tube. Une onde sonore se propageant au voisinage de l'ouverture met en vibration l'air de la cavité en imposant une pression extérieure

$$P_e = P_{atm} + p_0 \cos(\omega t)$$

La pression dans la cavité vaut :

$$P(t) = P_{atm} + \Delta P(t)$$

La vitesse du son dans l'air, dans les conditions de l'expérience, est égale à $c_s = 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Quelle est la condition sur V_0 et ω pour qu'à chaque instant, la pression soit considérée comme uniforme dans la cavité ?

2) Équation différentielle vérifiée par la surpression $\Delta P(t)$.

2.a) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la masse d'air située dans le tube du résonateur en supposant que cet air vibre en bloc à la vitesse $\vec{v}(t) = v_x \vec{u}_x$.

On posera $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$, avec $\mu_0 \gg |\Delta\mu|$. Les vibrations de l'air dans la cavité sont supposées adiabatiques et réversibles.

2.b) En déduire une expression de $\Delta P(t)$ avec γ , P_{atm} , μ_0 et $\Delta\mu$.

2.c) Ecrire la relation de conservation de la masse d'air dans le résonateur.

2.d) Déduire des trois équations précédentes que l'équation différentielle vérifiée par la surpression $\Delta P(t)$ est de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \Delta P(t)}{dt^2} + \Delta P(t) = p_0 \cos(\omega t)$$

On exprimer ω_0 .

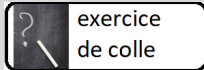
3) Solution harmonique à la pulsation ω .

3.a) Exprimer l'amplitude ΔP_0 de $\Delta P(t)$.

3.b) Montrer que ΔP_0 devient très grande pour une certaine pulsation.

3.c) Calculer numériquement la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ d'un résonateur de Helmholtz constitué d'une sphère de rayon 7 cm, et d'un tube cylindrique de longueur $d = 1$ cm et de rayon $r = 1$ cm.

3.d) Vérifier les approximations faites.



Exercice 14.42 Effet Doppler

En 1842, l'autrichien Christian Doppler (1803–1853) montre que la fréquence d'une oscillation (son, lumière) change quand la source ou l'observateur sont en mouvement. Il essaye ensuite, sans succès, d'appliquer son principe pour expliquer les différentes couleurs des étoiles et, en particulier, la différence de couleur de certaines étoiles doubles. Ceci en effet aurait supposé que les étoiles auraient eu des vitesses proches de celle de la lumière!

En 1845 l'hollandais C.H.Buys-Ballot (1817–1890) démontre la validité du principe de Doppler pour les ondes sonores en constatant le changement de ton entendu quand des musiciens jouant des instruments à vent, embarqués sur un train sur la ligne Utrecht-Amsterdam, s'approchent et puis s'éloignent de la gare.

En 1848, le français Hippolyte Fizeau (1819–1896) développe le même principe de manière indépendante, mais montre que dans le cas de la lumière la couleur ne change pas. Ce sont les positions de raies spectrales qui changent. Un autre autrichien, Ernst Mach (1836–1916), ignorant le travail de Fizeau, arriva en 1860 aux mêmes conclusions.

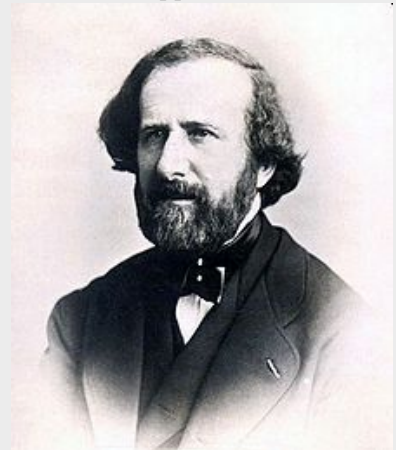
L'italien Angelo Secchi (1818–1878) et l'anglais William Huggins (1829–1910) tentent les premiers de mesurer visuellement le décalage en longueur d'onde dans le spectre d'une étoile prédit par le principe de Doppler. Huggins annonce en 1871 avoir pu enfin mesurer la vitesse de Sirius, l'étoile très brillante dans la constellation du Grand Chien.

En 1887 l'allemand H.C.Vogel (1841-1907) est le premier à faire cette détermination en photographiant le spectre de Sirius. C'est un énorme progrès dans la précision des mesures, qui passent de ± 22 km/s, pour la moyenne des mesures visuelles d'une nuit entière, à $\pm 2,6$ km/s pour une observation photographique.

http://www.obs-hp.fr/lumiere/histoire_doppler-fizeau.html



Christian Doppler.



Hippolyte Fizeau

On s'intéresse à un point matériel M qui émet un "bip" avec une période T_0 dans son référentiel. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O , reçoit le bip émis par $M(t_1)$ à la date t'_1 et celui émis par $M(t_2)$ à la date t'_2 . M se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante, et l'onde a la célérité c .

1) Exprimer la période T séparant les deux "bips" reçus par l'observateur, en fonction de T_0 , c , $OM(t_1)$ et $OM(t_2)$.

2) En supposant le mobile suffisamment loin ($OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2)$), exprimer $OM(t_2) - OM(t_1)$ en fonction de T_0 et v_z , la projection de la vitesse de l'émetteur suivant $OM(t_1)$.

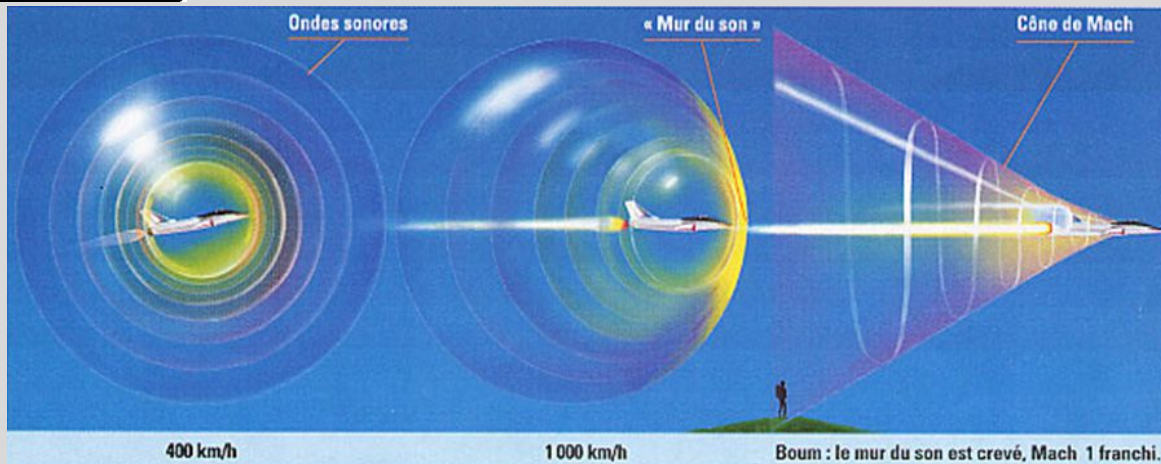
3) Dans le cas où $v \ll c$, montrer que ν , la fréquence de l'onde dans le référentiel du récepteur vérifie

$$\nu = \nu_0 \cdot \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)$$

où ν_0 est la fréquence dans le référentiel de l'émetteur.

? \ exercice
de colle

Exercice 14.43 Le bruit d'un avion



On s'intéresse à un point matériel M (l'avion) qui émet un "bip" avec une période T_0 dans son référentiel. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O , reçoit le bip émis par $M(t_1)$ à la date t'_1 et celui émis par $M(t_2)$ à la date t'_2 . M se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante, et l'onde a la célérité c .

1) Effet Doppler

1.a) Exprimer la période T séparant les deux "bips" reçus par l'observateur, en fonction de T_0 , c , $OM(t_1)$ et $OM(t_2)$.

1.b) En supposant le mobile suffisamment loin ($OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2)$), exprimer T grâce à $\alpha = \left(\overrightarrow{OM(t_1)}, -\vec{u}_x \right)$.

1.c) Dans le cas où $v \ll c$, montrer que ν , la fréquence de l'onde dans le référentiel du récepteur vérifie

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right)$$

où ν_0 est la fréquence dans le référentiel de l'émetteur.

2) Bang supersonique

2.a) Montrer que, pour que les deux ondes arrivent en même temps, $\cos \alpha = \frac{c}{v}$.

2.b) En déduire qu'il faut que l'avion soit supersonique pour que ces deux ondes arrivent en même temps.

2.c) Pourquoi, quand on entend le bang supersonique, l'avion est dans une direction orthogonale à celle d'arrivée du son ?