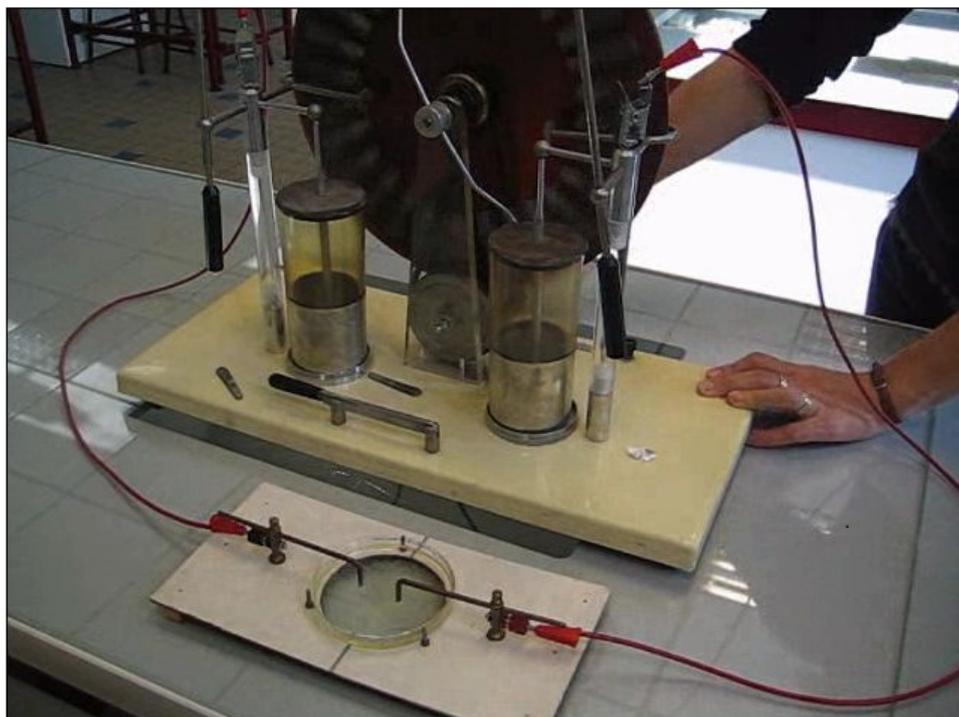
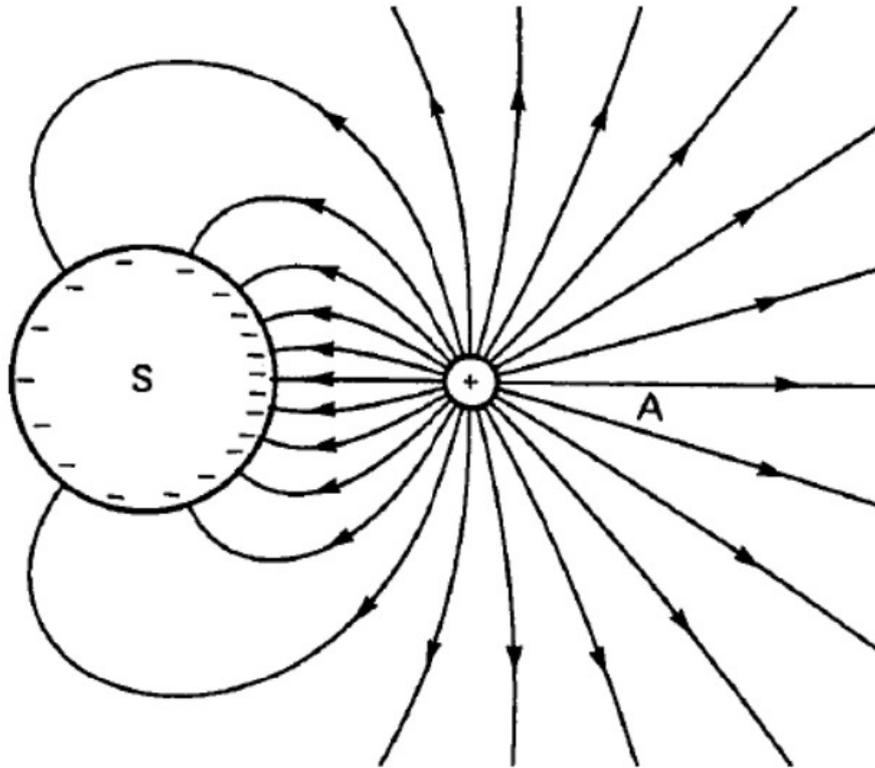


quelles sont les propriétés du champ électrostatique?

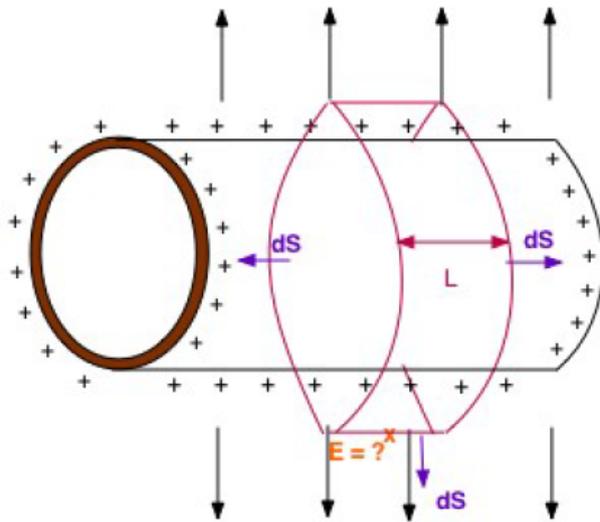


► connaître les lois de l'électrostatique

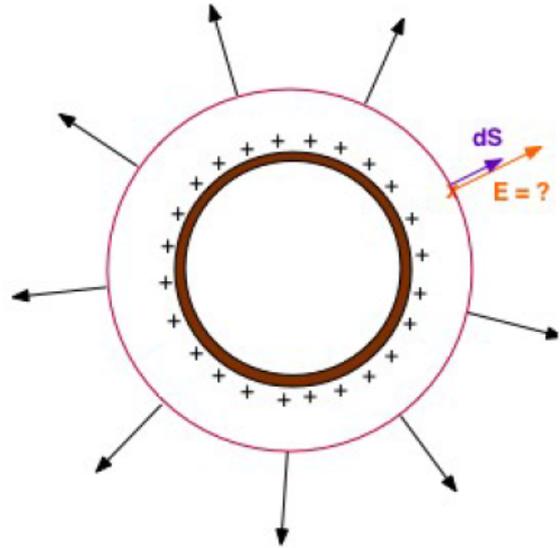


► déterminer un champ électrostatique créé par une distribution de charges

Vue en 3D



Vue en coupe



Electrostatique

Les points du cours à connaître

I- Propriétés du champ électrostatique

1. Sources du champ électrostatique

Charge électrique *s'y retrouver*

les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire e ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C). La charge électrique q en coulomb (C) est quantifiée.

Densité volumique de charge *définition*

La charge totale Q portée par un volume V est

$$Q = \iiint_{M \in V} \rho(M) d^3\tau$$

où ρ en $C \cdot m^{-3}$ est la densité volumique de charge.

Si on dispose d'une assemblée de particules numérotées i , de charge q_i et de densité volumique n_i ,

$$\rho = \sum_i n_i q_i$$

La densité volumique de charge ne dépend pas du référentiel.

Densité surfacique de charge *s'y retrouver*

La charge totale Q portée par une surface S est

$$Q = \iint_{M \in S} \sigma(M) d^2S$$

où σ en $C \cdot m^{-2}$ est la densité surfacique de charge

Densité linéique de charge *s'y retrouver*

La charge totale Q portée par une courbe C est

$$Q = \int_{M \in C} \lambda(M) . dl$$

où λ en $C \cdot m^{-1}$ est la densité linéique de charge.

✳ Invariances *s'y retrouver*

On discerne en particulier les symétries

- plane : $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$ ou $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$;
- cylindrique : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$ ou $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, z)$;
- circulaire : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$;
- sphérique : $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$ ou $\vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r)$.

✳ Plan de symétrie et d'antisymétrie pour les charges *s'y retrouver*

Pour la distribution de charge,

$$(xOy) \text{ est plan de symétrie} \Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

$$(xOy) \text{ est plan d'antisymétrie} \Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$$

👁 Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de charges *schéma*

La figure 1 représente un exemple de plans de symétrie (à gauche) et d'un plan d'antisymétrie (à droite).

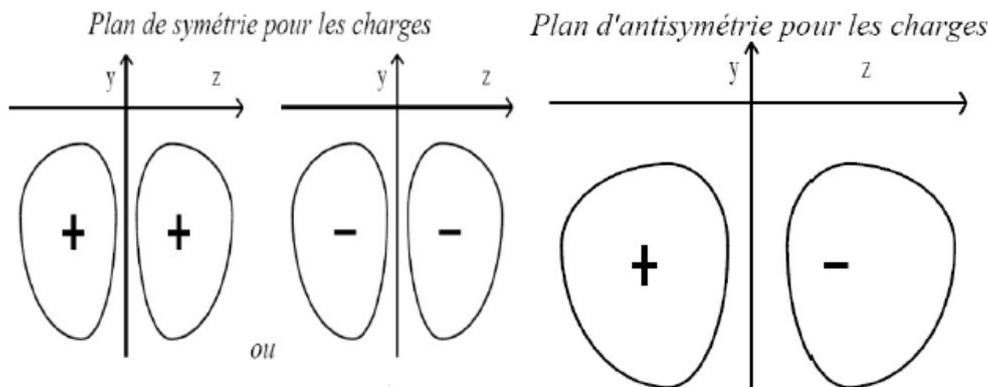


FIGURE 1 – Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de charges

2. Flux du champ électrostatique

📎 Équation de Maxwell Gauss *définition*

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

avec la permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

👁 Interprétation de l'équation de "Maxwell Gauss" en électrostatique *schéma*

La figure 2 représente le champ \vec{E} diverge des charges positives et converge vers les charges négatives.

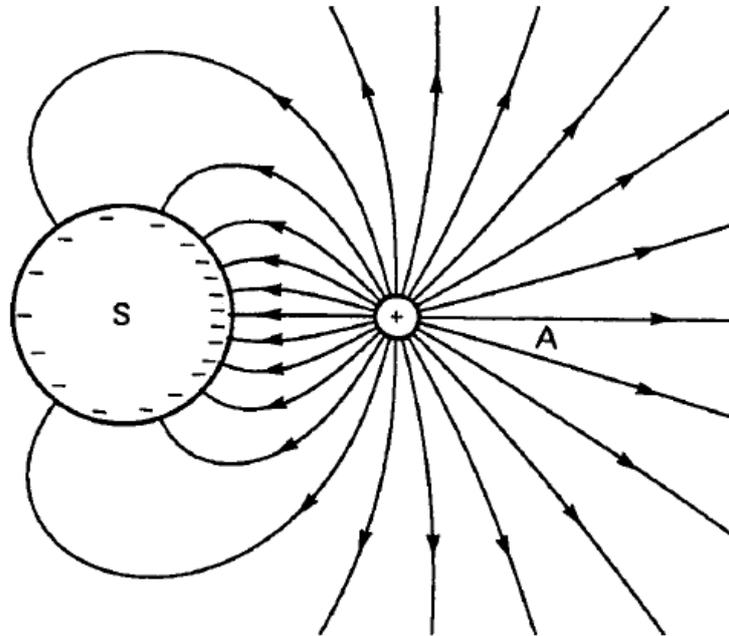


FIGURE 2 – Interprétation de l'équation de "Maxwell Gauss" en électrostatique

📖 1 Théorème de Gauss *théorème*

En intégrant "Maxwell Gauss" et en utilisant Green Ostrogradsky, on trouve que \Rightarrow
Si $Q_{int} = \iiint_{M \in V} \rho(M) d^3\tau$ est la charge électrique intérieure au volume V délimité par la surface fermée Σ ,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

📖 2 Zones de fort champ électrostatique dans une région vide de charge *théorème*

On décompose le flux en trois surfaces, l'une donnant un flux nul car le champ électrique est lui orthogonal, les deux autres se conservant.

Ainsi, le flux du champ électrique se conserve le long d'un tube de champ dans une région vide de charge.

Donc les zones de fort champ électrostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ électrostatique sont les plus resserrées. \Rightarrow

Les zones de fort champ électrostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ électrostatique sont les plus resserrées.

3. Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

**Équation de Maxwell Faraday** *définition*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**3 Potentiel et champ électrostatiques** *théorème*

En électrostatique, l'équation de "Maxwell Faraday" se simplifie en

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Comme le rotationnel est nul, on peut écrire : \Rightarrow

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

où V est le potentiel scalaire (que l'on appelle potentiel électrostatique).

**4 Ligne de champ électrostatique et surfaces isopotentielles** *théorème*

Soient M et M' très proche :

$$V(M') \approx V(M) + dV = V(M) + \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{MM'}$$

Or si M et M' sont dans la même surface isopotentielle,

$$V(M') = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

donc $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$.

Si M et M' sont à des potentiels différents,

$$V(M') > V(M) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \overrightarrow{MM'} > 0$$



\vec{E} est orthogonal aux surfaces isopotentielles et va vers les potentiels décroissants.

**Interprétation de l'expression de Maxwell-Faraday en statique** *schéma*

La figure 3 représente les lignes de champ de \vec{E} sont orthogonales aux surfaces isopotentielles et orientées vers les potentiels décroissants.

**5 Equation de Poisson suivie par le potentiel électrostatique** *théorème*

Maxwell-Gauss :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \text{div}(\vec{E}) = \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = -\Delta V$$



Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

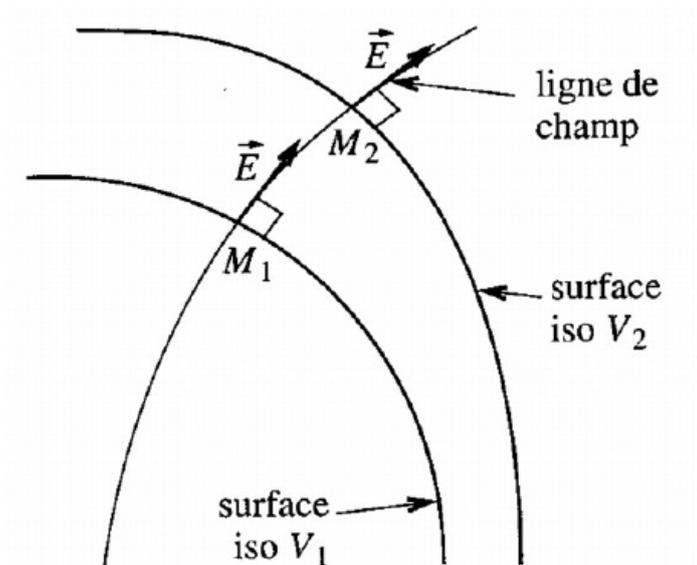


FIGURE 3 – Interprétation de l'expression de Maxwell-Faraday en statique

II- Exemples de champs électrostatiques

Visualisation des champs électrostatiques *vidéo*

On peut visualiser les lignes de champ électrostatique grâce à des grains de semoule dans de l'huile de vaseline.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

Utilisation des symétries *s'y retrouver*

le principe de Curie énonce que les symétries des causes se retrouvent parmi les symétries des conséquences.

On déduit du principe de Curie que le champ conséquence a (au moins) les symétries de la distribution cause.

Le potentiel scalaire V sera symétrique par rapport aux plans de symétrie Π , et antisymétrique par rapport aux plans d'antisymétrie Π^* de sa cause.

Les vrais vecteurs (comme \vec{E}) appartiennent aux plans de symétrie Π , et sont orthogonaux aux plans d'antisymétrie Π^* des causes.

6 Loi de Coulomb : champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle *théorème*

On se place dans un repère sphérique de centre O . La distribution de charge ne dépend que de r , donc \vec{E} et $V(r)$ aussi. Tous les plans qui contiennent O sont plans de symétrie donc $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$. On applique le théorème de Gauss sur une sphère centrée sur O de rayon r :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{d}^2\Sigma = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$,

$$\frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \Rightarrow V(M) = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0 OM}$$

\Rightarrow

Les champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle q en O sont

$$V(M) = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0 OM} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle *schéma*

La figure 4 représente les champ (en rouge) et potentiel (en bleu) électrostatiques créés par une charge ponctuelle (positive à gauche et négative à droite).

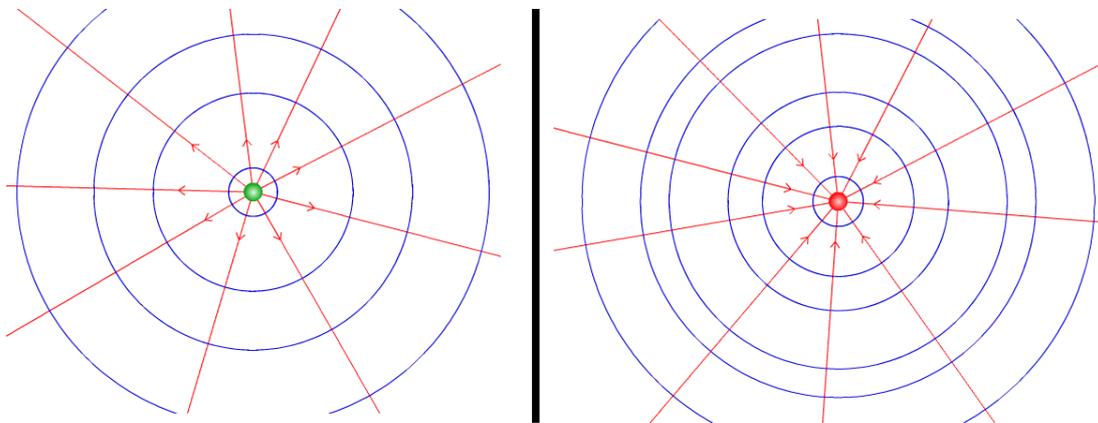


FIGURE 4 – Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

Principe de superposition *s'y retrouver*

Comme les équations de Maxwell sont linéaires, pour déterminer le champ ou le potentiel électrostatiques en M créés par plusieurs charges ponctuelles q_i positionnées en P_i , il suffit de superposer les sources :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4.\pi.\varepsilon_0 P_i M} \text{ et } \vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4.\pi.\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Illustration du principe de superposition dans le cas de deux charges ponctuelles *schéma*

La figure 5 représente les lignes de champ (en rouge) créées par deux charges ponctuelles de même signe. Le champ total \vec{E}_{tot} est la superposition des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés par chacune des deux charges :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

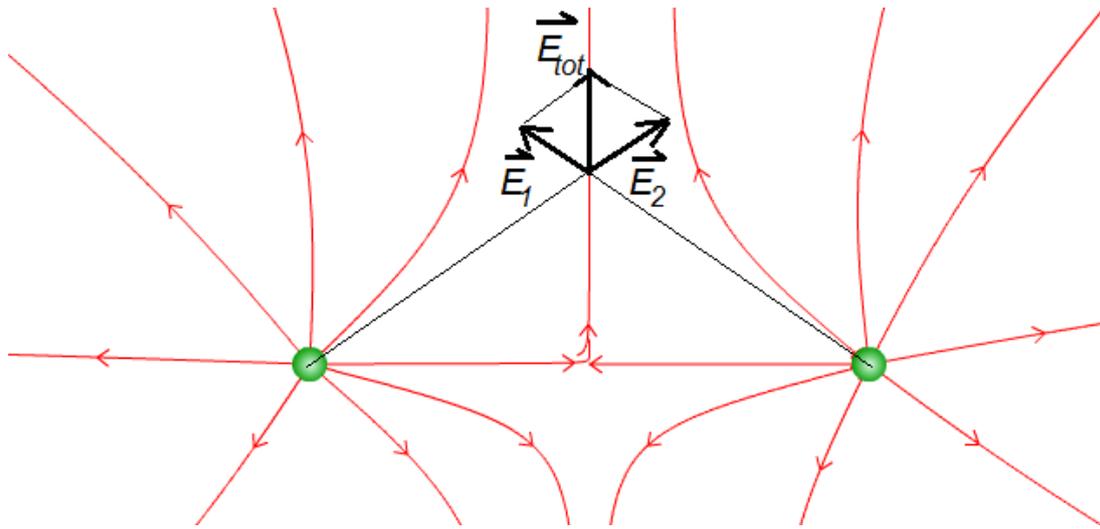


FIGURE 5 – Illustration du principe de superposition dans le cas de deux charges ponctuelles

Modèle de Thomson de l'atome *s'y retrouver*

En 1904, JJ Thomson propose le modèle suivant de l'atome :

- la charge positive $Q = Ze$ de l'atome est répartie de façon uniforme dans une sphère de rayon R ;
- les électrons, ponctuels, de charge $-e$ se déplacent à l'intérieur de cette sphère.

Analogie entre champ gravitationnel et champ électrostatique *s'y retrouver*

On peut faire l'analogie suivante :

	électrostatique	gravitation
force	$\vec{F}_e = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_g = G\frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$
particule	q	m
distribution	ρ	μ
champ	\vec{E}	\vec{A}
constantes	$\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}$	G
équation locale	$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div \vec{A} = -4\pi G \mu$
équation globale	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = -4\pi G M_{int}$

Condensateur plan *schéma*

La figure 6 représente un condensateur plan constitué de deux plans parallèles (les armatures) portant des densités superficielles de charges opposées et uniformes.

Champ disruptif dans l'air *à retenir*

L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, il s'ionise. C'est le cas quand la foudre traverse l'atmosphère. La valeur du champ disruptif de l'air est : $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

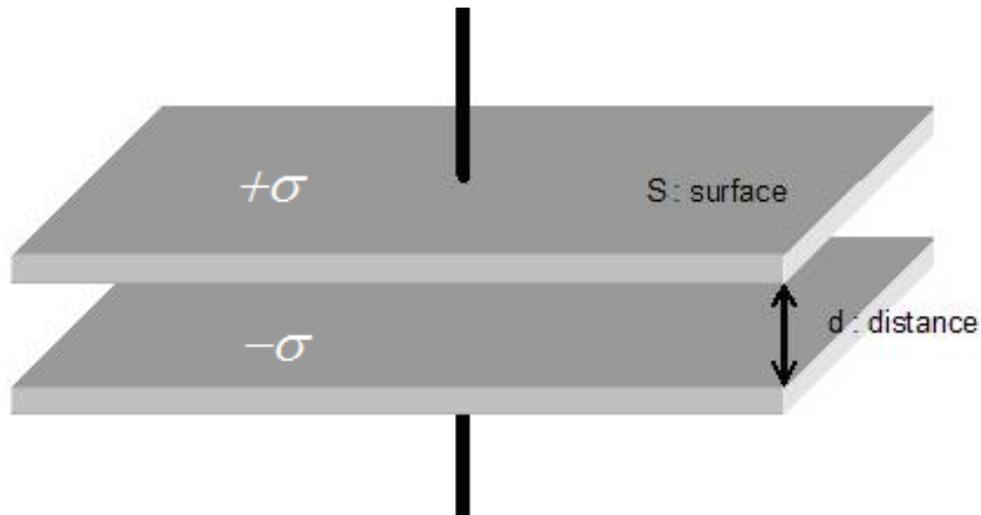


FIGURE 6 – Condensateur plan



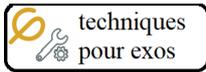
Valeurs numériques (compléments) Electrostatique

permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

le noyau de l'atome d'hydrogène par un proton ponctuel de charge e en O . Le champ de Coulomb donne un ordre de grandeur pour une distance $r \approx a_0 = 0,5 \text{ \AA}$:

$$\|\vec{E}(M)\| \approx \frac{e}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a_0^2} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (0,5 \times 10^{-10})^2} = 6 \times 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, il s'ionise. C'est le cas quand la foudre traverse l'atmosphère. La valeur du champ disruptif de l'air est : $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

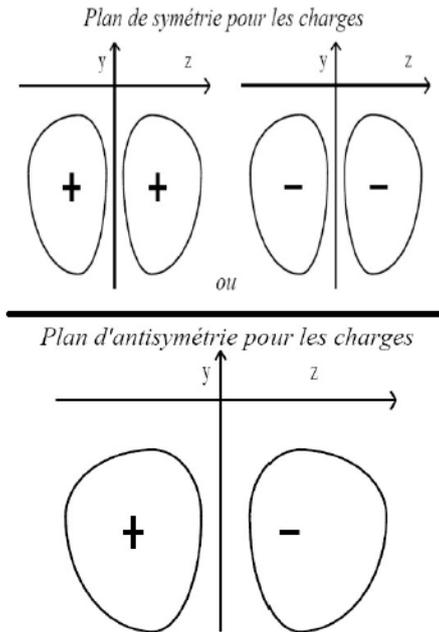


Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Etudier les symétries d'une distribution de charges

Pour la distribution de charge,

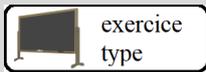
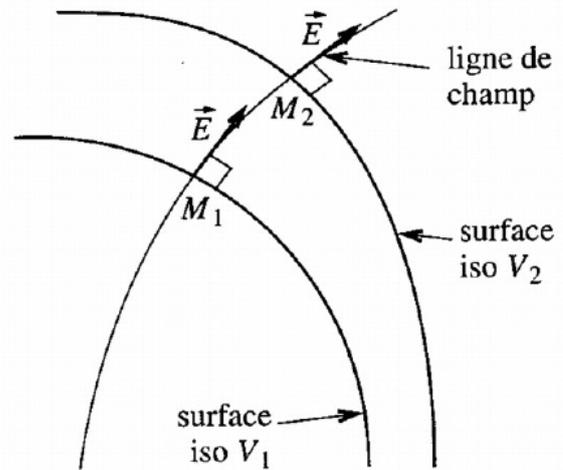
- (xOy) est plan de symétrie $\Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$
- (xOy) est plan d'antisymétrie $\Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$



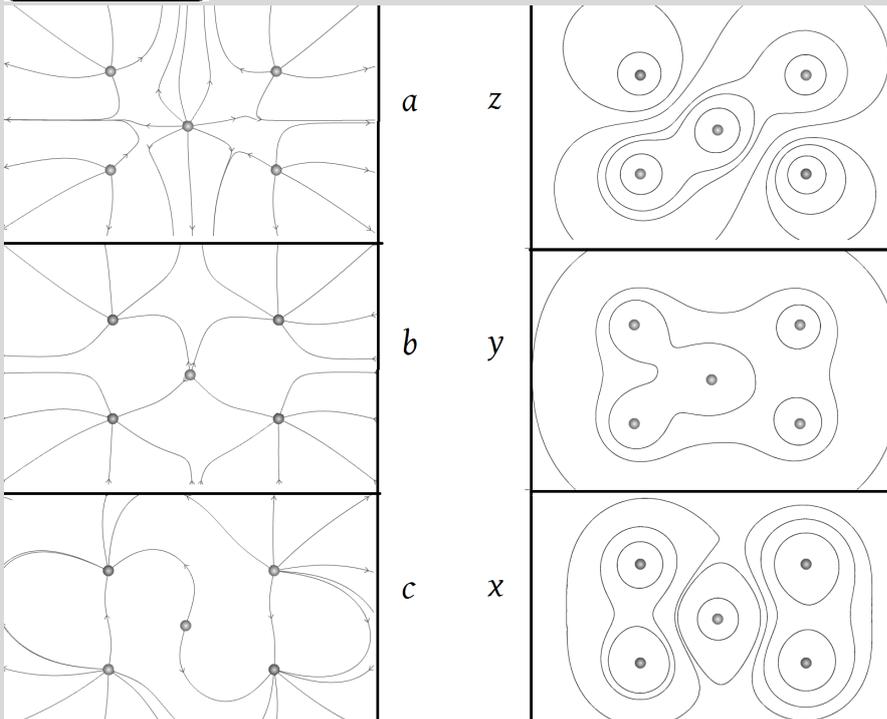
Etudier un champ électrostatique donné

Les lignes de champ électrostatique :

- sont dans les plans de symétrie de la distribution de charge,
- sont orthogonales aux plans d'anti-symétrie de la distribution de charge,
- ne sont pas fermées,
- elles vont des charges positives vers les charges négatives,
- elles sont orthogonales aux surfaces isopotentielles (NB : un métal est iso-potiel),
- orientées vers les potentiels décroissants.



Exercice 15.1 (le prof fait cet exercice type jeudi) Etude des symétries en électrostatique



On considère une distribution de cinq charges ponctuelles (repérées par des points).

Sur les figures a,b et c ci-contre sont représentées des lignes de champ et sur la figure z,y et x des équipotentielles.

1) Associer, en le justifiant, chaque représentation de lignes de champ à une représentation d'équipotentielles.

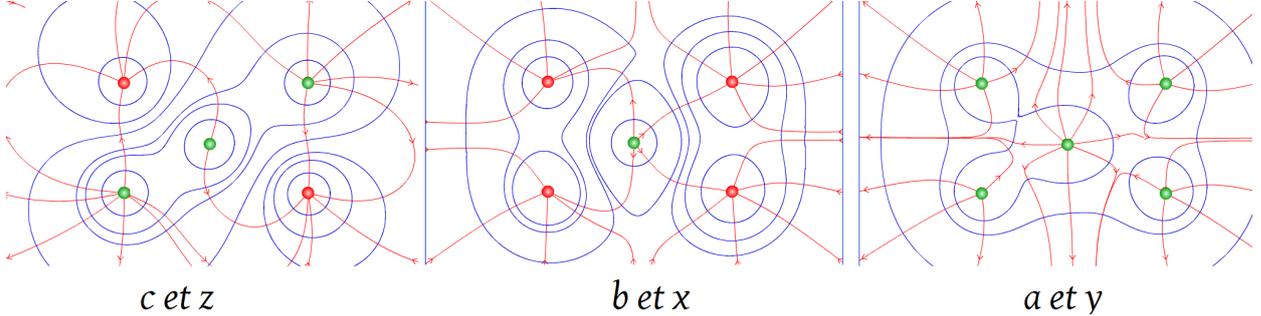
2) Repérer sur chaque distribution les signes opposés ou égaux des charges.

1) Les lignes de champ vont d'une charge positive vers une charge négative et elles sont orthogonales aux lignes isopotentielles.

Sur b et x la charge centrale est de signe opposé aux autres charges.

Sur a et y, la charge centrale est de même signe que les autres charges.

Sur c et z, la charge centrale est de même signe que deux des autres charges.



2) Les charges de signes identiques sont de couleurs identiques.



Exercice 15.2 pour s'entraîner

Symétries d'une sphère chargée surfaciquement

Soit une sphère de centre O , portant une répartition surfacique de charges σ .

1) Déterminer les symétries de cette répartition de charges :

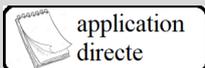
- 1.a) invariances ;
- 1.b) plans de symétrie ;
- 1.c) plans d'antisymétrie.

1) On se place dans un repère sphérique de centre O :

1.a) la distribution de charges est invariante par rotation de θ et φ : $\rho(r)$ uniquement (symétrie sphérique) ;

1.b) tous les plans contenant O sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) \forall M$.

1.c) pas de plans d'antisymétrie.



Exercice 15.3 pour s'entraîner

Symétries de distributions de charge

1) Déterminer les symétries des distributions de charges suivantes :

1.a) demi-cerceau chargé uniformément, d'axe Oz , dans le plan xOy , dans la partie $x < 0$.

1.b) cylindre chargé uniformément, d'axe Oz , avec une cavité cylindrique vide, d'axe $O'z$, avec OO' sur l'axe Ox .

1) Symétries :

1.a) demi-cerceau : xOy et (xOz) : plans de symétrie ; (yOz) : plan d'anti-symétrie.

1.b) cylindre avec une cavité cylindrique vide : (xOy) et (xOz) : plans de symétrie ; invariance par translation parallèlement à (Oz) .



Exercice 15.4 pour s'entraîner

Cas d'un champ connu

Soit le champ $\vec{E} = a.y.\vec{u}_x + a.x.\vec{u}_y$ (avec $a > 0$).

- 1) Montrer qu'il s'agit d'un champ électrostatique.
- 2) Déterminer le potentiel électrostatique.
- 3) Donner les équations des lignes équipotentielles dans le plan xOy .

1) $r\vec{ot}(\vec{E}) = \vec{0}$. c'est donc bien un champ électrostatique.

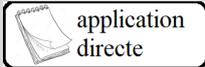
2) $\vec{E} = -\vec{grad}(V) \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -a.y$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = -a.x$. En intégrant la première équation, $V = -a.y.x + f(y)$ et dans la seconde : $-a.x + \frac{dV}{dy} = -a.x$, soit $f(y) = cste = 0$ si on veut. Donc

$$V = -a.y.x$$

3) $V = -a.y.x = cste = V_0 \Leftrightarrow$

$$y = \frac{-V_0}{a.y}$$

(ce sont des hyperboles).



application
directe

Exercice 15.5 pour s'entraîner

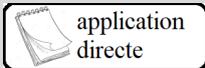
Un champ électrique orthoradial

- 1) Est-ce qu'un champ orthoradial ($C_\theta \vec{e}_\theta$ en cylindrique) peut être un champ électrique \vec{E} :
- en régime permanent ?
 - en régime non permanent ?

1) $r\vec{ot}(C_\theta \vec{e}_\theta) \neq \vec{0}$, or

1.a) en régime permanent, $r\vec{ot}(\vec{E}) = \vec{0}$, donc le champ électrique ne peut pas être orthoradial ;

1.b) en régime non permanent, $r\vec{ot}(\vec{E}) \neq \vec{0}$ *a priori*, donc le champ électrique peut être orthoradial *a priori*.



application
directe

Exercice 15.6 pour s'entraîner

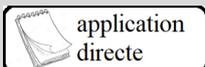
Potentiel scalaire créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q en O crée un potentiel scalaire $V(M) = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r}$ exprimé dans le repère sphérique de centre O .

- Ce potentiel vérifie-t-il bien l'équation de Poisson ?
- En déduire le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M .

1) Calculons le laplacien en sphérique $\Delta V = \frac{1}{r^2.\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2.\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial r})$ soit $\Delta V = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$ d'où $\Delta V = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0$. Dans le vide (sauf en O), la densité volumique de charge étant nulle, on a bien $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.

2) $\vec{E}(M) = -\vec{grad}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$, soit : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \vec{u}_r$.



application
directe

Exercice 15.7 pour s'entraîner

Nuage électronique

On modélise l'électron d'un atome d'hydrogène centré en O par une densité volumique de charge

$$\rho(r, \theta, \varphi) = C.e^{-\frac{r}{a_0}}$$

où $a_0 = 50pm$.

Déterminer C . Application numérique.

1) $-e = \iiint \rho(r, \theta, \varphi).dr.r.d\theta.r.\sin(\theta).d\varphi = 4.\pi.C.a_0^3 \int_{x=0}^{x=\infty} x^2 e^{-x} dx$.
Soit

$$C = \frac{-e}{4.\pi.a_0^3}$$

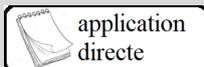


Exercice 15.8 pour s'entraîner
Cerceau linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge, de densité λ , uniforme sur le cercle de centre O , d'axe Oz , de rayon R .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :
 - 1.a) invariances ;
 - 1.b) plans de symétrie ;
 - 1.c) plans d'antisymétrie.
- 2) En déduire les symétries de \vec{E} :
 - 2.a) sur l'axe (Oz) ;
 - 2.b) sur l'axe (Oz) , en $z = 0$.

- 1) Symétries dans un repère cylindrique d'axe (Oz) :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de θ : $\rho(r, z)$ uniquement (symétrie cylindrique) ;
 - 1.b) le plan (xOy) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$.
 - 1.c) Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
- 2) Symétries de \vec{E} :
 - 2.a) Sur l'axe (Oz) , $\vec{E} // \vec{u}_z$.
 - 2.b) Sur l'axe (Oz) , en $z = 0$ (plan (xOy)), $\vec{E} = \vec{0}$.

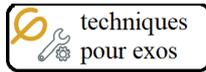


Exercice 15.9 pour s'entraîner
Demi-sphère surfaciquement chargée

On considère une distribution surfacique de charge uniforme σ sur une demi-sphère (dans l'espace $z > 0$) de centre O , de rayon R .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :
 - 1.a) invariances ;
 - 1.b) plans de symétrie ;
 - 1.c) plans d'antisymétrie.
- 2) Champ électrostatique :
 - 2.a) En déduire les symétries de \vec{E} en O .

- 1) Symétries dans un repère sphérique de centre O :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de φ : $\rho(r, \theta)$ uniquement ;
 - 1.b) tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \forall M$.
 - 1.c) Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
- 2) Champ électrostatique :
 - 2.a) $\vec{E} // \vec{u}_z$.



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

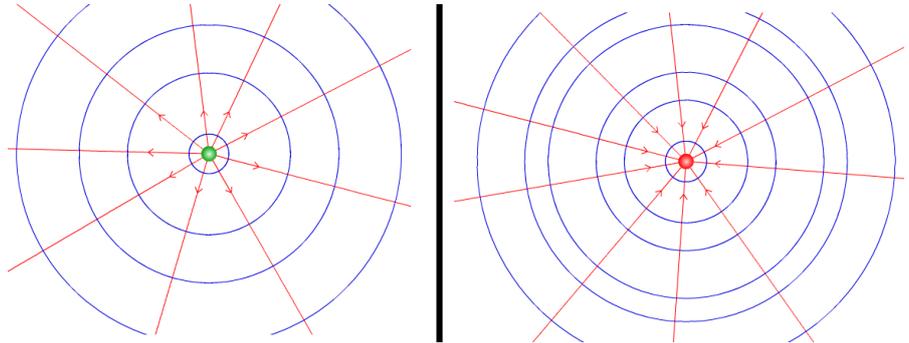
Calculer un champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges

Il faut superposer le champ de Coulomb de chacune des charges

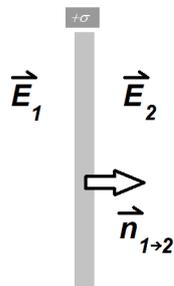
$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{P}_i M}{P_i M^3}$$

et

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0 P_i M}$$



Calculer un champ électrostatique créé par une distribution continue de charges



Il faut utiliser les symétries (s'il y en a assez) puis le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée qui vérifie les symétries.

Il peut y avoir une discontinuité de \vec{E} dans l'espace en présence d'une zone chargée surfaciquement (σ) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Calculer la capacité d'un condensateur

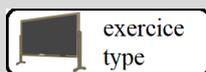
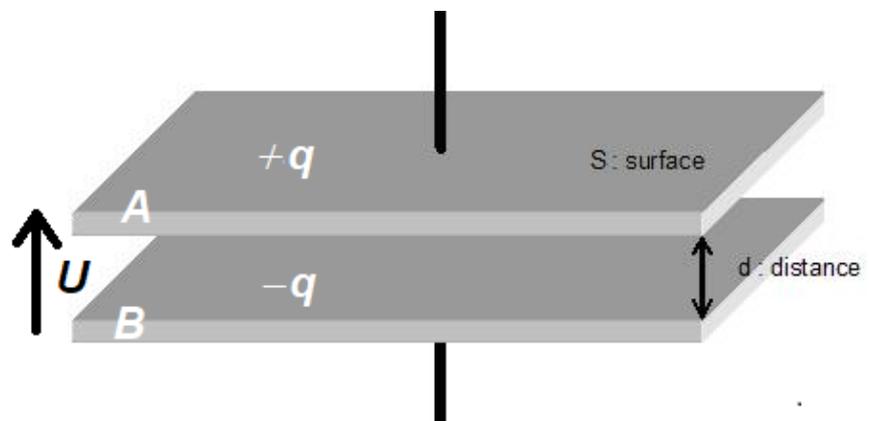
On détermine préalablement l'expression de \vec{E} dans l'espace inter-armatures

- soit on utilise la tension entre deux armatures

$$U = \frac{q}{C} \text{ avec } U = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- soit on utilise l'énergie stockée dans l'espace inter-armatures

$$E_c = \frac{q^2}{2C} \text{ avec } E_c = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 d^3\tau$$



Exercice 15.10 (le prof fait cet exercice type jeudi) Détermination d'un champ électrostatique

- Plan infini uniformément chargé en surface

On s'intéresse au plan yOz chargé uniformément en surface, de charge surfacique σ .

- Etudier les symétries.
- Déterminer le champ électrostatique régnant dans l'espace.

- Condensateur plan

- En déduire le champ régnant entre les armatures d'un condensateur plan.
- En déduire la capacité C du condensateur plan.

2.c) En déduire la densité volumique d'énergie électrostatique dans l'espace entre les armatures en fonction de \vec{E} .

1) Plan infini uniformément chargé en surface

1.a) L'étude des symétries montre que la distribution de charges ne dépend que de x donc $\vec{E}(x)$ et que les plans contenant \vec{u}_x sont plans de symétrie pour σ . Donc $\vec{E} = E_x(x) \vec{u}_x$. D'autre part $E_x(x)$ est une fonction impaire car $V(x)$ est paire.

1.b) On peut choisir comme surface de Gauss un cylindre d'axe Ox de surface S , symétrique par rapport au plan yOz (terminé en $-x$ et $+x$) :

$$\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = S E_x(x) - S E_x(-x) = 2 S E_x(x)$$

et

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_x(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2) Condensateur plan

2.a) Le théorème de superposition donne :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{n}_1 + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{n}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-\vec{u}_x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

2.b) La différence de potentiel entre les deux armatures est

$$U = \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} dV = - \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}$$

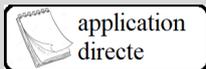
Or $U = \frac{q}{C} = \frac{S\sigma}{C}$, donc

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

2.c) L'énergie du condensateur plan est

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{d (S\sigma)^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{d S E^2 \varepsilon_0^2}{2\varepsilon_0} = d S \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

la densité volumique d'énergie est donc $e_C = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$.



application
directe

Exercice 15.11 pour s'entraîner

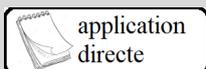
Symétries d'une sphère chargée surfaciquement

Soit une sphère de centre O , portant une répartition surfacique de charges σ .

1) Déterminer les symétries de cette répartition de charges :

- 1.a) invariances ;
- 1.b) plans de symétrie ;
- 1.c) plans d'antisymétrie.

$\rho(r)$ uniquement (symétrie sphérique); tous les plans contenant O sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) \forall M$.



application
directe

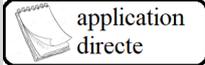
Exercice 15.12 pour s'entraîner

Détermination d'un champ électrostatique en symétrie cylindrique

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe (Oz) , de charge (le cylindre de rayon R est uniformément chargé).

1) En déduire les symétries (en statique) de V et \vec{E} .

1) $\triangleright \rho(r)$, de plans de symétrie $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, et (\vec{u}_r, \vec{u}_z) . Donc $V(r)$ et $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$.



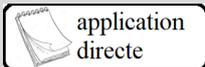
application
directe

Exercice 15.13 pour s'entraîner Quatre charges ponctuelles

Soit quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré d'axes Ox et Oy , de centre O dont la longueur de la diagonale est $2a$.

- 1) Calculer le potentiel en O ainsi que le champ \vec{E} dans les cas où les charges sont les suivantes :
- 1.a) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$.
- 1.b) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.
- 1.c) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.
- 1.d) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.

- 1) On trouve grâce au théorème de superposition :
- 1.a) $V(0,0) = \frac{e}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$ et $\vec{E}(0,0) = \vec{0}$.
- 1.b) $V(0,0) = 0$ et $\vec{E}(0,0) = \vec{0}$.
- 1.c) $V(0,0) = 0$ et $\vec{E}(0,0) = \frac{e}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} \vec{u}_x$.
- 1.d) $V(0,0) = \frac{e}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$ et $\vec{E}(0,0) = \frac{e}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$.



application
directe

Exercice 15.14 pour s'entraîner Modèle de Thomson de l'atome

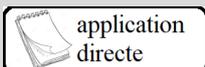
En 1904, JJ Thomson propose le modèle suivant de l'atome :

- la charge positive $Q = Ze$ de l'atome est répartie de façon uniforme dans une sphère de rayon R ;
- les électrons, ponctuels, de charge $-e$ se déplacent à l'intérieur de cette sphère.

On se place dans le cadre du modèle de l'atome de Thomson.

- Déterminer la densité volumique de la charge positive à l'intérieur de l'atome.
- En déduire le champ créé par la charge positive à l'intérieur de l'atome.

$$\vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$$



application
directe

Exercice 15.15 pour s'entraîner Utilisation des potentiels en électrostatique

On donne le potentiel scalaire $V(M)$ créé en M par D , une distribution de charges ρ d'extension finie,

$$V(M, t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3\tau$$

(la formule des potentiels retardés)

- Que devient cette formule dans le cas électrostatique ?
- En déduire l'expression du champ électrostatique.

1)

$$V(M, t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3\tau = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P)}{PM} d^3\tau$$

2) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(V) = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\rho(P)}{PM} \right) d^3\tau$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\rho(P)}{PM} \right) = \rho(P) \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) = \rho(P) \left(\frac{-\overrightarrow{PM}}{PM^3} \right)$. Donc

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P) \cdot \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3\tau$$



Exercice 15.16 pour s'entraîner

Champ électrostatique créé par un fil infini linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge infinie de densité λ sur l'axe Oz .

- 1) Etudier les symétries :
 - 1.a) invariances de cette répartition de charge ;
 - 1.b) plans de symétrie et d'antisymétrie de cette répartition de charge ;
 - 1.c) en déduire les symétries de \vec{E} .
- 2) Calculer le champ électrostatique créé en un point M à la distance r de l'axe Oz .
- 3) Potentiel électrostatique :
 - 3.a) En déduire le potentiel électrostatique créé en un point M à la distance r de l'axe Oz .
 - 3.b) Peut-on prendre $V = 0$ à l'infini ?

- 1) Symétries dans un repère cylindrique d'axe (Oz) :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de θ et translation de z : $\rho(r)$ uniquement (symétrie circulaire) ;
 - 1.b) tous les plans orthogonaux à (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \forall M$ et tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$. Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
 - 1.c) $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- 2) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \vec{u}_r$.
- 3) Potentiel :
 - 3.a) $V(r) = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$.
 - 3.b) $r_0 \rightarrow \infty$ pose un problème mathématique (en fait la distribution est infinie, aussi, on ne peut pas choisir le potentiel nul à l'infini).



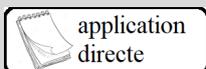
Exercice 15.17 pour s'entraîner

Deux condensateurs en série

Un générateur parfait impose une différence de potentiel $U = 12V$ aux bornes de deux condensateurs en série, de capacités respectives $C_1 = 10\mu F$ et $C_2 = 80\mu F$.

- 1) Calculer les tensions respectives aux bornes des deux condensateurs :
 - 1.a) u_1 ;
 - 1.b) et u_2 .
- 2) Calculer les énergies stockées respectivement dans les deux condensateurs :
 - 2.a) E_1 ;
 - 2.b) et E_2 .

- 1) Tensions respectives aux bornes des deux condensateurs :
 - 1.a) $u_1 = \frac{C_2 \cdot U}{C_1 + C_2} = 11V$;
 - 1.b) et $u_2 = \frac{C_1 \cdot U}{C_1 + C_2} = 1,3V$.
- 2) Energies stockées respectivement dans les deux condensateurs :
 - 2.a) $E_1 = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot U^2}{(C_1 + C_2)^2} = 0,57mJ$;
 - 2.b) et $E_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot U^2}{(C_1 + C_2)^2} = 71\mu J$.



Exercice 15.18 pour s'entraîner

Capacité d'un condensateur diédrique

1) Rappeler la capacité C_0 d'un condensateur formé de deux plans parallèles parfaitement conducteurs éloignés de e , de surface S .

2) On considère maintenant dans un repère cylindrique d'axe Oz un dièdre (d'axe Oz) formé de deux plans parfaitement conducteurs définis par $r \in [R_1; R_2]$, $z \in [0; h]$, qui font un angle θ petit entre eux.

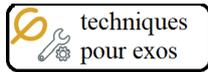
- 2.a)** En réutilisant le résultat de la question précédente, trouver la capacité $C(\theta)$ de ce condensateur diédrique.
- 2.b)** Dans quel cas limite peut-on retrouver C_0 ?

1) Condensateur plan : $C_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{e}$.

2) Condensateur diédrique :

2.a)
$$C(\theta) = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \int_{z=0}^{z=h} \frac{\varepsilon_0 \cdot dz \cdot dr}{r \cdot \theta} = \frac{\varepsilon_0 \cdot h}{\theta} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

2.b) Si $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R_1 + x$, avec $\frac{x}{R_1} \ll 1$, soit $C(\theta) \approx \frac{\varepsilon_0 \cdot h}{\theta} \frac{x}{R_1}$, or comme $e = \theta \cdot R_1$ et $S = x \cdot h$,
 $C(\theta) \approx C_0$.



Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Analogie entre champ gravitationnel et champ électrostatique

On peut faire l'analogie suivante :

	électrostatique	gravitation
force	$\vec{F}_e = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$
particule	q	m
distribution	ρ	μ
champ	\vec{E}	\vec{A}
constantes	$\frac{-1}{4 \pi \epsilon_0}$	\mathcal{G}
équation locale	$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div \vec{A} = -4 \pi \mathcal{G} \mu$
équation globale	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = -4 \pi \mathcal{G} M_{int}$

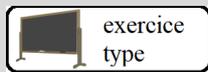
Calcul d'une énergie de constitution

Transformation infinitésimale :

- état initial : sphère de rayon r et de charge $\frac{4}{3} \pi \rho r^3 +$ charge dq à l'infini
- état final : sphère de rayon $r + dr$ avec $4 \pi r^2 dr \rho = dq$.

On évalue la variation d'énergie potentielle dE de la charge depuis l'infini jusqu'à la sphère de rayon r (sur laquelle elle se répartit de façon uniforme sur la surface).

Pour trouver l'énergie, il suffit ensuite d'intégrer avec r qui varie de 0 à R , le rayon final.



Exercice 15.19 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Analogie gravitation - électrostatique et énergie de constitution

1) On s'intéresse à un astre à symétrie sphérique de rayon R et de masse M : sa masse volumique μ ne dépend que de r , la distance au centre O .

1.a) Faire une analogie avec l'électrostatique.

1.b) Déterminer alors le champ gravitationnel créé par l'astre partout dans l'espace. Montrer en particulier qu'en dehors de l'astre, tout se passe comme si ce dernier était ponctuel.

1.c) Déterminer l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle.

2) On suppose maintenant que l'astre est de masse volumique uniforme.

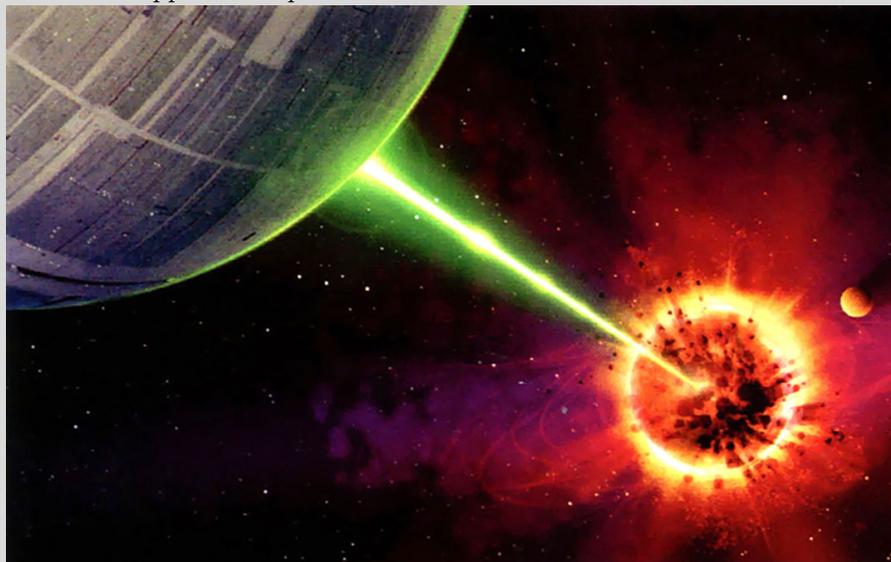
2.a) Déterminer la masse volumique μ de l'astre.

2.b) On cherche à exprimer l'énergie de constitution de l'astre à un préfacteur numérique près (K sans unité) par analyse dimensionnelle, sous la forme :

$$E_{\text{astre}} = K \mathcal{G}^\gamma M^\alpha R^\beta$$

Déterminer γ , α et β . Quel est le signe de K ?

2.c) Déterminer explicitement E_{astre} en imaginant la constitution de l'astre par adjonction de masses infinitésimales apportées depuis l'infini.



Dans *Star Wars* la première planète détruite en totalité par l'Étoile noire est la planète Alderaan. Cette planète présente à peu près les mêmes caractéristiques, en terme de taille et de masse, que la planète Terre.

2.d) Évaluer E_{astre} dans le cas de la Terre ($M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6,4 \times 10^6$ m).

- 1) Astre à symétrie sphérique.
 1.a) On peut faire l'analogie suivante :

	électrostatique	gravitation
force	$\vec{F}_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$
particule	q	m
distribution	ρ	μ
champ	\vec{E}	\vec{A}
constantes	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	\mathcal{G}
équation locale	$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div \vec{A} = -4\pi G \mu$
équation globale	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = -4\pi G M_{int}$

1.b) Invariances : $\mu(r) \Rightarrow \vec{A}(r)$. Les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont plans de symétrie. Comme \vec{A} est un vrai vecteur, $\vec{A} = A_r \vec{u}_r$.

En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de centre O et de rayon $r < R$, on obtient :
 $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = A_r(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = -4\pi \mathcal{G} \int \mu(r) r^2 dr$

En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de centre O et de rayon $r \geq R$, on obtient :
 $\oiint \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = A_r(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M \Rightarrow$

$$\vec{A} = -\frac{\mathcal{G} M}{r^2} \vec{u}_r$$

Hors de l'astre (si $r \geq R$), tout se passe effectivement comme si l'astre était ponctuel. En particulier, en $r = R$, $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM}{R^2} \vec{u}_r = -mg \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\vec{A}(r = R_T) = -\frac{\mathcal{G} M}{R^2} \vec{u}_r$$

- 1.c) Pour trouver l'énergie potentielle, partons de la force :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow E_p = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$$

- 2) $\mu = \text{cste}$
 2.a) La densité volumique de masse est

$$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

- 2.b) Les unités des différentes grandeurs sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} [E_{\text{astre}}] = \text{J} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ [G] = \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2 = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \\ [M] = \text{kg} \\ [R] = \text{m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = -\gamma + \alpha \\ 2 = 3\gamma + \beta \\ -2 = -2\gamma \end{array} \right.$$

Ainsi, $\gamma = 1, \beta = -1$ et $\alpha = 2$.

$$E_{\text{astre}} = K \frac{\mathcal{G} M^2}{R}$$

Comme l'astre est stable, $K < 0$.

- 2.c) On s'intéresse à la transformation infinitésimale :

- état initial : Astre de rayon r et de masse $\frac{4}{3}\pi\mu r^3$ + masse dm à l'infini
- état final : Astre de rayon $r + dr$ et de masse $\frac{4}{3}\pi\mu (r + dr)^3$ avec $4\pi r^2 dr \mu = dm$.

Lors de cette transformation, l'énergie varie de $dE = E_{p_f} - E_{p_i}$, où l'énergie potentielle est telle que Donc $dE = -\mathcal{G} \frac{dmM}{r} - 0$.

Pour la transformation dans son entier (la constitution de l'astre), il faut intégrer :

$$E_{\text{astre}} = \int dE = -\mathcal{G} M \int \frac{dm}{r} = -4\pi \mathcal{G} M \mu \int \frac{r^2 dr}{r} = -4\pi \mathcal{G} M \frac{3M}{4\pi R^3} \int_{r=0}^{r=R} r dr = -\frac{3\mathcal{G} M^2 R^2}{R^3} \frac{1}{2}$$

On trouve donc $E_{\text{astre}} = -\frac{3GM^2}{2R}$ (soit $K = -\frac{3}{2}$).

2.d) AN :

$$E_{\text{astre}} = -\frac{3 \times 6,7 \times 10^{-11} \times (6,0 \times 10^{24})^2}{2 \times 6,4 \times 10^6} = -10^{32} \text{ J}$$



application
directe

Exercice 15.20 pour s'entraîner Sphère chargée uniformément

(Centrale 2007)

Une sphère centrée sur O de rayon R est uniformément chargée de charge Q .

1) Calculer :

1.a) le champ électrique \vec{E}

1.b) et le potentiel V

en tout point de l'espace.

1.c) Calculer l'énergie électrostatique de la sphère.

1) On trouve

1.a) pour le champ électrique :

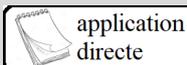
$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ si } r > R \\ \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ si } r < R \end{cases}$$

1.b) et le potentiel V :

$$\begin{cases} V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ si } r > R \\ V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ si } r < R \end{cases}$$

1.c) L'énergie électrostatique de la sphère est :

$$E_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$



application
directe

Exercice 15.21 pour s'entraîner Champ et potentiels électrostatiques d'un noyau atomique

On assimile le noyau d'un atome à une sphère uniformément chargée, de centre O , de rayon R , de charge Q .

1) Généralités :

1.a) Établir l'expression du champ électrostatique \vec{E} produit par le noyau en un point quelconque M .

1.b) En déduire le potentiel V en un point quelconque, en choisissant $V = 0$ à l'infini.

2) Application :

On considère un noyau de baryum : $Z = 56$ et $R = 6,3 \text{ fm}$. On donne la charge électronique $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$. Que vaut le champ

2.a) au voisinage du noyau : $r = 2R$?

2.b) à la périphérie de l'atome : $r = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$?

1) Généralités :

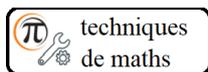
1.a) Si $r > R$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ et si $r < R$: $\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$.

1.b) Si $r > R$: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et si $r < R$: $V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)$.

2) Application :

2.a) au voisinage du noyau : $r = 2R$, $|\vec{E}| = 5,1 \cdot 10^{20} \text{ V.m}^{-1}$ et $V = 6,4 \cdot 10^6 \text{ V}$;

2.b) à la périphérie de l'atome : $|\vec{E}| = 8,1 \cdot 10^{12} \text{ V.m}^{-1}$ et $V = 0,81 \text{ kV}$.



Techniques mathématiques à maîtriser
Intégrer une divergence

Position du problème :

Il s'agit de déterminer le champ \vec{A} connaissant sa divergence $div(\vec{A})$. Autrement dit, il faut intégrer des équations différentielles portant sur les trois composantes A_1, A_2, A_3 de \vec{A} , elles-mêmes fonction *a priori* de trois variables s_1, s_2, s_3 .

Symétries :

Pour simplifier le problème, il faut avant tout utiliser les symétries :

- invariances : si $div(\vec{A})$ ne dépend pas d'une des trois variables s_1, s_2, s_3 , alors \vec{A} n'en dépendra pas non plus.
- les plans de symétrie pour $div(\vec{A})$ sont des plans de symétrie pour \vec{A} . Le champ \vec{A} appartient aux plans de symétrie de $div(\vec{A})$.
- les plans d'antisymétrie pour $div(\vec{A})$ sont des plans d'antisymétrie pour \vec{A} . Aussi, le champ \vec{A} est orthogonal aux plans d'antisymétrie de $div(\vec{A})$.

■ *Exemple :*

Si $div(\vec{A})$ fonction de r uniquement en coordonnées sphériques, alors :

- \vec{A} ne dépend que de r ;
- les plans de symétrie pour $div(\vec{A})$ sont les plans contenant O : ce sont les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.
Donc $\vec{A} = A_r \vec{u}_r$;
- les plans d'antisymétrie pour $div(\vec{A})$ n'existent pas.

Conclusion : $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$.

Utilisation de la formule d'Ostrogradsky :

On peut utiliser la formule d'Ostrogradsky : $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V div(\vec{A}) d^3\tau$.

Pour ce faire, il faut définir une surface fermée Σ (orienté obligatoirement vers l'extérieur) qui vérifie les symétries. Le volume V est délimité par Σ .

■ *Exemple :*

Si $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques, alors :

- Σ est une sphère de rayon r , centrée sur O ;
- V est la boule de rayon r , centrée sur O .

Utilisation de l'expression de la divergence dans le repère adapté :

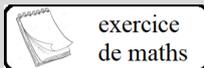
on peut écrire $div(\vec{A}) = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left(\frac{\partial(\mu_2 \mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \mu_1 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \mu_2 A_3)}{\partial s_3} \right)$ en utilisant

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

■ *Exemple :*

Si $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques, alors :

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 A_r)}{dr}$$

exercice
de maths**Exercice 15.22** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de divergence donnée (1)**

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

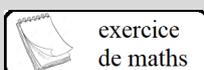
$$\operatorname{div} \vec{E} = a$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée un cylindre d'axe Oz , de rayon r de longueur ℓ pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 2\pi r \ell = a \pi r^2 \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{a r}{2} \vec{u}_r$.

exercice
de maths**Exercice 15.23** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de divergence donnée (2)**

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

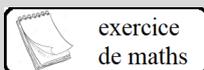
$$\operatorname{div} \vec{E} = a r$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée un cylindre d'axe Oz , de rayon r de longueur ℓ pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 2\pi r \ell = a 2\pi \frac{r^3}{3} \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{a r^2}{3} \vec{u}_r$.

exercice
de maths**Exercice 15.24** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de divergence donnée (3)**

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

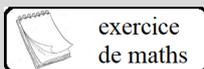
$$\operatorname{div} \vec{E} = a$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^3}{3}$$

donc $\vec{E} = \frac{a r}{3} \vec{u}_r$.

exercice
de maths**Exercice 15.25** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de divergence donnée (4)**

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

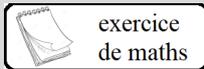
$$\operatorname{div} \vec{E} = a r^2$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^5}{5} \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{a r^3}{5} \vec{u}_r$.



exercice
de maths

Exercice 15.26 pour s'entraîner

Calcul d'un champ de divergence donnée(5)

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

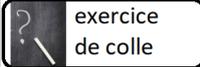
$$\operatorname{div} \vec{E} = a r$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^4}{4} \ell$$

donc $\vec{E} = a r^2 \vec{u}_r$.



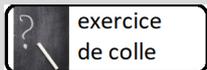
exercice
de colle

Exercice 15.27

Analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel



- 1) Faire une analogie formelle entre le champ électrique créé par une charge ponctuelle et l'attraction créée par une masse ponctuelle.
- 2) Grâce à cette analogie, énoncer la loi locale que vérifie le champ d'attraction gravitationnel \vec{A} .
- 3) Énoncer un "théorème de Gauss pour le champ d'attraction gravitationnel \vec{A} ".
- 4) On considère un astre (la Terre par exemple), qu'on assimile à une sphère de rayon R et de centre O . Sa masse volumique est à symétrie sphérique : μ ne dépend que de r .
 - 4.a) Grâce aux symétries de μ , déduire la forme qualitative du champ gravitationnel \vec{A} créé par l'astre.
 - 4.b) Appliquer le théorème de Gauss pour connaître quantitativement \vec{A} .
 - 4.c) Montrer que, hors de l'astre, " tout se passe comme si l'astre était ponctuel ".



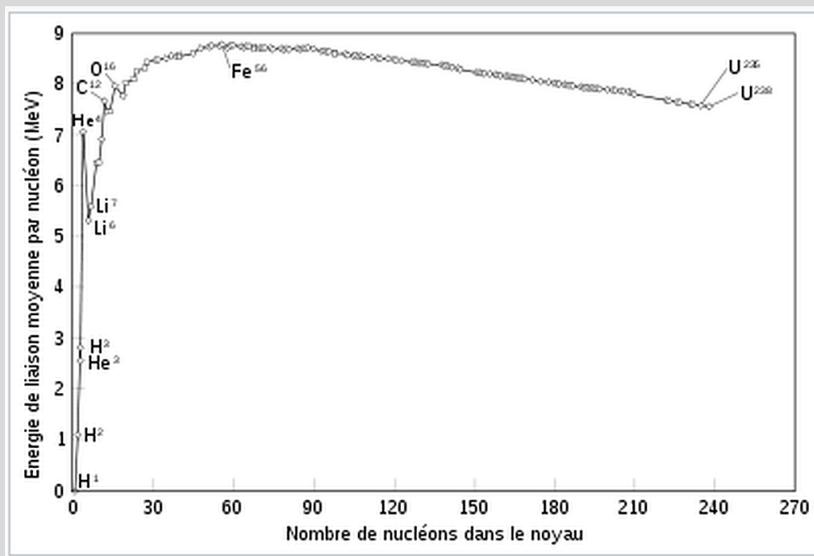
Exercice 15.28
Etude électrostatique d'un noyau atomique

Le noyau atomique désigne la région située au centre d'un atome constituée de protons et de neutrons (les nucléons). La taille du noyau (de l'ordre de 10^{-15} m) est environ 100 000 fois plus petite que celle de l'atome (10^{-10} m) et concentre quasiment toute sa masse.

Les forces nucléaires qui s'exercent entre les nucléons sont à peu près un million de fois plus grandes que les forces entre les atomes ou les molécules.

La formule de Weizsäcker, appelée aussi formule de Bethe-Weizsäcker, est une formule semi-empirique donnant une valeur approximative de l'énergie de liaison nucléaire B caractérisant la liaison entre les nucléons qui constituent le noyau des atomes :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm a_p A^{-1/2}$$



Cette formule permet d'expliquer avec une bonne approximation la courbe d'Aston (graphique ci-contre, par Binding energy curve - common isotopes.svg : Fastfission, JWB et AutiwaDerivative Work : Eric Bajart - Binding energy curve - common isotopes.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10585721>), qui représente l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de nucléons dans le noyau. C'est une courbe expérimentale car chaque énergie de liaison y est calculée à partir de la masse du noyau atomique mesurée par spectrométrie de masse.

On assimile le noyau d'un atome à une sphère uniformément chargée, de centre O , de rayon R , de charge Q .

1) Généralités :

- 1.a) Établir l'expression du champ électrostatique \vec{E} produit par le noyau en un point quelconque M .
- 1.b) En déduire le potentiel V en un point quelconque, en choisissant $V = 0$ à l'infini.

2) Application :

On considère un noyau de baryum : $Z = 56$ et $R = 6,3$ fm. On donne la charge électronique $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C et la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹. Que vaut le champ

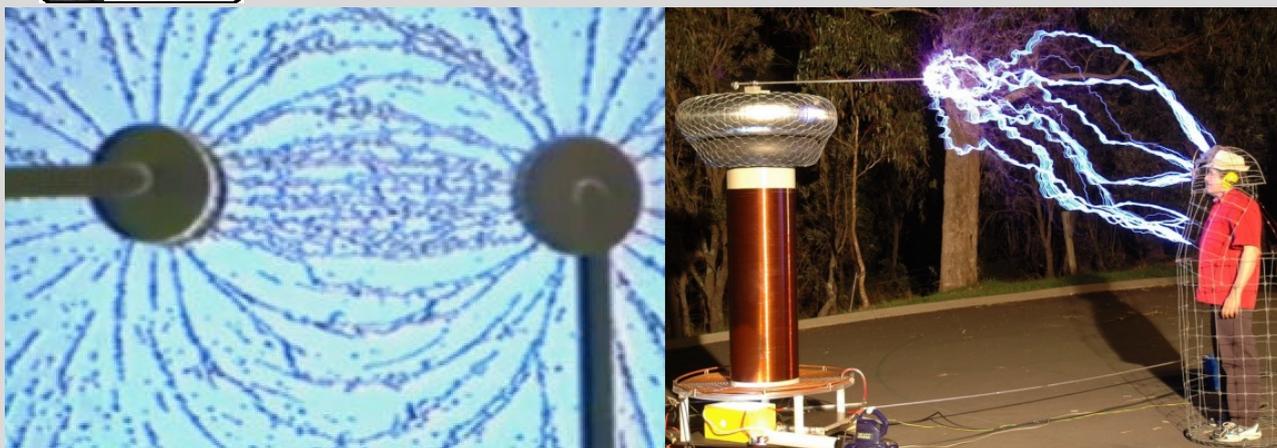
- 2.a) au voisinage du noyau : $r = 2R$?
- 2.b) à la périphérie de l'atome : $r = 1,0 \times 10^{-10}$ m ?

3)

- 3.a) Déterminer l'énergie de constitution du noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
- 3.b) Justifier la nécessité de l'interaction forte.

exercice de colle

Exercice 15.29
Modélisation d'un conducteur en électrostatique



Les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires à la surface des conducteurs (photo de gauche), et le champ électrostatique est nul dans une cavité d'un conducteur en électrostatique (cage de Faraday, photo de droite).

Dans tout l'exercice, on se placera en électrostatique.

1) Dans un conducteur ohmique de conductivité γ , la densité volumique de courant \vec{j} est reliée au champ électrostatique \vec{E} par : $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$.

1.a) Montrer que le champ électrostatique est nul dans un conducteur ohmique en régime électrostatique.

1.b) En déduire qu'un conducteur est isopotential et que le champ électrostatique est nul dans une cavité d'un conducteur en électrostatique.

1.c) En déduire que la densité volumique de charge ρ est nulle dans le conducteur. Le conducteur étant chargé, où se trouve donc la charge ?

2) On se propose donc de donner une modélisation plus "réaliste" de la distribution de charge. Soit donc un conducteur qui occupe l'espace compris entre les deux plans $x = a$ et $x = -a$. Le modèle réaliste de la distribution de charge, dans le voisinage de la surface d'un conducteur, consiste à admettre que la charge volumique décroît exponentiellement depuis les bords avec une constante d'espace $\delta \ll a$:

$$\rho(x \in [-a; +a]) = \rho_0 \cdot \left(e^{\frac{x-a}{\delta}} + e^{\frac{-x-a}{\delta}} \right)$$

2.a) Donner l'allure de la courbe $\rho(x)$.

2.b) Quelles sont les symétries de cette distribution de charge ?

3) En déduire l'expression du champ électrique créé dans tout l'espace.

4) On s'intéresse au cas où δ tend vers 0 de telle sorte que la quantité $\rho_0 \delta = \sigma$ soit finie.

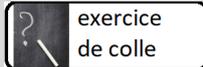
4.a) Que vaut le champ dans l'espace ?

4.b) Retrouve-t-on bien un champ nul dans le conducteur, et un champ orthogonal à sa surface ?

4.c) Est-ce cohérent avec la discontinuité d'un champ :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

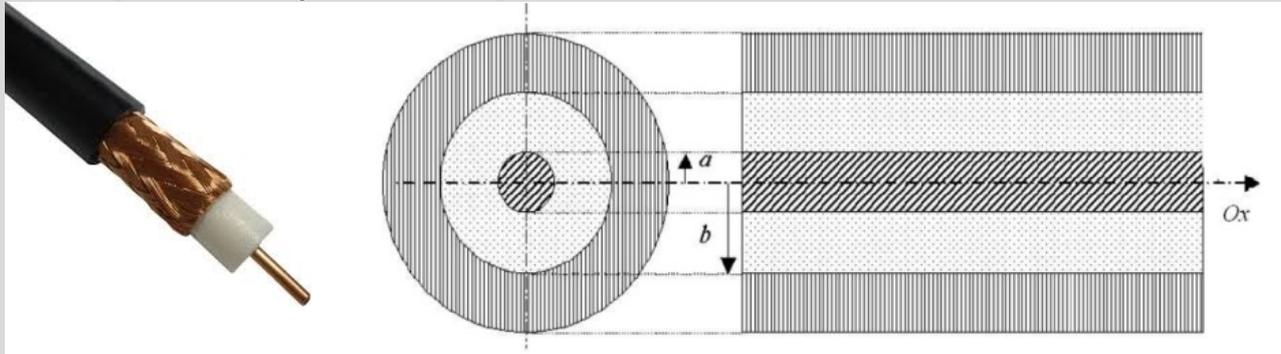
4.d) Retrouve-t-on le champ $\vec{E} = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{ext}$ créé par un plan infini chargé surfaciquement σ' si a tend vers 0 ?



exercice
de colle

Exercice 15.30 Etude d'un câble coaxial en électrostatique

Un câble coaxial (cf. figure suivante) est constitué de trois cylindres infinis de même axe (Oz) :
 l'« âme », de rayon a , conducteur électrique porté au potentiel électrique V_0 ;
 la « gaine », isolant de rayon extérieur b (on admettra que la présence de l'isolant a la permittivité ϵ_0 , du vide : $\epsilon_r = 1$) ;
 la « masse », de rayon extérieur c , conducteur électrique porté au potentiel électrique nul par convention.
 On se place dans le régime électrostatique.



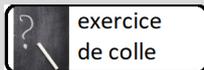
1) Qu'est-ce que le régime électrostatique ? Rappeler, dans le cadre de l'électrostatique, les équations de Maxwell, ainsi que l'expression du champ électrique \vec{E} en fonction du potentiel V . Que vaut le champ électrique \vec{E} dans un conducteur en électrostatique ? En déduire que l'on peut parler du potentiel d'un conducteur en électrostatique. Où se situent les charges dans un conducteur en électrostatique ?

2) Montrer que le champ et le potentiel électrostatiques entre les deux conducteurs sont $\vec{E} = \frac{V_0}{r \ln(\frac{b}{a})} \vec{u}_r$ et $V = \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})} V_0$.

3) Montrer que la capacité linéique de ce câble est $\chi = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}$. Que vaut numériquement χ si $a = 1,0$ mm et $b = 1,0$ cm ?

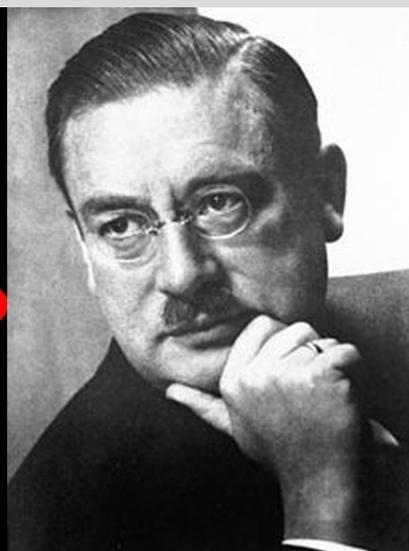
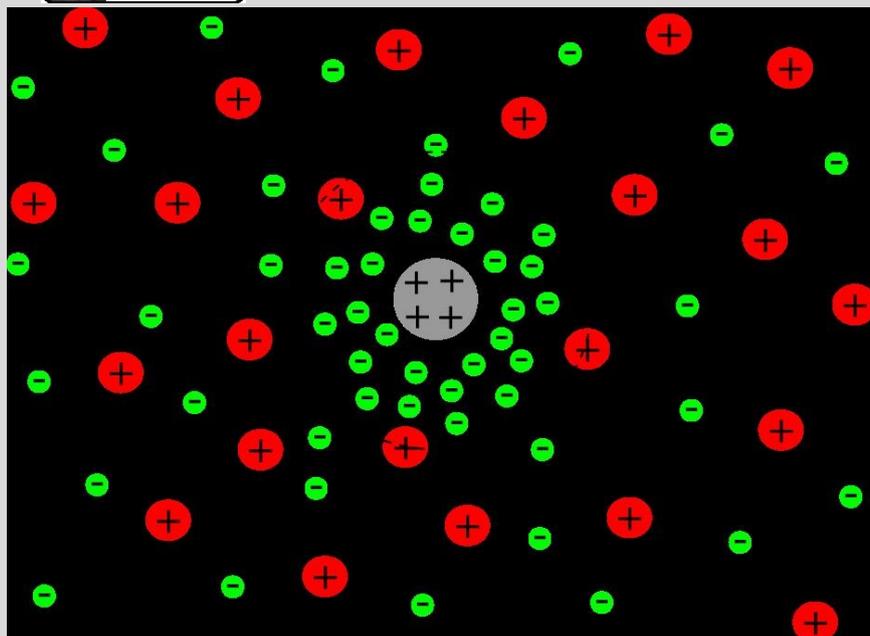
4) Pour quelles conditions géométriques peut-on considérer que l'on a un condensateur quasi-plan ? Par un développement limité adapté aux conditions précédentes, montrer que l'on retrouve bien la capacité du condensateur plan d'épaisseur e et de surface S : $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

5) Pourquoi le champ électrique dans l'isolant ne doit-il pas dépasser un champ maximal E_{max} ? Que vaut numériquement la valeur maximale V_{max} du potentiel V_0 si $E_{max} = 3,0 \times 10^6$ V · m⁻¹, $a = 1,0$ mm et $b = 1,0$ cm ?



exercice
de colle

Exercice 15.31 Potentiel écranté de Debye



Debye

En raison de la présence de porteurs de charge électrique mobiles au sein d'un matériau conducteur (métal, plasma, électrolyte), le champ électrique est atténué : il est différent du champ de Coulomb donné par une charge ponctuelle seule dans le vide.

La longueur de Debye, en référence au chimiste Peter Debye (1884-1966, photo de droite), est l'échelle de longueur sur laquelle des particules chargées (par exemple les électrons) écrantent le champ électrostatique.

1) On considère un plasma à la température T , formé d'électrons (de charge $-e$) et d'ions (de charge $+Ze$). Dans cet exercice, l'indice e se rapporte aux électrons et l'indice i aux ions.

1.a) Justifier que la densité des ions en un point porté au potentiel V est :

$$n_i = n_{0i} e^{-\frac{ZeV}{k_B T}}$$

Quelle est donc la densité des électrons ?

1.b) En écrivant l'électroneutralité pour un plasma de potentiel V uniforme, trouver une relation entre n_{0i} et n_{0e} .

1.c) Quelle est la densité de charge pour un potentiel V quelconque ?

1.d) L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est négligeable devant $k_B T$. Comment se simplifie cette dernière équation ?

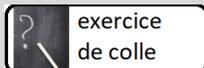
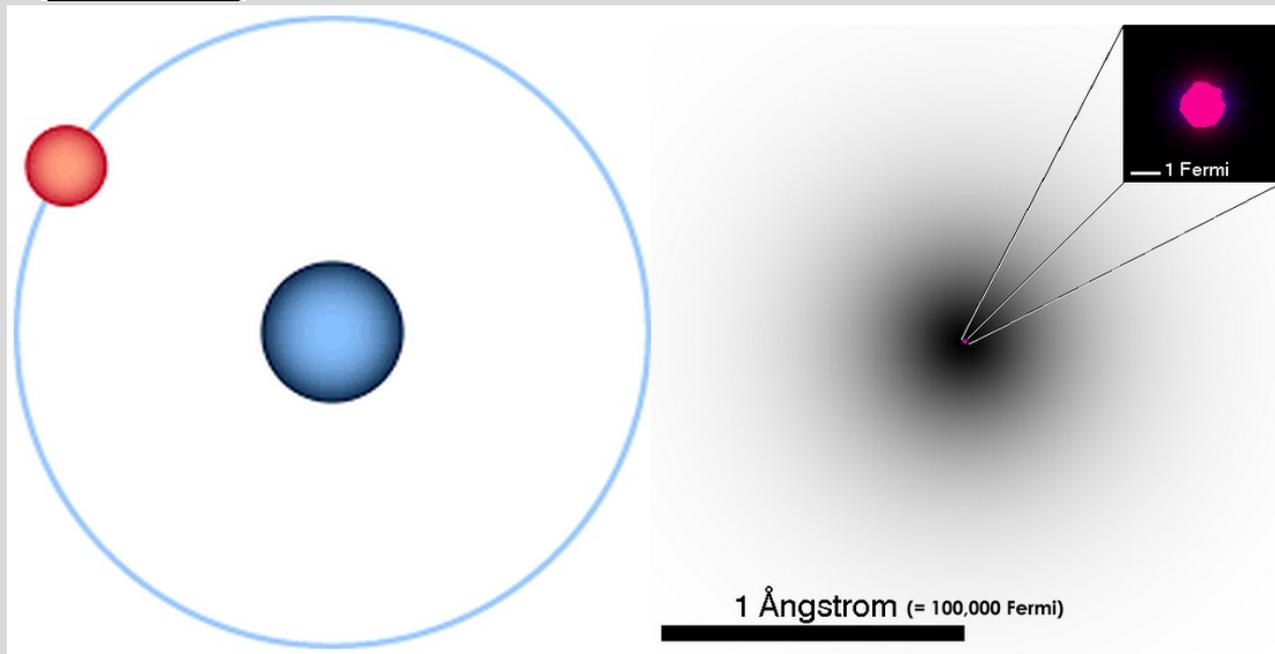
2) Equation de Poisson

2.a) Démontrer l'équation de Poisson.

2.b) On considère que le problème est à symétrie sphérique. Alors $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2}$.

Trouver la solution $V(r)$ de la dernière équation différentielle.

2.c) Comparer le potentiel trouvé à celui de Coulomb.

exercice
de colle
Exercice 15.32
Modélisations de l'atome d'hydrogène


L'atome d'hydrogène est constitué d'un un noyau (de charge $+e$) et par un électron (de charge $-e$).

1) Modélisation grossière (image de gauche) :

On modélise un atome par un noyau (de charge $+e$) et par un électron (de charge $-e$) situés à une distance a_0 l'un de l'autre.

1.a) Calculer le champ de claquage E_c qu'il faut pour ioniser l'atome. Comparer au champ de claquage de l'air.

1.b) Calculer l'énergie d'ionisation de cet atome (en eV). La comparer à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

2) Modélisation diffuse (image de droite) :

On suppose l'atome comme une charge ponctuelle en O (le noyau de charge $+e$) entouré par une charge diffuse $\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha r}$ (l'électron, de charge $-e$) à symétrie sphérique.

2.a) Donner un ordre de grandeur de α .

2.b) Calculer ρ_0 .

2.c) Montrer que le champ électrique en tout point est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r} \cdot \left(a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \right) \vec{u}_r$$

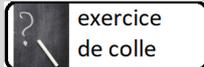
2.d) Vérifier que le potentiel suivant convient :

$$V(r) = V_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha r}$$

2.e) L'équation de Poisson est-elle vérifiée ?

On donne :

- $\Delta U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right)$ en sphérique ;
- $\int_a^b x^2 e^x dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_a^b$;
- le champ de claquage de l'air : $3 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- et la taille caractéristique d'un atome : $a_0 = 10^{-10} \text{ m}$.



exercice
de colle

Exercice 15.33 Le pouvoir des pointes

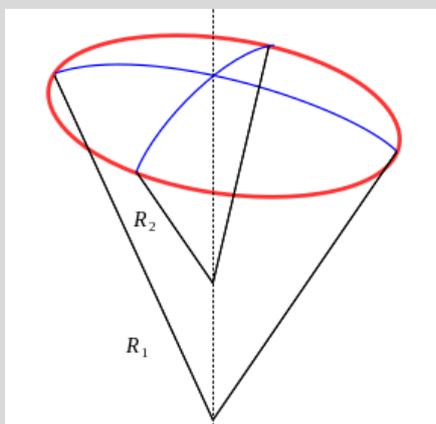
«La Tour de 300 m pourra jouer le rôle d'un immense paratonnerre protégeant un très large espace autour d'elle, à condition que sa masse métallique soit en communication parfaite avec la couche aquifère du sous-sol par le moyen de bons conducteurs. Grâce à ces précautions, l'intérieur de l'édifice, avec les personnes qui s'y trouveront abritées, sera absolument assuré contre tout accident pouvant provenir des coups de foudre fréquents qui frapperont infailliblement les parois de la Tour.»

Extrait du rapport de la commission spéciale pour protéger la Tour Eiffel contre l'action de la foudre composée de MM. Becquerel, Mascart, et Berger.

«Une série d'observations sur l'électricité atmosphérique au sommet de la Tour Eiffel a été organisée par le Bureau central météorologique, avec le concours du Conseil municipal de Paris. [...] Dans les conditions que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire à 1,00 m environ de la surface la Tour, le potentiel est fréquemment supérieur à 10 000 volts.»

(Extraits des communications de A-B. Chauveau à l'Académie des Sciences les 26 décembre 1893 et 25 septembre 1899).

Source : <https://www.merveilles-du-monde.com/Tour-Eiffel/Effets-de-la-foudre-sur-la-tour-Eiffel.php>



1) Analyse qualitative

On suppose qu'un nuage d'orage dont le bas est horizontal porte une charge négative, tandis que la Terre porte une charge positive opposée.

1.a) Tracer l'allure des lignes de champ et des isopotentielles lorsque la terre ne présente aucune aspérité (ni arbre, ni construction)

1.b) Faire de même avec un pic conducteur (arbre, tour Eiffel...)

1.c) Expliquer pourquoi le champ électrostatique est plus intense près de la pointe.

2) Analyse quantitative

On va essayer de modéliser l'effet de pointe.

Soit une surface chargée de rayon de courbure R_1 dans une direction et R_2 , dans la direction perpendiculaire.

On admet que la courbure $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ne dépend pas des directions choisies.

\vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface.

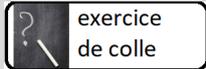
dn est un déplacement infinitésimal suivant \vec{n} .

2.a) En appliquant le théorème de Gauss, montrer que :

$$\frac{dE}{dn} = -CE$$

2.b) Résoudre et interpréter la relation précédente. Discuter en particulier de la charge surfacique. Que se passe-t-il si la courbure est trop importante ?

2.c) Expliquer l'effet de pointe.



exercice
de colle

Exercice 15.34**Rayon d'un objet astronomique (Oral X-ESPCI)**

Soit un objet astronomique à symétrie sphérique constitué d'une matière liquide dont l'équation d'état est :

$$p(r) = \frac{1}{2}K(\rho(r))^2.$$

où K est une constante, $p(r)$ est la pression et $\rho(r)$ est la masse volumique pour le rayon r en coordonnées sphériques de centre, le centre O de l'astre.

- 1) Calculer le rayon R de l'objet à l'équilibre.