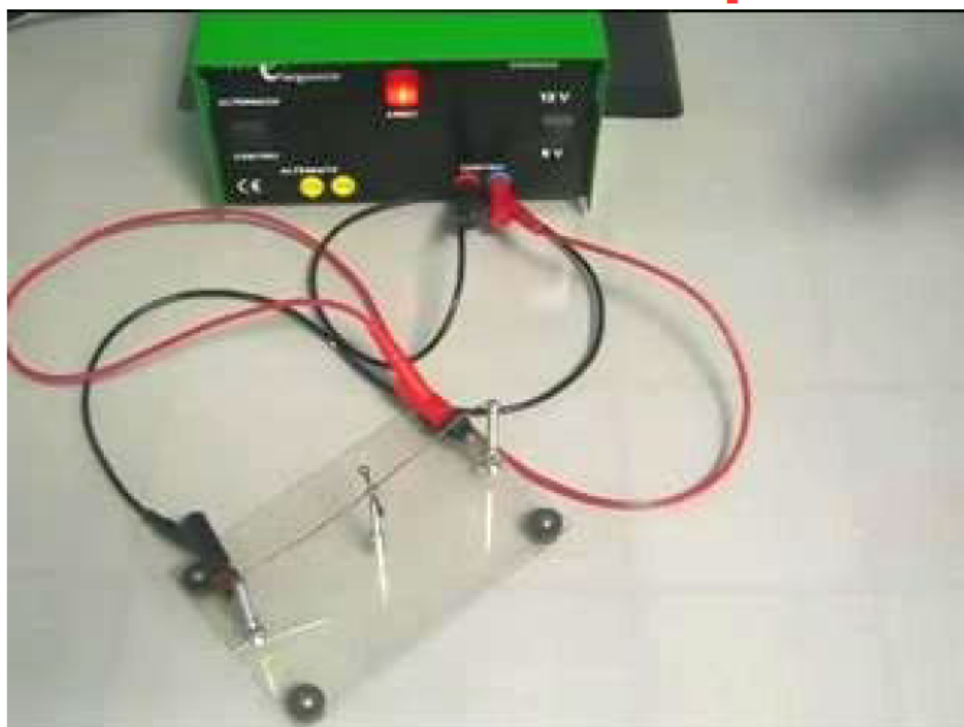


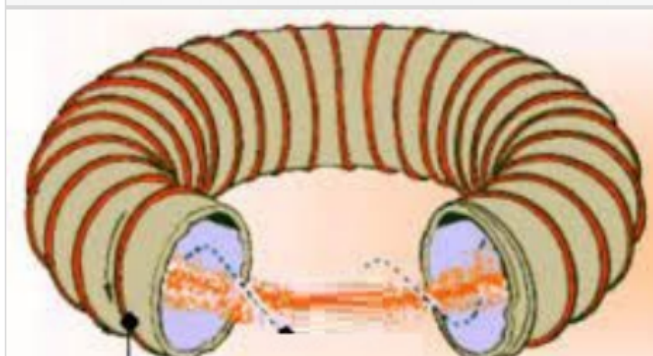
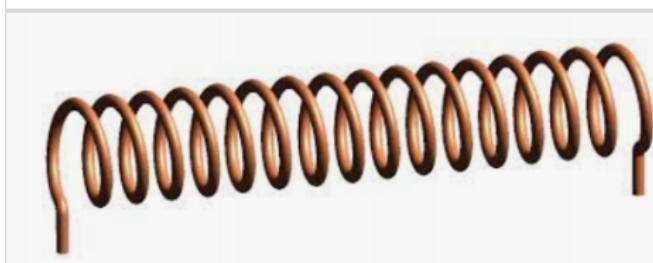
comment fonctionne un électroaimant?



► relier champ magnétique et courant électrique



► déterminer un champ magnétique



Magnétostatique

Les points du cours à connaître

I- Propriétés du champ magnétostatique

1. Courants



Densité volumique de courant *définition*

La charge dq qui traverse la surface S (non fermée) orientée pendant dt donne l'intensité I (ou courant électrique), en ampère (A) :

$$I = \frac{dq}{dt} = \iiint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot \vec{d^2S}$$

où \vec{j} est la densité volumique de courant. Si on dispose d'une assemblée de particules numérotées i , de charge q_i , de vitesse \vec{v}_i et de densité volumique n_i ,

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$



remarque

La densité volumique de courant \vec{j} est volumique car le courant existe dans un volume mais \vec{j} s'exprime en $A \cdot m^{-2}$!



remarque

La densité volumique de courant en un point M dépend du référentiel : $\vec{j}(M)_{/R_1}$ dans le référentiel R_1 est reliée à $\vec{j}(M)_{/R_2}$ dans le référentiel R_2 par :

$$\vec{j}(M)_{/R_1} = \vec{j}(M)_{/R_2} + \rho(M) \cdot \vec{v}(M)_{R_2/R_1}$$

où $\vec{v}(M)_{R_2/R_1}$ est la vitesse d'entraînement locale (en M) de R_2 dans R_1 .



Densité surfacique de courant *s'y retrouver*

Le courant électrique I qui traverse une courbe C (dans une direction donnée par le vecteur unitaire \vec{u}) est

$$I = \int_{M \in C} \vec{j}_S(M) \cdot \vec{u} dl$$

où \vec{j}_S en $A \cdot m^{-1}$ est la densité surfacique de courant.

Invariances *s'y retrouver*

On discerne en particulier les symétries

- plane : $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$ ou $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$;
- cylindrique : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$ ou $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, z)$;
- circulaire : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$;
- sphérique : $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$ ou $\vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r)$.

Plans de symétrie et d'antisymétrie pour les courants *s'y retrouver*

Pour la distribution de courant,

$$(xOy) \text{ est plan de symétrie } \Leftrightarrow \begin{cases} j_x(x, y, -z) = +j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = +j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = -j_z(x, y, z) \end{cases}$$

$$(xOy) \text{ est plan d'antisymétrie } \Leftrightarrow \begin{cases} j_x(x, y, -z) = -j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = -j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = +j_z(x, y, z) \end{cases}$$

Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de courants. *schéma*

La figure 1 représente un exemple de plan de symétrie (à gauche) et d'antisymétrie (à droite).

Plan de symétrie pour les courants Plan d'antisymétrie pour les courants

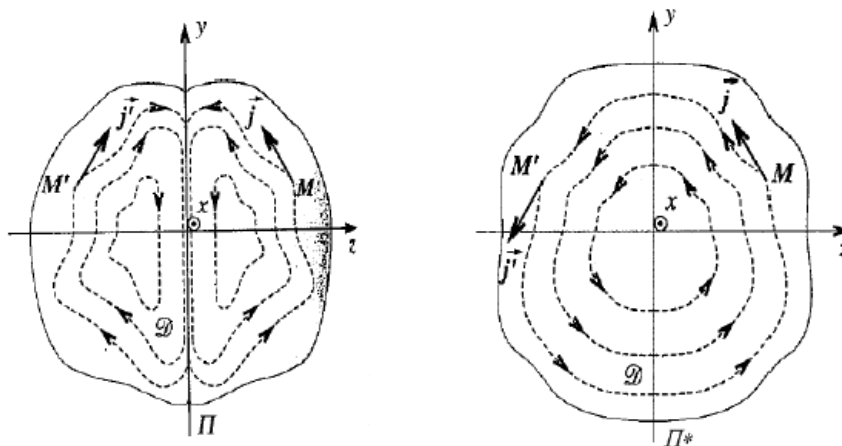


FIGURE 1 – Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de courants.

2. Flux du champ magnétique



Équation de Maxwell flux *définition*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$



1 Zones de fort champ magnétostatique *théorème*

On décompose le flux en trois surfaces, l'une donnant un flux nul car le champ magnétostatique lui est orthogonal, les deux autres se conservant.

Ainsi, le flux du champ magnétostatique se conserve le long d'un tube de champ.

Donc les zones de fort champ magnétostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ magnétostatique sont les plus resserrées. \Rightarrow

Les zones de fort champ magnétostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ magnétostatique sont les plus resserrées.

3. Circulation du champ magnétique



Équation de Maxwell Ampère *définition*

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec la perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.



2 Théorème d'Ampère *théorème*

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{M \in S} \operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 \cdot \left(\iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d^2\vec{S} + \iint_{M \in S} \vec{j}_D(M) \cdot d^2\vec{S} \right)$$

\Rightarrow

soient un contour fermé orienté C , et S , une surface qui s'appuie sur C et qui est orientée par C . Alors :

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$

où $I_{int} = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d^2\vec{S}$ en régime permanent.



Interprétation de l'expression de Maxwell-Ampère *schéma*

La figure 2 représente le champ \vec{B} tourne autour des courants (suivant la règle de la main droite).

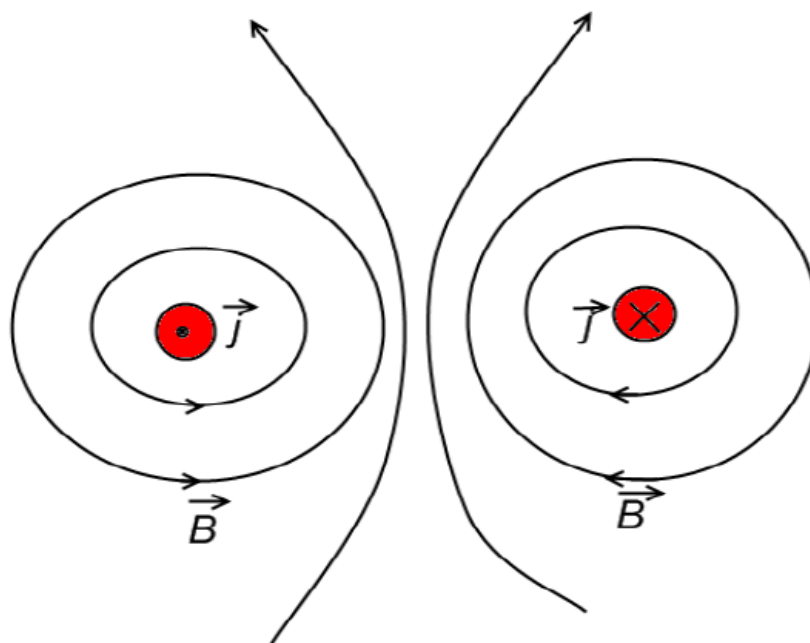


FIGURE 2 – Interprétation de l'expression de Maxwell-Ampère

👁️ **Expérience d'Oersted** *vidéo*

L'expérience d'Oersted met en évidence la création d'un champ magnétique par le passage d'un courant dans un conducteur.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

II- Détermination de champs magnétiques

🌟 **Utilisation des symétries** *s'y retrouver*

le principe de Curie énonce que les symétries des causes se retrouvent parmi les symétries des conséquences.

On déduit du principe de Curie que le champ conséquence a (au moins) les symétries de la distribution cause.

Les pseudo vecteurs (comme \vec{B}) sont orthogonaux aux plans de symétrie Π , et appartiennent aux plans d'antisymétrie Π^* des causes.

👁️ **Visualisation des lignes de champ magnétique** *vidéo*

On peut mettre en évidence les lignes de champ magnétique grâce à de la limaille de fer.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

👁️ **Fil rectiligne infini** *schéma*

La figure 3 représente un fil rectiligne infini et le champ magnétique généré.

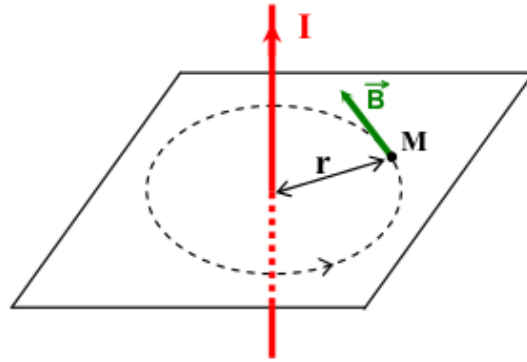


FIGURE 3 – Fil rectiligne infini

👁 Solénoïde circulaire. schéma

| La figure 4 représente un solénoïde circulaire et le champ magnétique généré.

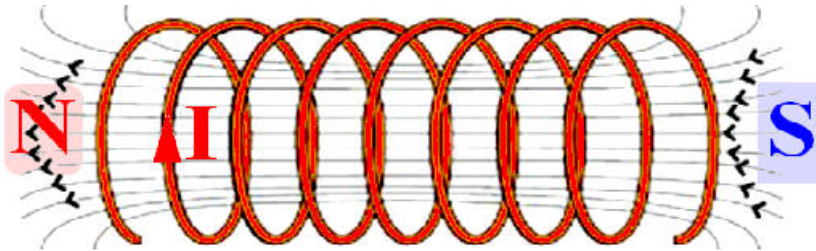
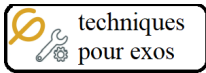


FIGURE 4 – Solénoïde circulaire.



Valeurs numériques (compléments) Magnétostatique

la perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.
inductances caractéristiques : de $1 \mu\text{H}$ à 10 H



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Plan de symétrie d'une distribution de courant

(xOy) est plan de symétrie pour $\vec{j} \Leftrightarrow$

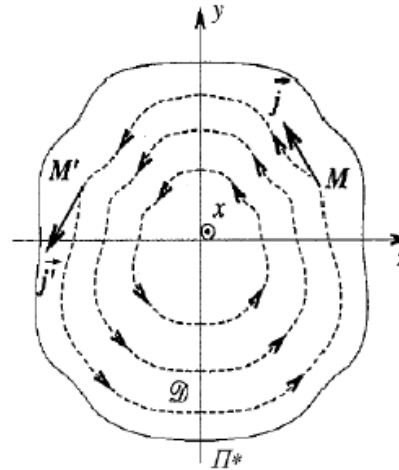
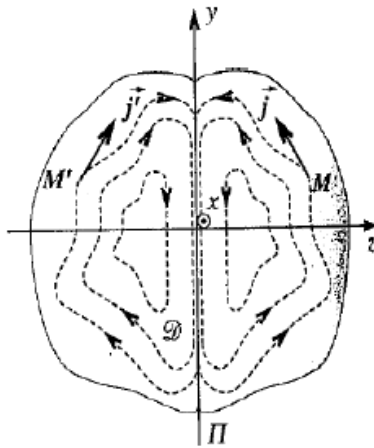
$$\begin{cases} j_x(x, y, -z) = +j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = +j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = -j_z(x, y, z) \end{cases}$$

Plan d'anti-symétrie d'une distribution de courant

(xOy) est plan d'anti-symétrie pour $\vec{j} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} j_x(x, y, -z) = -j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = -j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = +j_z(x, y, z) \end{cases}$$

Plan de symétrie pour les courants Plan d'antisymétrie pour les courants



un exemple de plan de symétrie (à gauche) et d'antisymétrie (à droite).

Invariances d'une distribution de courant

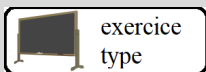
On discerne en particulier les symétries

- plane : $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$;
- cylindrique : $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, z)$;
- sphérique : $\vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r)$.

Effet des symétries des courants sur le champ magnétique

Le champ magnétique

- \vec{B} a les mêmes invariances que \vec{j} ;
- $\vec{B} \perp$ aux plans de symétrie de \vec{j} ;
- $\vec{B} \in$ aux plans d'anti-symétrie de \vec{j} .



Exercice 16.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

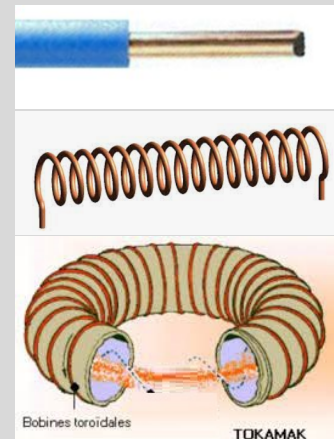
Etude des symétries des courants en magnétostatique

1) Déterminer les invariances et les symétries des courants puis en déduire celles du champ magnétique que ces courants génèrent dans les cas suivants :

1.a) un fil cylindrique cylindrique de rayon R , d'axe Oz , infini, parcouru par une densité volumique de courant \vec{j} uniforme (nulle à l'extérieur) ;

1.b) un solénoïde circulaire, de rayon R , de longueur infinie suivant son axe Oz , chaque spire circulaire étant parcourue par un courant I ;

1.c) un tore à section circulaire (de rayon a), d'axe Oz , de rayon R , sur lequel sont enroulées N spires jointives parcourues par un courant I .



1)

1.a) La densité volumique de courant est $\vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$. Plans de symétrie de $\vec{j} : (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$; plan d'antisymétrie de $\vec{j}_s : (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Donc $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$.

1.b) La densité surfacique de courant est $\vec{j}_s(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$. Plans de symétrie de $\vec{j}_s : (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$; plan d'antisymétrie de $\vec{j}_s : (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Donc $\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$.

1.c) La densité surfacique de courant est $\vec{j}_s(r, z) \Rightarrow \vec{B}(r, z)$. Plans de symétrie de $\vec{j}_s : (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$; plan d'antisymétrie de $\vec{j}_s : (O, x, y)$. Donc $\vec{B} = B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta$.

application
directe**Exercice 16.2** pour s'entraîner**Symétries d'une spire circulaire**

Soit une spire circulaire de centre O , d'axe (Oz) , parcourue par un courant d'intensité I .

1) Déterminer les symétries de cette répartition de courants :

1.a) invariances ;**1.b)** plans de symétrie ;**1.c)** plans d'antisymétrie.1) On se place dans un repère cylindrique d'axe (Oz) :

1.a) la distribution de courants est invariante par rotation de $\theta : \vec{j}(r, z)$ uniquement (symétrie cylindrique) ;

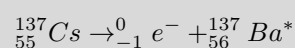
1.b) le plan (xOy) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.**1.c)** tous les plans contenant (Oz) sont plans d'antisymétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$.application
directe**Exercice 16.3** pour s'entraîner**Symétries d'un ensemble de deux fils parallèles**

Soit deux fils infinis, sans épaisseur, parallèles à l'axe (Oz) , passant respectivement par les points $O_1 = (0, -a, 0)$ (dans un repère cartésien de centre O) et $O_2 = (0, +a, 0)$ dans lesquels circulent respectivement des courants I_1 et I_2 , orientés conventionnellement vers les z croissants.

Définir les symétries et invariances de cette distribution dans les trois cas suivants :

1) I_1 et I_2 quelconques ;2) $I_1 = I_2 = I$;3) $I_1 = +I$ et $I_2 = -I$.1) I_1 et I_2 quelconques :**1.a)** la distribution de courants est invariante par translation de $z : \vec{j}(x, y)$ uniquement ;**1.b)** le plan contenant O_1, O_2 et (Oz) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$;**1.c)** tous les plans orthogonaux à (Oz) sont plans d'antisymétrie : plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y) \forall M$.2) $I_1 = I_2 = I$;**2.a)** la distribution de courants est invariante par translation de $z : \vec{j}(x, y)$ uniquement ;**2.b)** le plan contenant O_1, O_2 et (Oz) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, ainsi que le plan médiateur entre les deux fils : plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$;**2.c)** tous les plans orthogonaux à (Oz) sont plans d'antisymétrie : plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y) \forall M$.3) $I_1 = +I$ et $I_2 = -I$.**3.a)** la distribution de courants est invariante par translation de $z : \vec{j}(x, y)$ uniquement ;**3.b)** le plan contenant O_1, O_2 et (Oz) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$;**3.c)** tous les plans orthogonaux à (Oz) sont plans d'antisymétrie : plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y) \forall M$, ainsi que le plan médiateur entre les deux fils : plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$.application
directe**Exercice 16.4** pour s'entraîner**Noyau radioactif β^-**

On considère une source (très petite, en O , centre d'un repère sphérique), de césium 137 radioactif β^- :



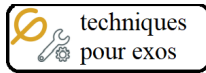
Son activité (nombre de désintégration par seconde) est $A = 0,185 MBq$.

1) Quelle est l'intensité I qui traverse une sphère de centre O ? Application numérique.

2) Exprimer dans le repère sphérique la densité volumique de courant \vec{j} . Que vaut numériquement $|\vec{j}|$ à $r = 10cm$ de la source ?

1) $I = A \cdot q_e = -3,0 \cdot 10^{-14} A$.

2) $I = \oiint \vec{j} \cdot \vec{d}^2\Sigma \Rightarrow \vec{j} = \frac{q_e \cdot A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \vec{e}_r$. $r = 10cm \Rightarrow |\vec{j}| = 2,4 \cdot 10^{-13} A \cdot m^{-2}$.



techniques
pour exos

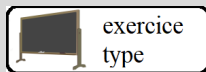
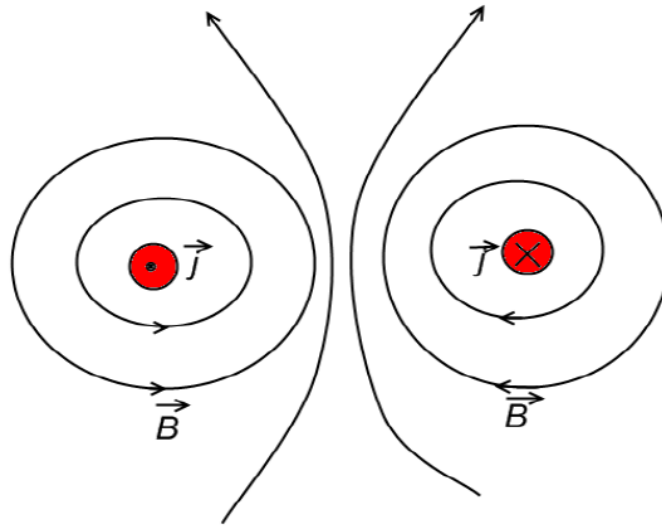
Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Etudier un champ magnétostatique donné

Les lignes de champ magnétostatique :

- sont dans les plans d'anti-symétrie de la distribution de courant,
- sont orthogonales aux plans de symétrie de la distribution de courant,
- sont fermées,
- sont orientées par les courants selon la règle de la main droite.

$\|B\|$ augmente dans les zones où les lignes de champ se resserrent.

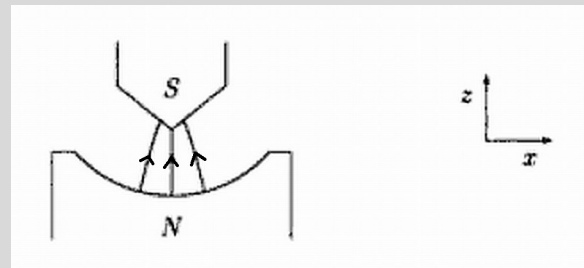


exercice
type

Exercice 16.5 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Etude des champs magnétostatiques

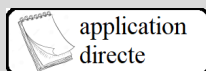
- 1) Que doivent vérifier les dérivées $\partial B_z / \partial z$ et $\partial B_x / \partial x$ pour que le champ magnétique dans l'entrefer suive bien les équations de Maxwell ?
- 2) Pourquoi les lignes de champ présentées sur la figure 4.2 sont-elles cohérentes avec les assertions suivantes :
 - 2.a) \vec{B} est essentiellement dirigé suivant l'axe z ;
 - 2.b) \vec{B} a une composante B_x moins forte (et nulle au centre) ;
 - 2.c) \vec{B} une composante B_y nulle ;
 - 2.d) la dérivée suivant z de B_z est positive.



- 1) Maxwell flux donne :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

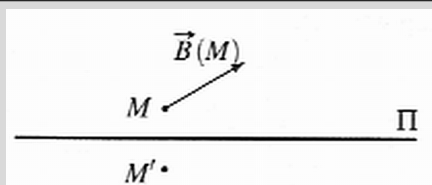
- 2) Les lignes de champ présentées sur la figure 4.2 sont cohérentes avec le texte, en particulier :
 - 2.a) "le champ est essentiellement dirigé suivant l'axe z " car elles sont principalement verticales ;
 - 2.b) il a "une composante B_x moins forte (et nulle au centre)" car il existe une ligne de champ verticale au centre ;
 - 2.c) et "une composante B_y nulle" car les lignes de champ sont dans le plan $y = \text{cte}$;
 - 2.d) enfin, "la dérivée suivant z de B_z est positive" car les lignes de champ sont plus resserrées en haut, donc B_z est une fonction croissante de z .



application
directe

Exercice 16.6 pour s'entraîner

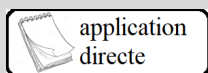
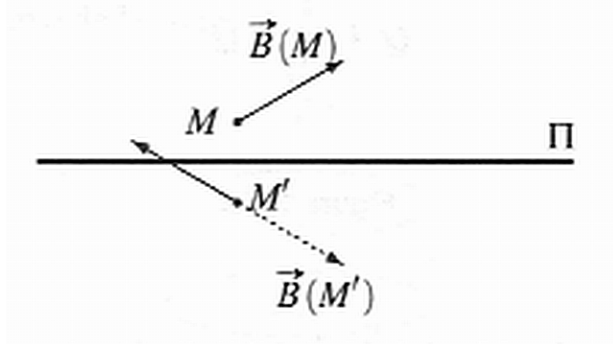
Plan de symétrie pour un champ magnétique



Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de courant. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π .

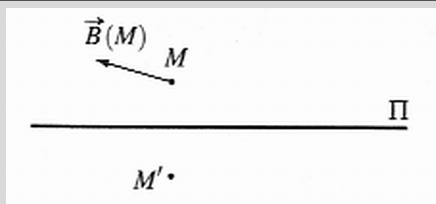
- 1) Compléter le schéma en dessinant le champ magnétique au point M' .

Les plans de symétrie pour \vec{j} sont des plans d'antisymétrie pour \vec{B} .



Exercice 16.7 pour s'entraîner

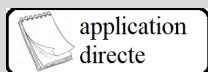
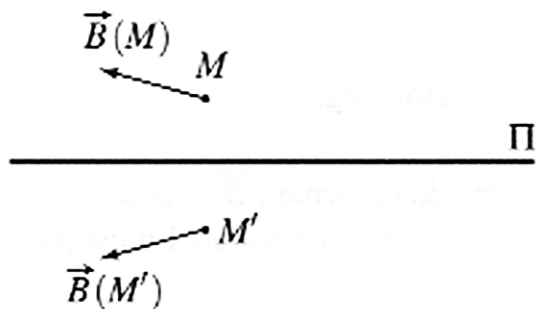
Plan d'anti-symétrie pour un champ magnétique



Le plan Π est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π .

1) Compléter le schéma en dessinant le champ magnétique au point M' .

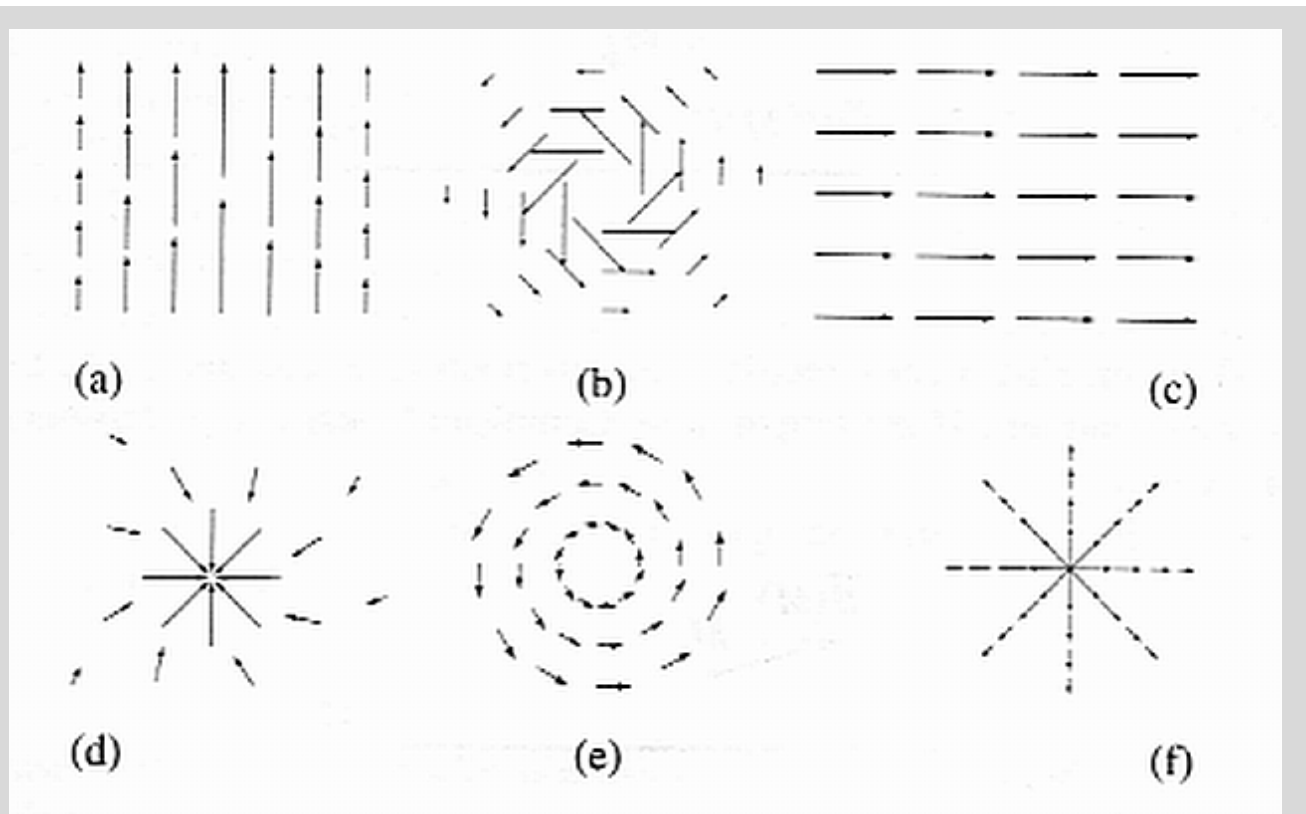
Les plans d'antisymétrie pour \vec{j} sont des plans de symétrie pour \vec{B} .



Exercice 16.8 pour s'entraîner

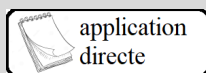
Champ magnétique ou pas ?

On considère les lignes de champ magnétique des différentes configurations à ci-dessous. On supposera la figure invariante par translation perpendiculaire au plan du dessin.



- 1) Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique.
- 2) Et si oui, préciser si des courants sont présents dans la région représentée.

- Le cas (a) correspond à un champ de la forme : $\vec{B} = B_y(x) \vec{u}_y$. Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel n'est pas nul, il y a donc des courants dans la région représentée.
- Le cas (b) correspond à un champ de la forme : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ où $B_\theta(r)$ décroît quand r augmente. Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. La circulation du champ le long d'un cercle n'est pas nulle, il y a donc des courants dans la région représentée. C'est par exemple le champ créé par un fil infini.
- Le cas (c) correspond à un champ uniforme. Un champ uniforme est bien de divergence nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel est nul aussi, il n'y a donc pas de courant dans la région représentée.
- Dans le cas (d) le flux à travers un cylindre dont le centre est celui des lignes de champ, d'axe perpendiculaire à la figure n'est pas nul. Donc la divergence du champ n'est pas nulle, il peut donc pas être de nature magnétostatique.
- Le cas (e) correspond à un champ de la forme : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ où $B_\theta(r)$ croît quand r augmente. Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel n'est pas nul, il y a donc des courants dans la région représentée, répartis dans tout le volume.
- Dans le cas (f) le flux à travers un cylindre dont le centre est celui des lignes de champ, d'axe perpendiculaire à la figure n'est pas nul. Donc la divergence du champ n'est pas nulle, il peut donc pas être de nature magnétostatique.



Exercice 16.9 pour s'entraîner Un champ magnétique radial

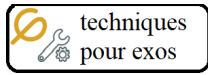
- 1) Un champ radial ($C_r \vec{e}_r$) peut-il être un champ magnétique \vec{B} :
 - 1.a) en cylindrique ?
 - 1.b) en sphérique ?

1) $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$, or

1.a) en cylindrique, $\operatorname{div}(C_r \vec{e}_r) \neq 0$

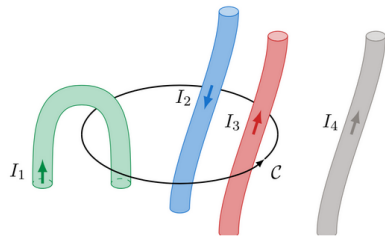
1.b) en sphérique, $\operatorname{div}(C_r \vec{e}_r) \neq 0$.

Un champ magnétique ne peut donc être radial.



Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Calculer un champ magnétostatique créé par une distribution de courants

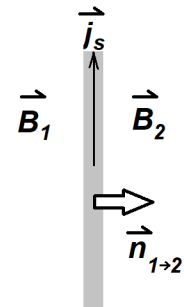


Il faut utiliser les symétries (s'il y en a assez) puis le théorème d'Ampère en choisissant un contour fermé \mathcal{C} qui vérifie les symétries et utiliser le théorème de superposition :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Il peut y avoir une discontinuité de \vec{B} dans l'espace en présence d'une zone parcourue par un courant surfacique (\vec{j}_s) :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (-I_1 - I_2 + I_3)$$

Calculer l'inductance propre d'une bobine

On détermine préalablement l'expression de \vec{B} à l'intérieur de la bobine \mathcal{C} parcourue par un courant I . Pour en déduire l'induction propre L :

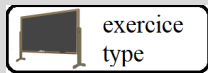
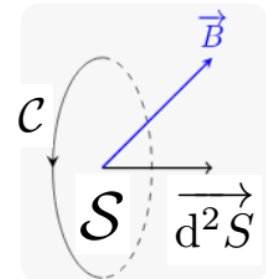
- soit on utilise le flux

$$\Phi = LI \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où \mathcal{S} s'appuie sur le contour fermé \mathcal{C} et orientée par lui

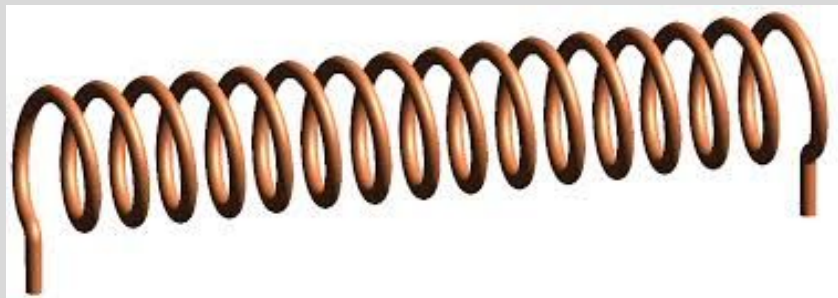
- soit on utilise l'énergie stockée dans la bobine

$$E_b = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{avec} \quad E_b = \iiint \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3\tau$$



Exercice 16.10 (le prof fait cet exercice type jeudi)
Détermination d'un champ magnétostatique

1) On considère dans un premier temps un solénoïde cylindrique, d'axe Oz , de longueur l (mais supposé quasi-infini), de rayon a , comportant N tours de fil. On suppose que circule un courant $i(t)$ variable dans la bobine.



1.a) Quel est le champ magnétique créé par le courant i à travers la bobine? En déduire la self L de la bobine en utilisant :

- 1.b) le flux Φ du champ magnétique.
- 1.c) l'énergie magnétique E_m .

2) On considère maintenant un tore d'axe (Oz), de rayon R , composé de N spires de section circulaire, de rayon $a \ll R$, comme si on avait "fermé" sur lui même le solénoïde précédent.

- 2.a) Calculer le champ magnétique \vec{B} dans le tore si y circule un courant I .
- 2.b) En déduire l'inductance propre L de ce tore grâce au calcul du flux Φ ;
- 2.c) Faire de même grâce au calcul de l'énergie magnétique E_m .



1) Solénoïde

1.a) A l'extérieur, le champ est nul, et à l'intérieur, $\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} i(t) \cdot \vec{u}_z$.

1.b) Utilisation du flux : $\Phi(t) = N \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} i(t)$.

$$\Phi(t) = L \cdot i(t) \Rightarrow L = \pi \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l}$$

1.c) Utilisation de l'énergie : $E_m = \frac{1}{2} \pi \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} i(t)^2$.

$$E_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \Rightarrow L = \pi \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l}$$

2) Tore

2.a) $\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R} \vec{u}_\theta$ dans le tore.

2.b) grâce au calcul du flux $\Phi = N \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R} = L \cdot I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot a^2}{2 \cdot R}$;

2.c) grâce au calcul de l'énergie magnétique $E_m = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2} \pi \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot a^2}{2 \cdot R}$.



application
directe

Exercice 16.11 pour s'entraîner**Champ magnétique au voisinage d'un conducteur parfait**

On considère un conducteur parfait (milieu 1) dans le demi-espace $z < 0$, dans lequel le champ magnétique est nul. A l'interface qui délimite le conducteur du vide (dans l'autre demi-espace $z > 0$), circule un courant surfacique $\vec{j}_s = j_0 \cdot \vec{u}_y$.

1) Que vaut le champ magnétique au voisinage du conducteur, en $z = 0^+$?

1) Les conditions de discontinuité à l'interface s'écrivent : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \cdot \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$, soit $\vec{B}(z = 0^+) - \vec{0} = \mu_0 \cdot j_0 \cdot \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z$, donc :

$$\vec{B}(z = 0^+) = \mu_0 \cdot j_0 \cdot \vec{u}_x$$



application
directe

Exercice 16.12 pour s'entraîner**Champ magnétique créé dans un cylindre creux conducteur**

On se place dans un repère cylindrique d'axe (Oz) .

On considère d'abord un cylindre conducteur de rayon R_0 , d'axe Oz et supposé infini, parcouru par un courant volumique uniforme : $\vec{j} = J \cdot \vec{e}_z$.

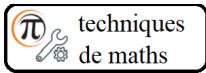
1) Déterminer le champ magnétique \vec{B}_0 à l'intérieur de ce cylindre.

On considère maintenant un cylindre conducteur de rayon R_1 , d'axe Oz et supposé infini, dans lequel on a creusé une cavité cylindrique d'axe parallèle à (Oz) , de rayon $R_2 < R_1$. Le cylindre creux est parcouru par un courant volumique uniforme : $\vec{j} = J \cdot \vec{e}_z$.

2) Calculer le champ magnétique \vec{B} dans la cavité.

1) $\vec{B}_0(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta$.

2) En appliquant le théorème de superposition : $\vec{B}(r, \theta, z) = +\frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta - \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta = \vec{0}$: le champ magnétique est nul dans la cavité.



Techniques mathématiques à maîtriser
Intégrer un rotationnel

Position du problème :

Il s'agit de déterminer le champ \vec{A} connaissant son rotationnel $\vec{rot}\vec{A}$. Autrement dit, il faut intégrer des équations différentielles portant sur les trois composantes A_1, A_2, A_3 de \vec{A} , elles-même fonction *a priori* de trois variables s_1, s_2, s_3 .

Symétries :

Pour simplifier le problème, il faut avant tout utiliser les symétries :

- invariances : si $\vec{rot}\vec{A}$ ne dépend pas d'une des trois variables s_1, s_2, s_3 , alors \vec{A} n'en dépendra pas non plus.
- les plans d'antisymétrie pour $\vec{rot}\vec{A}$ sont des plans de symétrie pour \vec{A} . Le champ \vec{A} appartient aux plans d'antisymétrie de $\vec{rot}\vec{A}$.
- les plans de symétrie pour $\vec{rot}\vec{A}$ sont des plans d'antisymétrie pour \vec{A} . Aussi, le champ \vec{A} est orthogonal aux plans de symétrie de $\vec{rot}\vec{A}$.

■ **Exemple :**

Si $\vec{rot}\vec{A}/\vec{u}_z$ en cylindrique et fonction de r uniquement, alors :

- \vec{A} ne dépend que de r ;
- les plans de symétrie pour $\vec{rot}\vec{A}$ sont les plans orthogonaux à Oz : ce sont les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Donc $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta$;
- les plans d'antisymétrie pour $\vec{rot}\vec{A}$ sont les plans contenant Oz : ce sont les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Donc $\vec{A} = A_\theta \vec{u}_\theta$.

Conclusion : $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$.

Utilisation de la formule de Stokes :

On peut utiliser la formule de Stokes : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S}$.

Pour ce faire, il faut définir un contour fermé \mathcal{C} orienté qui vérifie les symétries. La surface S est délimitée par \mathcal{C} (autant choisir la plus simple!).

■ **Exemple :**

Si $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$, alors :

- \mathcal{C} est un cercle de rayon r , d'axe Oz ;
- S peut être (c'est le plus simple) le disque de rayon r , d'axe Oz .

Utilisation de l'expression du rotationnel dans le repère adapté :

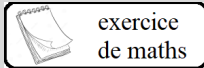
dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix}$$

■ **Exemple :**

Si $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$ en cylindrique, alors : $\vec{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \end{pmatrix}$.

exercice
de maths**Exercice 16.13** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de rotationnel donné (1)**1) Déterminer le champ \vec{B} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{a}{r} \vec{u}_z$$

où a est une constante.1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon r vaut :

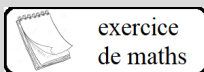
$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint \frac{a}{r} \vec{u}_z \cdot \vec{d^2S} = \iint \frac{a}{r} r \, dr \, d\theta = a r 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = a r 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = a$$

Donc $\vec{B} = a \vec{u}_\theta$.exercice
de maths**Exercice 16.14** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de rotationnel donné (2)**1) Déterminer le champ \vec{B} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = a \vec{u}_z$$

où a est une constante.1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon r vaut :

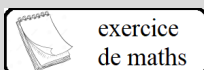
$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint a \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r \, dr \, d\theta = \frac{a r^2}{2} 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^2}{2} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r}{2}$$

Donc $\vec{B} = \frac{a r}{2} \vec{u}_\theta$.exercice
de maths**Exercice 16.15** pour s'entraîner**Calcul d'un champ de rotationnel donné (3)**

- 1) Déterminer le champ \vec{B} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = a r \vec{u}_z$$

où a est une constante.

- 1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon r vaut :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint a r \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r^2 \, dr \, d\theta = \frac{a r^3}{3} 2\pi$$

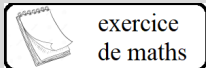
et la circulation sur le cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^3}{3} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r^2}{3}$$

Donc $\vec{B} = \frac{a r^2}{3} \vec{u}_\theta$.



exercice
de maths

Exercice 16.16 pour s'entraîner

Calcul d'un champ de rotationnel donné (4)

- 1) Déterminer le champ \vec{B} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = a r^2 \vec{u}_z$$

où a est une constante.

- 1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon r vaut :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint a r^2 \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r^3 \, dr \, d\theta = \frac{a r^4}{4} 2\pi$$

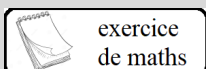
et la circulation sur le cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^4}{4} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r^3}{4}$$

Donc $\vec{B} = \frac{a r^3}{4} \vec{u}_\theta$.



exercice
de maths

Exercice 16.17 pour s'entraîner

Calcul d'un champ de rotationnel donné (5)

1) Déterminer le champ \vec{B} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{a}{r^2} \vec{u}_z$$

où a est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe Oz , de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon r vaut :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{d^2S} = \iint \frac{a}{r^2} \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \, \vec{u}_z = \iint \frac{a}{r} \, dr \, d\theta = a \ln r \, 2\pi$$

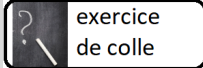
et la circulation sur le cercle de rayon r :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_\theta(r) \, 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) \, 2\pi r = a \ln r \, 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a \ln r}{r}$$

Donc $\vec{B} = \frac{a \ln r}{r} \vec{u}_\theta$.



Exercice 16.18
Courant évanescent



Sylvie Dupont - "Evanescent 18/010", 2018

Supposons que dans un demi-espace $z > 0$, la densité volumique de courants soit donnée par $\vec{j} = j_0 \cdot e^{-\frac{z}{h}} \cdot \vec{e}_x$, où h est une constante.

1) Intensité élémentaire :

1.a) Quelle est l'intensité élémentaire $dI(z_1, z_2)$ qui traverse la surface élémentaire orientée dans le sens des x croissants, pour $y \in [0; dy]$ et $z \in [z_1; z_2]$?

1.b) Calculer $dI(0, z)$

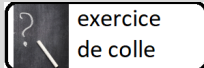
1.c) En déduire $dI(0, \infty)$.

1.d) Pour quelle valeur z_0 de z a-t-on $dI(0, z_0) = 0,90 \cdot dI(0, \infty)$? Commenter ce résultat.

2) Densité surfacique de courant :

2.a) Dans quelle limite est on confronté à une densité surfacique de courant \vec{j}_s ?

2.b) Exprimer alors \vec{j}_s .



exercice
de colle

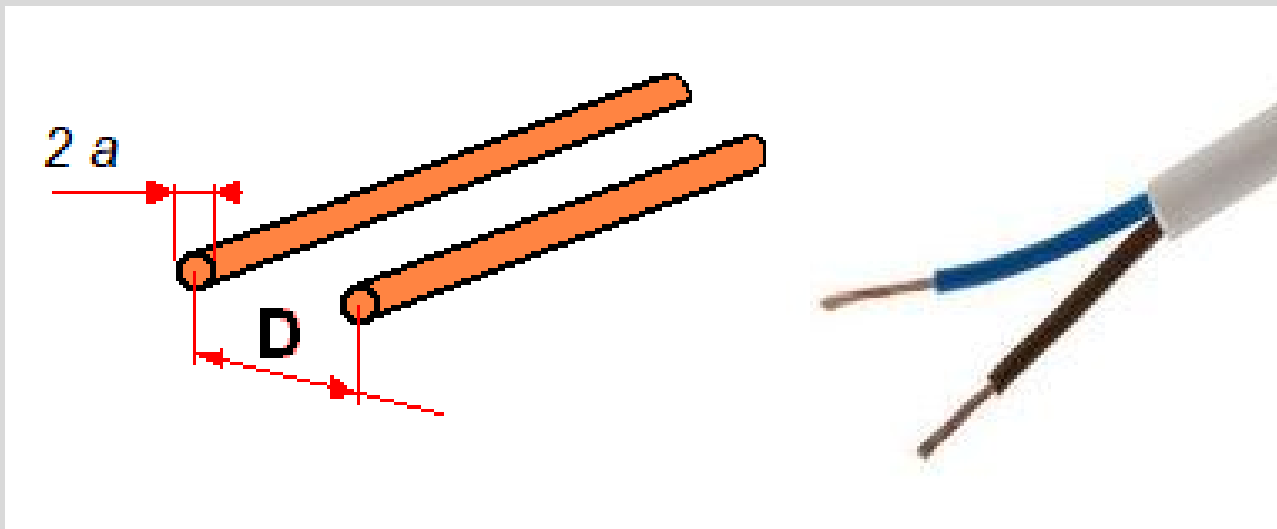
Exercice 16.19 Inductance propre d'une ligne bifilaire

On se place dans un repère cartésien $(Oxyz)$.

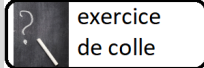
Un fil électrique habituel est constitué de deux fils f et f' dans lesquels circulent des courants opposés : c'est une "ligne bifilaire".

Supposons que f et f' sont deux cylindres de rayon a , d'axes parallèles à (Oz) , situés dans le plan (xOz) et distants de $D > a$:

- dans f , d'abscisse $x = \frac{D}{2}$ circule $+I$ dans la direction de \vec{u}_z ;
- dans f' , d'abscisse $x = -\frac{D}{2}$ circule $-I$ dans la direction de \vec{u}_z .



- 1) Quel est le champ magnétique $\vec{B}(x \in [-\frac{D}{2} + a; \frac{D}{2} - a], y = 0, z)$ en un point du plan (xOz) compris entre les deux fils ?
- 2) Calculer le flux Φ de ce champ à travers la surface rectangulaire du plan (xOz) définie par deux tronçons de fils de longueur l_0 .
- 3) En déduire l'inductance propre linéique L_l de la ligne bifilaire.



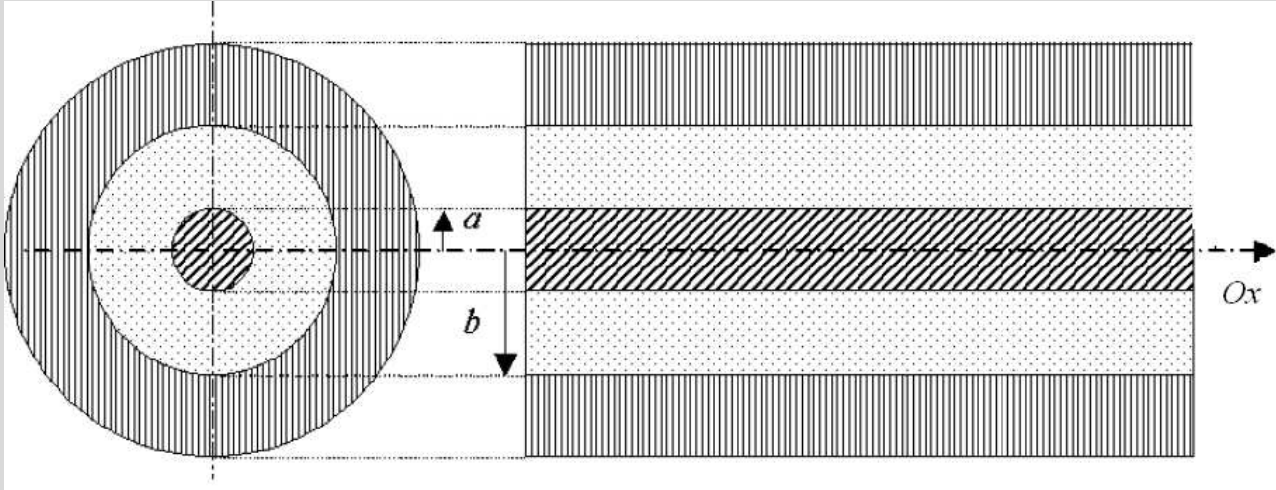
exercice
de colle

Exercice 16.20 Etude d'un câble coaxial en magnétostatique

On donne, dans un repère cylindrique, de coordonnées (r, θ, z) , dont la base orthonormée de vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{\text{grad}}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \cdot A_\theta)}{\partial z} \right], \right. \\ \left. \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r}, \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \cdot A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \right)$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \cdot A_z)}{\partial z} \right)$$



Un câble coaxial (cf. figure) est constitué de trois cylindres infinis de même axe (Oz) :

l'“âme”, de rayon a , conducteur électrique parcouru par un courant I vers les z croissants, dans lequel existe une densité de courant homogène $\vec{j}(r < a) = +j_a \cdot \vec{u}_z$.

la “gaine”, isolant de rayon extérieur b (on admettra que la présence de l'isolant a la perméabilité μ_0 , du vide : $\mu_r = 1$).

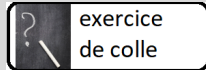
La “masse”, de rayon extérieur c , conducteur électrique parcouru par un courant I vers les z décroissants, dans lequel existe une densité de courant homogène $\vec{j}(r \in]b; c]) = -j_m \cdot \vec{u}_z$.

On se place dans le régime magnétostatique.

1) Définir le régime magnétostatique. Rappeler, dans le cadre de la magnétostatique, les équations de Maxwell, ainsi que l'expression du champ magnétique \vec{B} en fonction des potentiels électromagnétiques (V, \vec{A}) .

2) Déterminer j_a et j_m en fonction de I , a , b et c . Quelles sont les invariances, les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de courant \vec{j} ? En déduire que $\vec{B} = B_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta$.

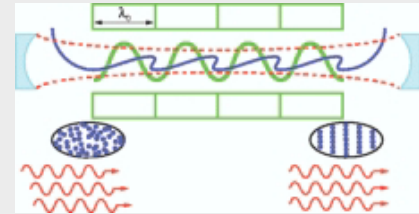
3) Y a-t-il continuité du champ magnétique dans l'espace? Donner le champ magnétique partout dans l'espace en fonction de I , a , b et c . Tracer l'allure de $B_\theta(r)$.



exercice
de colle

Exercice 16.21 Réalisation d'un onduleur

Le milieu amplificateur d'un laser à électrons libres (LEL) est constitué d'un faisceau d'électrons de haute énergie, soumis à une force périodique transverse à sa direction de propagation. Cette perturbation périodique est réalisée par ce que l'on appelle un « onduleur », constitué d'un champ magnétique transverse alterné. La fréquence des ondes à laquelle il peut y avoir amplification ne dépend que de l'énergie des électrons et de la période de l'onduleur.



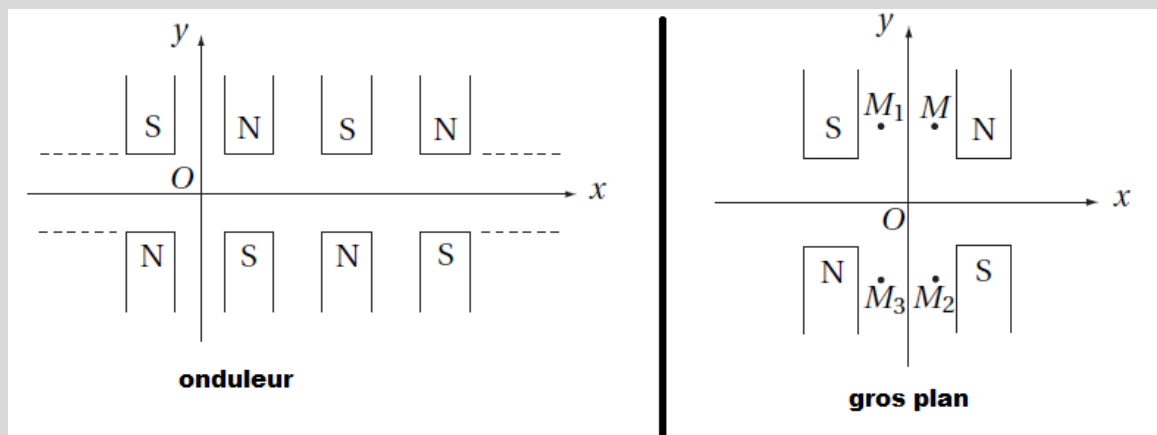
On peut comprendre son mécanisme comme résultant de la somme des ondes émises par l'ensemble des électrons : à chaque oscillation dans l'onduleur, un électron émet du rayonnement dit « synchrotron » et, à la fin de son passage dans l'onduleur, il a émis un train d'onde. Si tous les électrons sont en phase, tous les trains d'onde émis le sont également et le rayonnement devient cohérent : on obtient une émission laser.

« Développements récents des Lasers à Electrons Libres » - Jean-Michel Ortega

pdfs.semanticscholar.org/fd92/84100edecefaabe34e4194ebb86b0f038e39.pdf

On veut réaliser un champ magnétique, dans une région de l'espace vide de charges et de courants, de la forme :

$$\vec{B} = B_0 \sin(k_0 x) \vec{u}_y$$



- 1) Montrer que l'expression proposée pour le champ magnétique ne convient pas.

Pour tenter de réaliser de manière approchée un tel champ, on dispose périodiquement un système d'aimants permanents, la périodicité spatiale étant $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$. Les plans Oxy et Oxz sont plans de symétrie géométrique du système. On suppose en outre les aimants très allongés dans la direction Oz de telle sorte que le champ peut être considéré comme indépendant de z .

On prendra : $B_0 = 0,4 \text{ T}$ et $\lambda_0 = 8 \text{ cm}$. La longueur totale est de $1,6 \text{ m}$, soit $N = 20$ périodes spatiales. Pour étudier les symétries de la source de champ magnétique, on pourra utiliser l'équivalence entre un aimant et une petite spire.

- 2) On isole par la pensée deux paires d'aimants (cf. figure de droite). Dessiner sans calculs l'allure des lignes de champ. Que se passe-t-il au point O ?

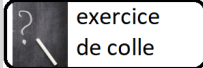
- 3) En considérant le vecteur \vec{B} au point $M(x, y, 0)$, dessiner le vecteur \vec{B} correspondant aux points $M_1(-x, y, 0)$, $M_2(x, -y, 0)$ et $M_3(-x, -y, 0)$.

- 4) On cherche le champ magnétique sous la forme : $\vec{B} = f(x, y) \vec{u}_x + B_0 g(y) \sin(k_0 x) \vec{u}_y$ avec $f(x, 0) = 0$ et $g(0) = 1$.

Prévoir la périodicité et la parité des fonctions $f(x, y)$ et $g(y)$.

- 5) Déterminer entièrement les fonctions $f(x, y)$ et $g(y)$.

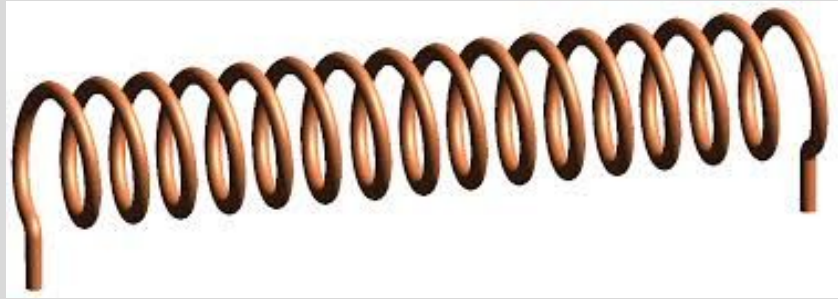
- 6) Le champ n'est destiné à agir que dans le domaine $y < 0,2 \text{ mm}$. Montrer que dans ces conditions l'expression du début est une bonne approximation.



exercice
de colle

Exercice 16.22 Inductance propre d'un solénoïde et d'un tore

1) On considère dans un premier temps un solénoïde cylindrique, d'axe Oz , de longueur l (mais supposé quasi-infini), de rayon a , comportant N tours de fil. On suppose que circule un courant $i(t)$ variable dans la bobine.



1.a) Quel est le champ magnétique créé par le courant i à travers la bobine ?

1.b) Utilisation du flux : quel est le flux Φ du champ magnétique à travers la bobine ? En déduire la self L de la bobine.

1.c) Utilisation de l'énergie : quel est l'énergie magnétique E_m dans la bobine ? En déduire la self L de la bobine.

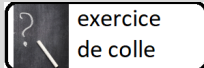
2) On considère maintenant un tore d'axe (Oz), de rayon R , composé de N spires de section circulaire, de rayon $a \ll R$, comme si on avait "fermé" sur lui même le solénoïde précédent.



2.a) Calculer le champ magnétique \vec{B} dans le tore si y circule un courant I .

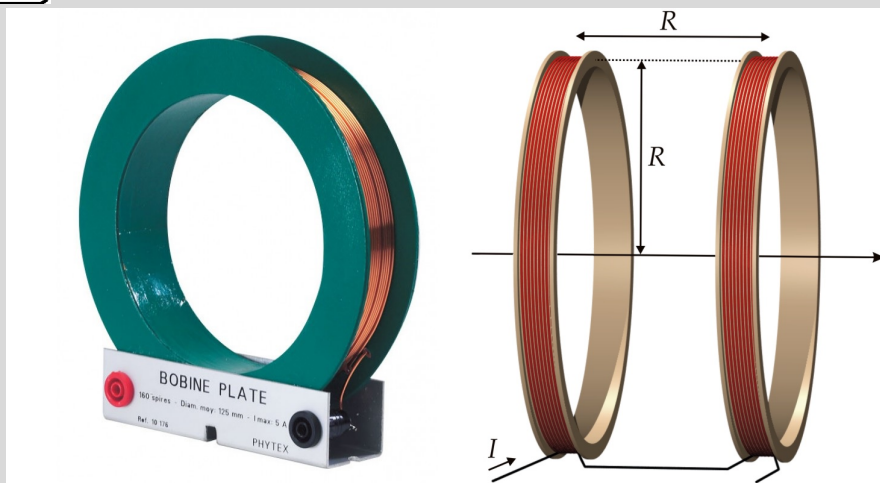
2.b) En déduire l'inductance propre L de ce tore grâce au calcul du flux Φ ;

2.c) Faire de même grâce au calcul de l'énergie magnétique E_m .



exercice
de colle

Exercice 16.23 Champ magnétique axial de différentes bobines



1) Spire circulaire :

On s'intéresse à une spire circulaire de rayon R , d'axe (Oz) , dans le plan (xOy) , parcourue par un courant d'intensité I (le courant est orienté dans le sens trigonométrique).

On donne la formule de Biot et Savart : le champ magnétique en M créé par une spire C parcourue par un courant I est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint_{P \in C} \vec{dl}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

1.a) En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_0(M)$, créé par une spire circulaire de centre O de rayon R , d'axe Oz , en un point M de l'axe Oz de la spire.

1.b) Application : que vaut le champ magnétique $\vec{B}_0(O)$ en O ?

2) Bobine plate :

On considère maintenant une bobine plate réalisées avec un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité I (le courant est orienté dans le sens trigonométrique), constituée de N spires circulaires de même centre O , d'axe (Oz) , dans le plan (xOy) , de rayon variant entre R_1 et $R_2 > R_1$.

2.a) Exprimer le champ magnétique $d\vec{B}_1(O)$ créé en O par la spire de rayon $r \in [R_1; R_2]$, à dr près.

2.b) En intégrant, calculer le champ magnétique $\vec{B}_1(O)$ produit au centre de la bobine.

3) Bobine plate assimilée à une spire circulaire :

On pose $a = R_2 - R_1 \ll R = \frac{R_1 + R_2}{2}$.

3.a) Calculer le champ magnétique $\vec{B}_1(O)$ produit au centre de la bobine, en fonction de R et a , grâce à un développement limité au troisième ordre en $\frac{a}{R}$.

On donne

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

3.b) Exprimer l'écart relatif $\frac{\Delta B}{B}$ entre les champs magnétiques créés par N spires de rayon R sans épaisseur et une bobine plate de rayon R de largeur a , en fonction de a et de R .

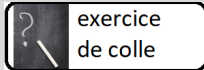
4) Bobines de Helmholtz

On considère les bobines de Helmholtz : deux spires circulaires de même rayon R , parcourues dans le même sens par le même courant I , éloignées de R .

4.a) Donner l'expression de $B(z)$ (où z est pris à partir du centre entre les deux bobines) sur l'axe. Exprimer en particulier B_0 , le champ en O .

4.b) Grâce à un développement limité de $\frac{B_z(z)}{B_0}$ en $\frac{z}{R}$ (au quatrième ordre!), montrer que le champ y est très stable.

On donne : $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$



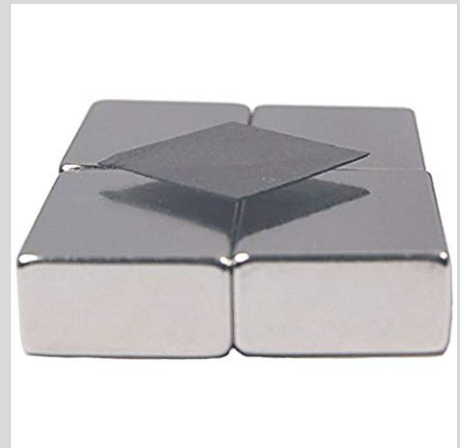
exercice
de colle

Exercice 16.24 Plaque supraconductrice

L'effet Meissner fait référence au phénomène d'exclusion totale de tout champ magnétique de l'intérieur d'un supraconducteur. Il a été découvert par Walther Meissner et Robert Ochsenfeld en 1933. L'effet Meissner est l'une des propriétés définissant la supraconductivité.

L'exclusion du champ magnétique est due à des courants électriques qui circulent à la surface du supraconducteur et qui génèrent un champ magnétique qui annule exactement le champ appliqué. Ces courants d'écrantage apparaissent quand un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique.

(D'après l'article wikipédia "effet Meissner")



1) On étudie, en régime permanent et en l'absence de tout champ électrique, un matériau supraconducteur comportant $n = 7,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ électrons de conduction par unité de volume, de masse $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et de charge électrique $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Un tel milieu vérifie la relation de London :

$$\rho = 0 \text{ et } \text{rot} \vec{j} = -\frac{ne^2}{m} \vec{B}$$

1.a) Quelle est l'équation différentielle d'ordre deux vérifiée par \vec{B} dans le matériau ? On fera apparaître une distance caractéristique δ dont on donnera la valeur numérique.

2) Le supraconducteur forme une plaque d'épaisseur $2d = 1 \text{ mm}$, de normale (Oz) , de grandes dimensions transverses ; le champ magnétique dans le vide à l'extérieur de la plaque est $\vec{B}(z = \pm d) = B_0 \vec{e}_x$.

2.a) Déterminer le champ magnétique $\vec{B} = B_x(z) \vec{e}_x$. en tout point de la plaque.

2.b) Déterminer les courants volumiques dans la plaque.

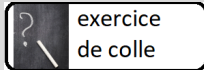
2.c) Quelle est la force exercée par unité de surface sur la partie $z > 0$?

3) On suppose $\delta \ll d$.

3.a) Déterminer alors le champ magnétique en tout point de la plaque.

3.b) Déterminer alors les courants dans la plaque.

3.c) Quelle est la force exercée par unité de surface au voisinage de $z = \pm d$?



exercice
de colle

Exercice 16.25 Magnétorésistance



La magnétorésistance est utilisée dans les têtes de lecture des disques d'ordinateurs. © dervishe, Flickr CC by nc 2.0.

La magnétorésistance est la propriété qu'ont certains matériaux de présenter une résistance qui évolue lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique. Cet effet a été découvert par William Thomson en 1857. Il fut cependant incapable de faire varier la résistance électrique de plus de 5 %. De récentes recherches sur les matériaux ont permis de découvrir la magnétorésistance géante, la magnétorésistance colossale et la magnétorésistance à effet tunnel.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Magnétorésistance>

On se place dans un repère cylindrique de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ d'axe (Oz) .

On considère deux armatures cylindriques, de hauteur h d'axe (Oz) . L'armature intérieure, de rayon R_1 , est portée à un potentiel $U > 0$. L'armature extérieure, de rayon R_2 , est maintenue à un potentiel nul. Entre les deux armatures se trouve un milieu conducteur de conductivité γ . On installe aussi un champ magnétique \vec{B}_0 uniforme à l'échelle du dispositif et orienté selon l'axe (Oz) des deux armatures : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

1) On considère dans un premier temps que $B_0 = 0$.

1.a) Déterminer l'expression du vecteur densité de courant \vec{j} en tout point entre les deux armatures en fonction de l'intensité I du courant total qui circule entre les deux armatures.

1.b) En déduire l'expression champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point entre les deux armatures.

1.c) Donner l'expression de la résistance électrique du dispositif.

2) On considère maintenant que $B_0 \neq 0$. On admet que le champ électrique \vec{E} reste orienté dans la direction radiale.

2.a) Établir l'expression du champ électrostatique \vec{E} en fonction de U , ε_0 , r et \vec{e}_r .

2.b) En écrivant l'expression du mouvement d'un électron dans le milieu, établir la relation qui lie, en régime permanent, les vecteurs \vec{j} , \vec{E} et \vec{B} .

2.c) En déduire l'expression du vecteur \vec{j} .

2.d) Calculer la résistance électrique du dispositif. Commenter.

exercice de colle

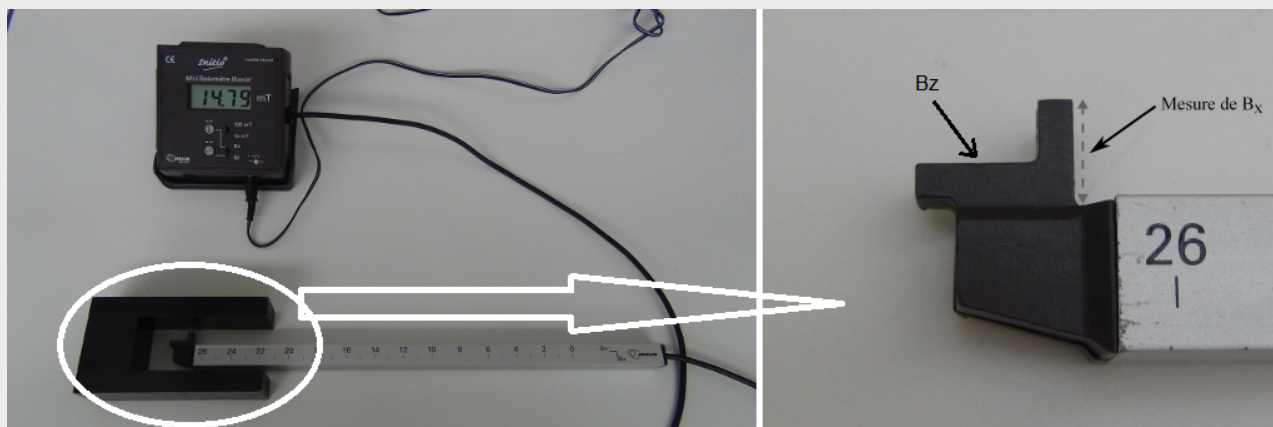
Exercice 16.26
Effet Hall dans une plaquette semiconductrice d'arséniure d'indium

Un capteur à effet Hall permet de mesurer une variation de champ magnétique. En général on les appelle effet Hall lorsqu'une électronique interne au capteur le rend plus performant en amplifiant ou traitant le signal avant transmission, limitant ainsi les risques de perturbations d'environnement. Ce sont donc des capteurs actifs, nom donné à la catégorie de ceux avec traitement du signal (autant analogique que numérique). Ces actifs ont toujours trois broches minimum. Ce n'est pas un signe distinctif, mais si une tresse de masse protège la liaison et qu'elle est reliée à une broche, ce n'est pas un actif (ils sont très souvent sans tresse de masse).

Ils peuvent donc servir par exemple à fabriquer un teslamètre.

Dans la mesure où un courant électrique génère un champ magnétique, on se sert aussi d'un capteur à effet Hall particulier pour mesurer l'intensité d'un courant électrique, capteur appelé capteur de courant à effet Hall1.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Capteur_à_effet_Hall



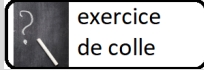
Une sonde de Hall, à arséniure d'indium ($InAs$), d'épaisseur $b = 1,0$ mm suivant (Oz) et a suivant (Oy) est parcourue par un courant $I = 15$ mA suivant (Ox). On suppose que la conduction est assurée par des électrons libres de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, de densité n_e .

1) Exprimer la vitesse v des porteurs de charge en fonction de I , a , b , n_e et e .

Plongée dans un champ magnétique $B = 66$ mT suivant (Oz), la plaquette présente une tension de Hall $U_H = 1,0$ mV suivant (Oy).

2) Exprimer la vitesse v des porteurs de charge en fonction de U_H , a , et B .

3) En déduire le nombre de porteurs de charge n_e par unité de volume dans le matériau. Application numérique.



exercice
de colle

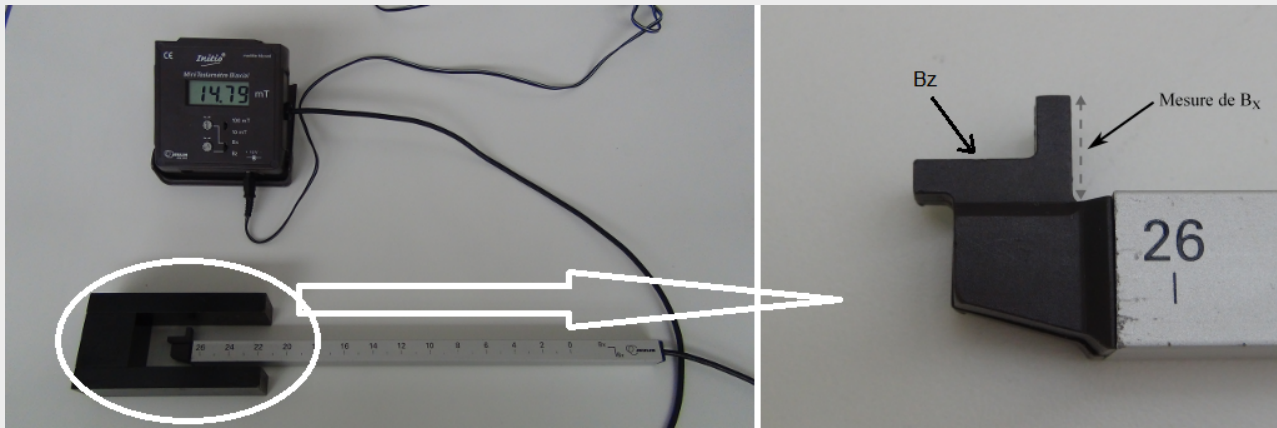
Exercice 16.27 Effet Hall dans une plaquette conductrice de cuivre

Un capteur à effet Hall permet de mesurer une variation de champ magnétique. En général on les appelle effet Hall lorsqu'une électronique interne au capteur le rend plus performant en amplifiant ou traitant le signal avant transmission, limitant ainsi les risques de perturbations d'environnement. Ce sont donc des capteurs actifs, nom donné à la catégorie de ceux avec traitement du signal (autant analogique que numérique). Ces actifs ont toujours trois broches minimum. Ce n'est pas un signe distinctif, mais si une tresse de masse protège la liaison et qu'elle est reliée à une broche, ce n'est pas un actif (ils sont très souvent sans tresse de masse).

Ils peuvent donc servir par exemple à fabriquer un teslamètre.

Dans la mesure où un courant électrique génère un champ magnétique, on se sert aussi d'un capteur à effet Hall particulier pour mesurer l'intensité d'un courant électrique, capteur appelé capteur de courant à effet Hall1.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Capteur_à_effet_Hall



Une plaquette de cuivre d'épaisseur $b = 0,5\text{mm}$ suivant (Oz) et $a = 1,5\text{cm}$ suivant (Oy) est parcouru, selon (Ox) , par un courant $I = 60\text{A}$.

On suppose que la conduction est assurée par des électrons libres de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}\text{C}$, de densité n_e et on donne la conductivité : $\gamma = 58 \times 10^6\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ et la constante de Hall du cuivre : $A_H = \frac{1}{n_e \cdot e} = -5,3 \times 10^{-11}\text{m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$.

1) Exprimer le champ électrique E_x assurant la conduction.

La plaquette de cuivre est maintenant soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $B = 2,5\text{T}$.

2) Calculer le champ de Hall E_y .

3) Quel est l'angle θ (qu'on exprimera en degré, minute et secondes) que fait le champ électrique total \vec{E}_{tot} avec la direction (Ox) ?