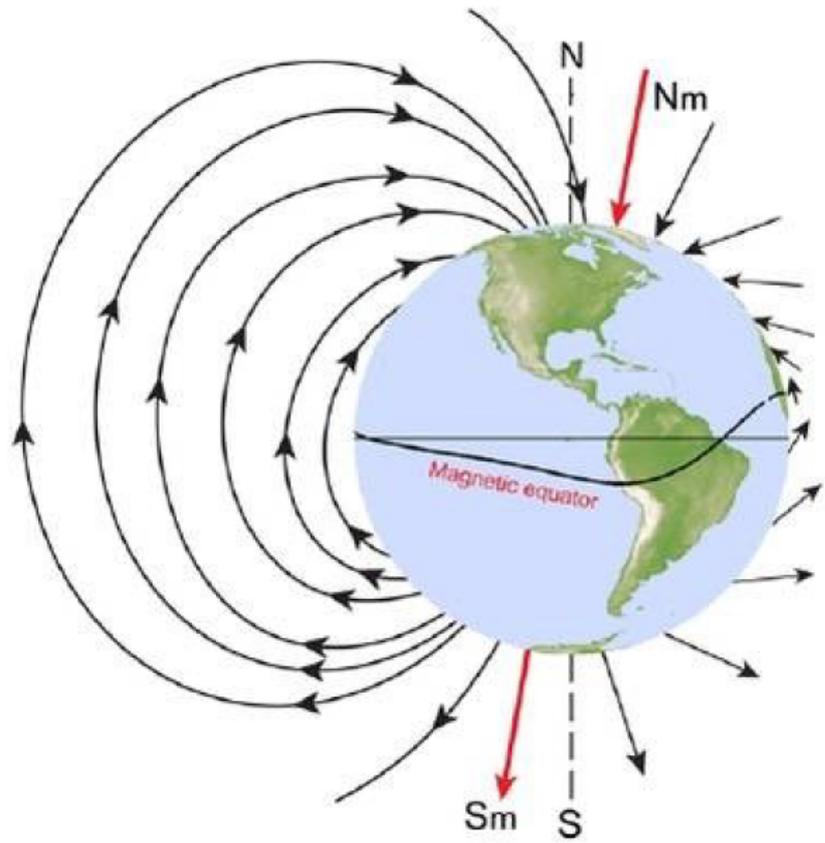
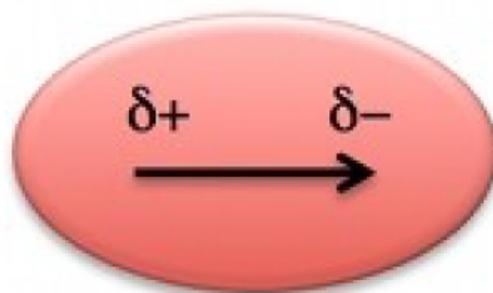
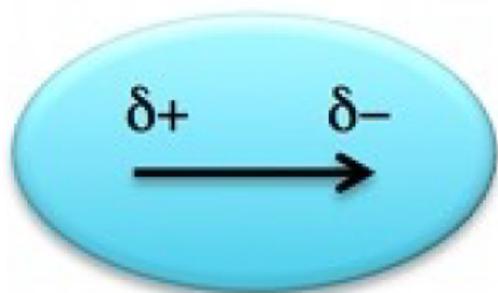


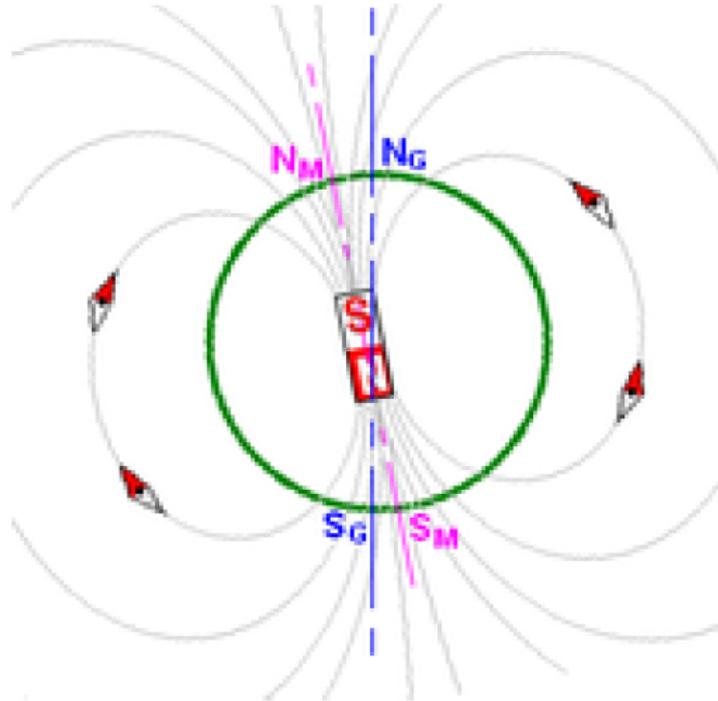
**Comment  
utiliser le  
magnétisme  
terrestre  
pour se  
repérer?**



## ► étudier les dipôles électrostatiques



## ► étudier les dipôles magnétiques





# Dipôles électromagnétiques

Les points du cours à connaître

## I- Dipôle électrostatique

### 1. Définitions



#### Dipôle électrostatique : définition

Un dipôle est une distribution de charges  $D$ ,

- de charge totale nulle,
- dont le barycentre des charges positives ( $+q$  en  $P$ )
- est distinct du barycentre des charges négatives ( $-q$  en  $N$ ).

Le moment dipolaire électrostatique (en  $C \cdot m$ ) est

$$\vec{p} = +q \overline{NP} = \iiint_{M \in D} \rho(M) \overline{OM} d^3\tau$$

où  $O$  est un point quelconque.



remarque

en chimie, l'unité est le debye ( $1 \text{ D} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ ).



Un exemple de dipôle : la molécule d'eau schéma

La figure 1 représente une molécule d'eau (à gauche) et le moment dipolaire associé. A droite, la solvatation d'un cation  $Na^+$  par les molécules d'eau.

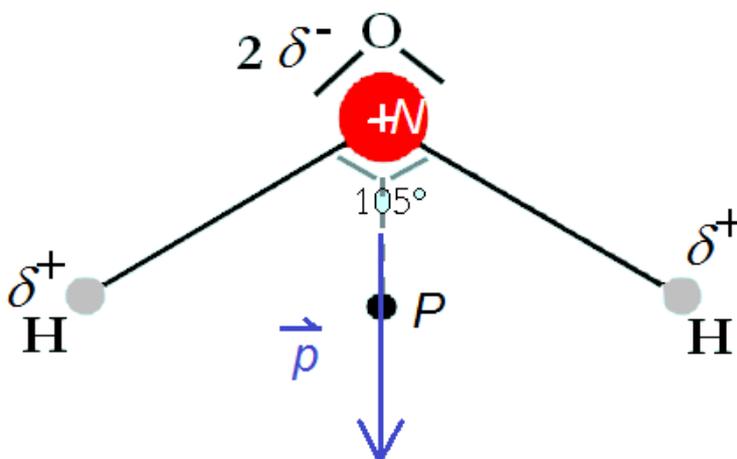


FIGURE 1 – Un exemple de dipôle : la molécule d'eau

### ✳️ **Polarisabilité** *s'y retrouver*

en absence de champ électrique extérieur,  $\vec{p} = \vec{p}_0$ , on parle de dipôle "statique" (qui peut être nul).

Un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  induit un moment dipolaire électrique  $\vec{p}_{induit} = \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$  où  $\alpha$  est la polarisabilité.

Dans le cas général,

$$\vec{p} \approx \vec{p}_0 + \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$$

## 2. Dipôle électrostatique actif

### **Approximation dipolaire : définition**

on considère un dipôle électrostatique de moment  $\vec{p} = +q \overrightarrow{NP}$ , présent autour de  $O$ , origine d'un repère sphérique (d'axe  $(Oz)$ , suivant  $\vec{p}$ ).

L'approximation dipolaire revient à observer le champ créé par ce dipôle, en un point  $M$ , loin du dipôle, c'est à dire :

$$OM = r \gg NP$$

### **1 Potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire** *théorème*

On peut utiliser la superposition des potentiels :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 P_i M} = \frac{+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 PM} - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 NM} = \frac{+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

$$PM = \left( \overrightarrow{PM}^2 \right)^{1/2} = \left( \left( \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \right)^2 \right)^{1/2} = \left( OP^2 + OM^2 + 2 \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{1}{OM} \left( 1 + 2 \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} + \left( \frac{OP}{OM} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

Un développement limité en  $\frac{OP}{OM}$  donne :

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{OM} \left( 1 - \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} \right)$$

De même

$$\frac{1}{NM} \approx \frac{1}{OM} \left( 1 - \frac{\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} \right)$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 OM} \left( -\frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} + \frac{\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM} \right) = \frac{+q \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{OM}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 OM^3}$$

$\Rightarrow$

Un dipôle électrostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{p}$  orienté suivant l'axe polaire,

créé en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire)  
un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

 **Surfaces équipotentiels créés par un doublet électrostatique.** *schéma*

| La figure 2 représente les surfaces équipotentiels créés par un doublet électrostatique.

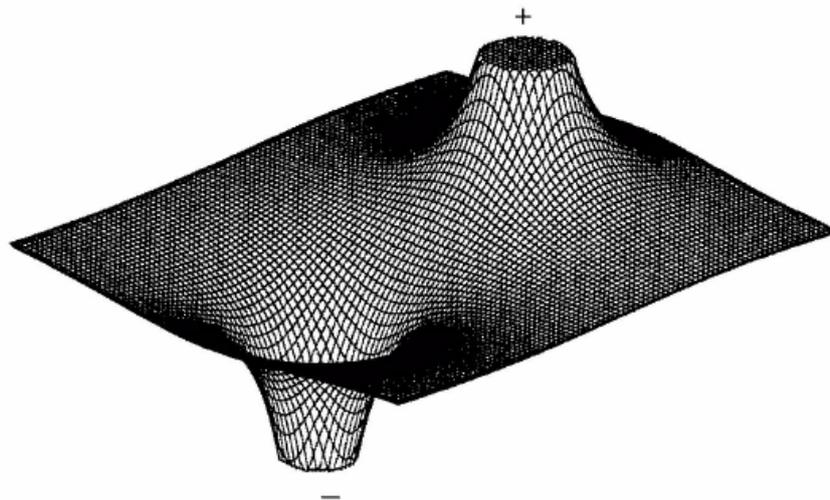


FIGURE 2 – Surfaces équipotentiels créés par un doublet électrostatique.



**Champ électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire à retenir**

Un dipôle électrostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{p}$  orienté suivant l'axe polaire, crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ électrostatique de composantes

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

 **Lignes de champ et isotopentiels créés dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique.** *schéma*

| La figure 3 représente quelques lignes de champ électrostatique (en continu) et traces (en pointillé) des surfaces isotopentiels créés dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique vues dans un plan  $\varphi = cste$ .

### 3. Dipôle électrostatique passif

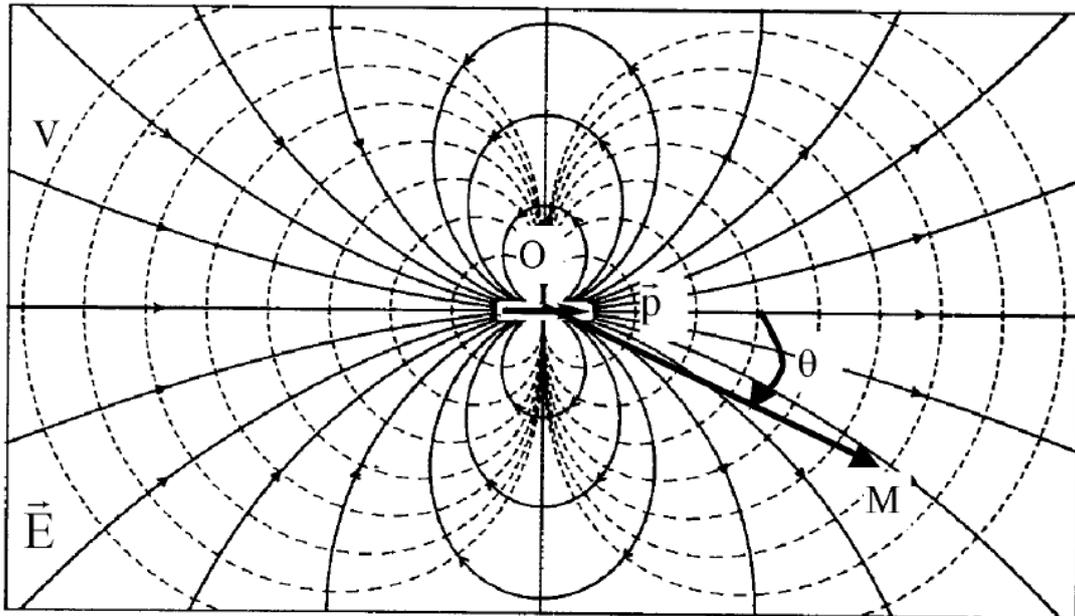


FIGURE 3 – Lignes de champ et isopotentiels créés dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique.

## 2 Energie potentielle électrostatique d'un dipôle électrostatique : *théorème*

L'énergie potentielle de chaque charge est  $e_p = q \cdot V_{ext}$ . Donc pour toute la distribution

$$E_p = \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot V_{ext}(\Omega) \cdot d^3\tau$$

Or, au premier ordre,  $V_{ext}(\Omega) \approx V_{ext}(O) + \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{O\Omega}$  donc

$$E_p = V_{ext}(O) \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot d^3\tau - \vec{E}_{ext} \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot \overrightarrow{O\Omega} \cdot d^3\tau$$

$\Rightarrow$

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  avec un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  est

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

## 3 Moment des forces électrostatiques ressenties par un dipôle électrostatique : *théorème*

Le moment en  $O$  de la force exercée sur chaque charge est  $\vec{M}_O = \overrightarrow{O\Omega} \wedge q \cdot \vec{E}_{ext}$ . Donc pour toute la distribution

$$\vec{M}_O = \iiint_{\Omega \in D} \overrightarrow{O\Omega} \wedge \rho(\Omega) \cdot \vec{E}_{ext} \cdot d^3\tau$$

Or, en considérant  $\vec{E}_{ext}$  constant

$$\vec{M}_O = \left[ \iiint_{\Omega \in D} \overrightarrow{O\Omega} \cdot \rho(\Omega) \cdot d^3\tau \right] \wedge \vec{E}_{ext}$$

$\Rightarrow$

Le moment de l'action exercée par un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  sur un dipôle de

moment dipolaire  $\vec{p}$  est

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

✳ **Effet d'un champ électrostatique sur un dipôle électrostatique** : *s'y retrouver*

la résultante de l'action exercée par un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  sur un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  est

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext})$$

La résultante tend à déplacer le dipôle électrostatique vers les régions de champ électrostatique intense.

Dans le cas d'un champ électrique homogène, le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

👁 **Solvation des ions dans un solvant polaire** *schéma*

La figure 4 représente un ion qui crée un champ électrostatique dans lequel les molécules de solvant polaire viennent s'aligner, et les attire. La présence des molécules de solvant tend à écranter (masquer) la charge de l'ion. Ce phénomène s'appelle la solvation des ions.

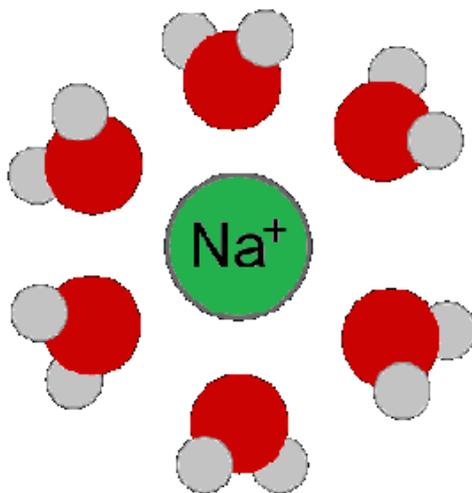


FIGURE 4 – Solvation des ions dans un solvant polaire

✳ **Forces de Van der Waals** *s'y retrouver*

Les forces de Van der Waals entre deux molécules polaires varient comme  $r^{-7}$ , où  $r$  est la distance qui les sépare. Elles sont de différents types :

- les forces de Keesom entre dipôles permanents ;
- les forces de Debye entre dipôle permanent et dipôle induit ;
- les forces de London entre dipôles induits.

### Effet d'un champ électrostatique sur un filet d'eau *vidéo*

On peut mettre en évidence l'attraction exercée par un champ électrostatique sur des dipôles par exemple en déviant un filet d'eau ou en attirant des morceaux de papier.  
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## II- Dipôles magnétostatiques

### 1. Moment dipolaire magnétique

#### Moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant *définition*

Un contour fermé orienté  $C$ , parcouru par un courant  $I$  (boucle de courant) présente un moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

où  $S$  est une surface qui s'appuie sur  $C$  et qui est orientée par  $C$ .

#### Sources microscopiques du magnétisme : *s'y retrouver*

un moment cinétique  $\vec{\sigma}$  induit un moment dipolaire

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma}$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique.

### 2. Dipôle magnétostatique actif

#### Champ magnétique créé par un dipôle *à retenir*

Un dipôle magnétostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{m}$  orienté suivant l'axe polaire, crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ magnétostatique de composantes

$$\begin{cases} B_r(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi(M) = 0 \end{cases}$$

#### Champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique *schéma*

La figure 5 représente quelques lignes de champ magnétique créées dans l'approximation dipolaire par un dipôle magnétostatique vues dans un plan  $\varphi = cste$ , orientées dans le sens du moment dipolaire.

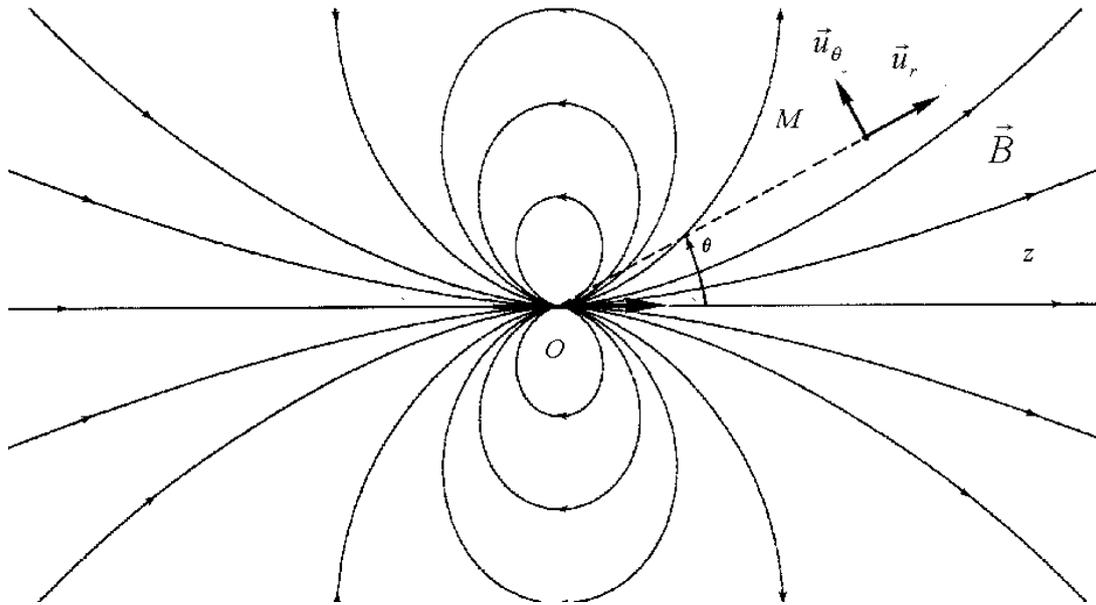


FIGURE 5 – Champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique

### 👁️ Champ magnétique terrestre *schéma*

La figure 6 représente quelques lignes de champ magnétique terrestre.

En première approximation, le champ magnétique terrestre est celui créé par un dipôle magnétique situé au centre de la Terre, orienté vers le pôle sud géographique.

### 3. Dipôle magnétique passif

#### 📖 4 Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique *théorème*

On peut prendre une spire de section  $S$  parcourue par un courant  $I$ . L'énergie potentielle des forces de Laplace est  $E_p = -I \cdot \phi = -I \cdot \vec{S} \cdot \vec{B}_{ext}$ .  $\Rightarrow$

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m}$  avec un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$$

#### ❤️ Moment des forces appliquées sur un dipôle magnétostatique *à retenir*

Le moment en un point  $O$  de l'action exercée par un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  sur un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m}$  est

$$\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$$

#### ⚙️ Effet des interaction magnétiques ressenties par un moment dipolaire magnétique *s'y retrouver*

Le moment tend à aligner parallèlement le dipôle magnétique au champ magnétique.

La position d'équilibre stable correspond à  $\vec{m}$  dans le même sens que  $\vec{B}_{ext}$ .

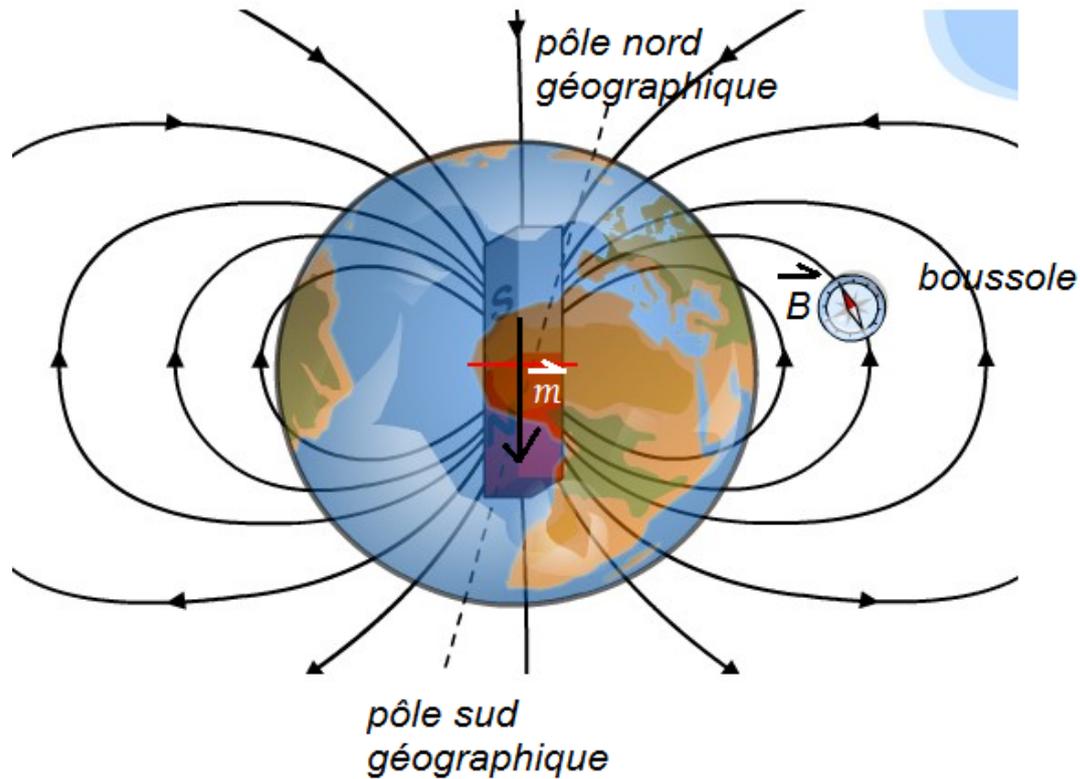


FIGURE 6 – Champ magnétique terrestre

La résultante tend à déplacer le dipôle magnétostatique vers les régions de champ magnétique intense.

### Actions exercées sur une aiguille aimantée *vidéo*

On peut visualiser les actions exercées sur un dipôle magnétostatique, une aiguille aimantée par exemple.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### expérience de Stern et Gerlach *schéma*

La figure 7 représente L'expérience d'Otto Stern et Walther Gerlach en février 1922 a mis en évidence l'existence du spin et sa quantification.

D'un point de vue classique, on s'attend que les atomes d'argent émergent du four avec des moments magnétiques  $\vec{\mu}$  orientés dans toutes les directions. La composante  $\mu_z$  devrait donc prendre toutes les valeurs positives et négatives, dans un intervalle approprié. Par conséquent, les atomes d'argent du faisceau filiforme incident devraient, à la sortie de l'aimant qui présente un gradient de champ magnétique, s'éparpiller le long d'une mince ligne sur le détecteur. Or, ce n'est pas ce que Stern et Gerlach ont observé. Le faisceau incident s'est plutôt séparé en deux faisceaux filiformes dirigés, respectivement, vers le haut et vers le bas du détecteur. Tout s'est donc passé comme si la composante  $\mu_z$  ne pouvait prendre que deux valeurs. La déviation relativement symétrique des deux faisceaux par rapport à l'axe  $y$  laissait croire que les deux valeurs possibles de la composante  $\mu_z$  étaient de même grandeur et de signe contraire.

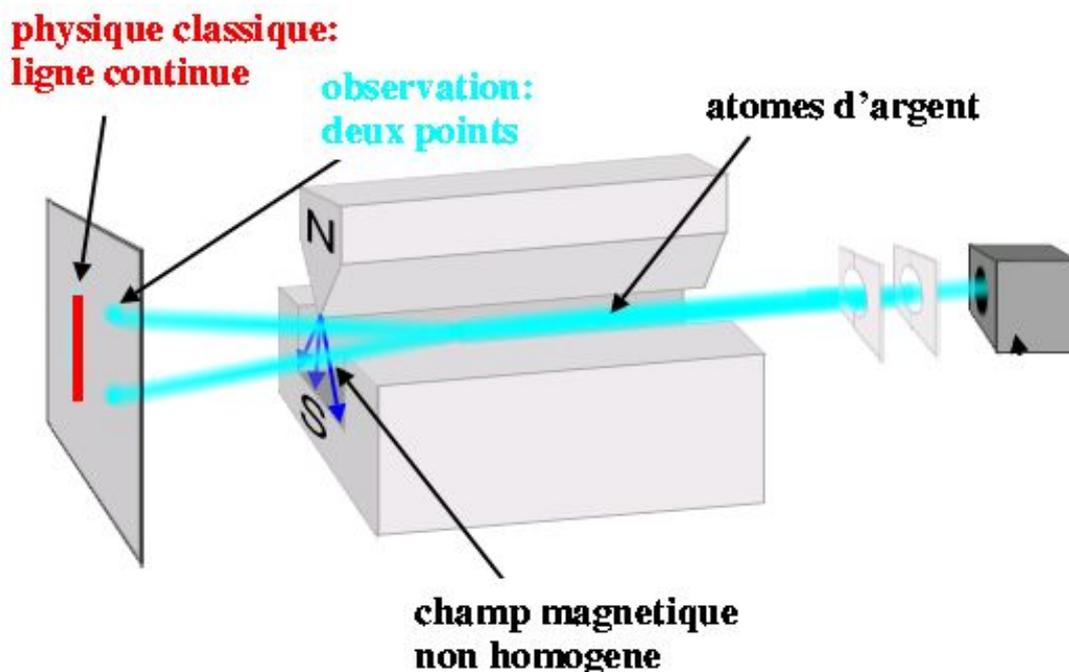


FIGURE 7 – expérience de Stern et Gerlach



Valeurs numériques (compléments)  
Dipôles électromagnétiques

Dipôles électrostatiques

En chimie les dipôles électrostatiques sont de l'ordre du debye ( $1 \text{ D} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ ).  
 Dipôle induit  $\vec{p} = \alpha \vec{E}_0 \Rightarrow \alpha \approx \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon_0$  où  $R$  est la taille de l'espèce chimique (atome, molécule).  
 Les forces de Van der Waals entre deux molécules sont de différents types :

- les forces de Keesom entre dipôles permanents ;
- les forces de Debye entre dipôle permanent et dipôle induit ;
- les forces de London entre dipôles induits.

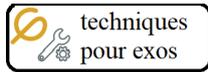
Dipôles magnétostatiques

En chimie, les moments dipolaires magnétiques sont de l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Le moment magnétique d'un aimant permanent est maximal quand tous les moment dipolaires des électrons le constituant sont alignés dans le même sens. L'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent est  $10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ . Pour un aimant de dimension  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 10^{-6} \text{ m}^3$ , on trouve  $m \approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

En première approximation, le champ magnétique terrestre ( $B_t \approx 40 \mu\text{T}$ ) est celui créé par un dipôle magnétique situé au centre de la Terre ( $m \approx 8 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ), orienté vers le pôle sud géographique.

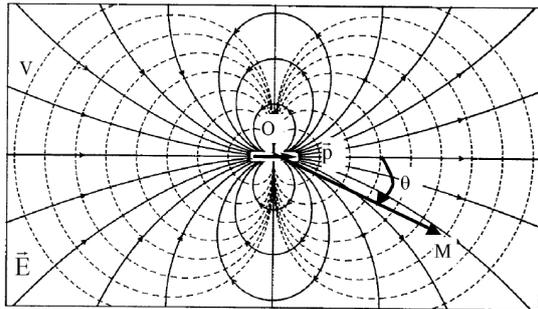


## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Dipôle actif

Un dipôle positionné en  $O$ , centre du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}_z$  orienté selon l'axe polaire crée un champ électrostatique en  $M$  de composantes dans le repère sphérique :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = \frac{2p_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$



### Dipôle induit

Dans un champ extérieur, un moment dipolaire est induit

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_0 \quad \text{avec : } \alpha \approx \frac{4}{3} \pi \epsilon_0 R^3$$

On peut retrouver que la polarisabilité est de l'ordre du volume de l'entité chimique grâce au modèle de l'atome de Thomson :  $\vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$ .

### Dipôle passif

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  avec un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$  est  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$ .

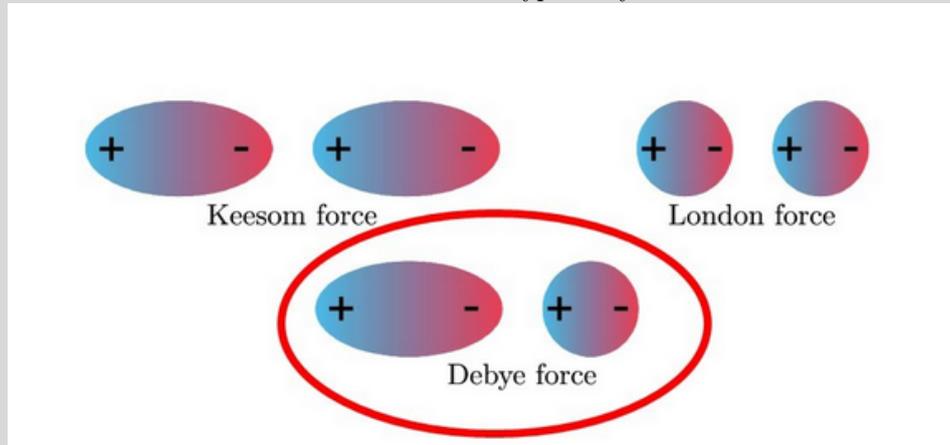
Le moment de l'action est  $\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$ . Il tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

La résultante de l'action est  $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext})$ . Elle tend à déplacer le dipôle électrostatique vers les régions de champ électrostatique intense.



### Exercice 17.1 (le prof fait cet exercice type jeudi) Dipôles électrostatiques en interaction

On va modéliser les interactions de Van der Waals de type Debye :



1) On suppose qu'une molécule polaire assimilée à un dipôle électrostatique ponctuel est positionnée en  $O$ , centre du repère sphérique. Son moment dipolaire  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}_z$  est orienté selon l'axe polaire.

On rappelle que le champ créé en  $M$  par ce dipôle a comme composantes dans le repère sphérique :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = \frac{2p_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

1.a) Rappeler les conditions pour pouvoir appliquer de telles formules.

1.b) Tracer l'allure des lignes de champs électrostatiques créées par  $\vec{p}_0$ .

2) On suppose qu'une molécule non polaire mais polarisable est positionnée en  $M(r, \theta, \varphi)$  dans le repère sphérique.

2.a) Estimer le moment dipolaire induit  $\vec{p}_i$  de cette molécule en  $M$  en utilisant le modèle de Thomson.

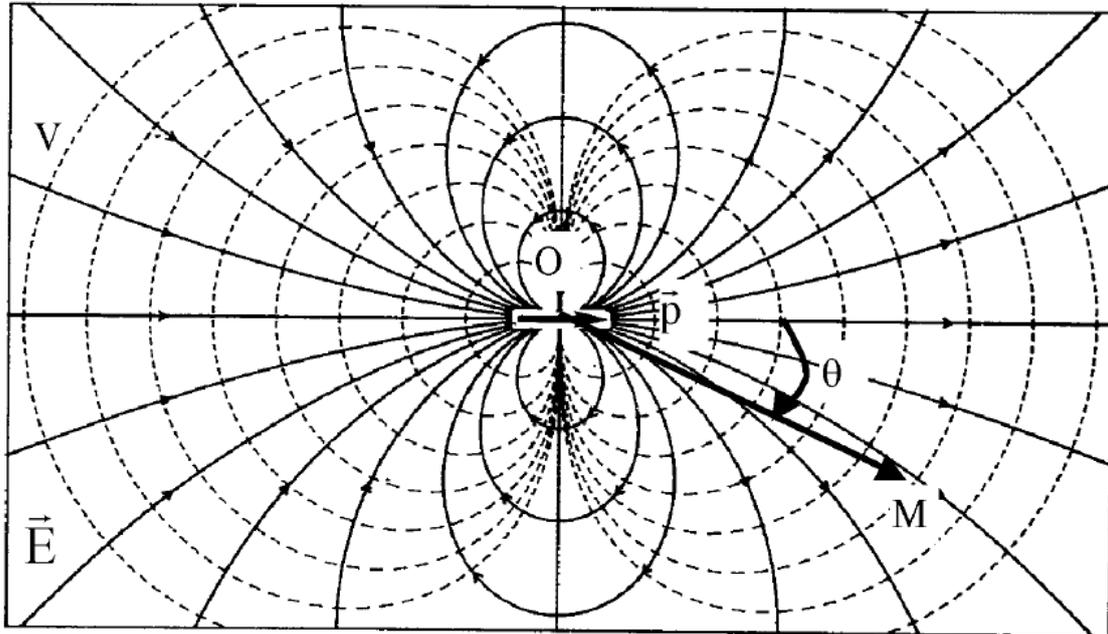
2.b) Déterminer l'énergie d'interaction entre les deux molécules.

2.c) Comment s'oriente la molécule en  $M$  ?

2.d) Quelle est l'expression de la force créée par  $O$  sur  $M$  ? Est-elle bien attractive et en  $1/r^7$  ?

## 1) Dipôle actif.

1.a) Conditions pour pouvoir appliquer de telles formules : approximation dipolaire.

1.b) Allure des lignes de champs électrostatiques créés par  $\vec{p}_0$  :

## 2) Dipôle passif.

2.a) Dans un champ extérieur  $\vec{E}_0$ , l'électron se trouve en  $\vec{r} = r \vec{u}_r$  tel que

$$-e \vec{E}_0 - e \frac{Q r}{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r = \vec{0}$$

aussi

$$\vec{ON} = r \vec{u}_r = -\frac{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3}{Q} \vec{E}_0$$

donc le moment dipolaire de l'atome est :

$$\vec{p} = Q \vec{NP} = -Q \vec{ON} = 4\pi \cdot \epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

aussi

$$\vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}_0 \Rightarrow \alpha = 4\pi \cdot \epsilon_0 R^3 \approx \frac{4}{3} \pi \cdot \epsilon_0 R^3$$

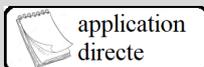
2.b) L'énergie d'interaction entre les deux molécules est

$$E_p = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_0 = -\alpha E_0^2 = -\alpha \frac{p_0^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^6} = \frac{-\alpha p_0^2 (5 \cos^2 \theta + 1)}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^6}$$

2.c) La molécule en  $M$  s'oriente de façon à ce que  $\vec{p}_i$  soit parallèle (et dans le même sens que) à  $\vec{E}$ . Ce qui est intrinsèquement réalisé puisque  $\vec{p}_i = \alpha \vec{E}_0$  avec  $\alpha > 0$ !

2.d) La force créée par  $O$  sur  $M$  est

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p) = \frac{\alpha p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \vec{\text{grad}} \left( \frac{5 \cos^2 \theta + 1}{r^6} \right) = \frac{\alpha p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^7} (-6(5 \cos^2 \theta + 1) \vec{u}_r - 10 \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Elle est bien attractive et en  $1/r^7$ .

### Exercice 17.2 pour s'entraîner

#### Moment dipolaire de l'eau

Dans la molécule d'eau  $H_2O$ , la distance  $O - H$  est  $a = 97 \text{ pm}$  et l'angle que font entre elles les deux liaisons  $O - H$  vaut  $\theta = 104,30^\circ$ . D'autre part, l'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, on suppose que

chaque  $H$  porte une charge  $+\frac{e}{3}$ , où  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$  est la charge électronique fondamentale.

- 1) Exprimer le moment dipolaire  $p_0$  de la molécule d'eau
  - 1.a) dans les unités du système international;
  - 1.b) en debye.

- 1) Le moment dipolaire de la molécule d'eau est  $p_0 = 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , soit :
  - 1.a)  $p_0 = 0,63 \cdot 10^{-29} C \cdot m$  dans les unités du système international;
  - 1.b)  $p_0 = 1,9 D$ .



**Exercice 17.3** pour s'entraîner

### Energies électrostatiques de l'atome d'hydrogène considéré comme un doublet

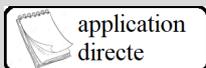
On modélise l'atome d'hydrogène comme un doublet formé d'un proton (chargé  $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ ) et d'un électron (chargé  $-e$ , placé à la distance  $a = 0,10 nm$  du noyau). On donne  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ .

- 1) Calculer  $W_{propre}$ , l'énergie électrostatique propre de ce doublet :
  - 1.a) dans les unités du système international;
  - 1.b) en  $eV$ .
  - 1.c) Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

On place l'atome dans un champ électrique extérieur de valeur le champ de claquage de l'air :  $E_{ext} = 3 \cdot 10^6 V \cdot cm^{-1}$ . On suppose que la distance entre le noyau et l'électron est quasi invariante.

- 2) Calculer  $W_{ext}$ , l'énergie électrostatique d'interaction de ce doublet avec le champ extérieur :
  - 2.a) dans les unités du système international;
  - 2.b) en  $eV$ .
- 3) Comparer  $W_{ext}$  et  $W_{propre}$ .

- 1) Energie électrostatique propre de ce doublet :  $W_{propre} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$  soit
  - 1.a)  $W_{propre} = 2,3 \cdot 10^{-18} J$  dans les unités du système international;
  - 1.b)  $W_{propre} = 14 eV$ .
  - 1.c) C'est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.
- 2) Energie électrostatique d'interaction de ce doublet avec le champ extérieur :  $W_{ext} = e \cdot a \cdot E_{ext}$ , soit
  - 2.a)  $W_{ext} = 4,8 \cdot 10^{-18} J$  dans les unités du système international;
  - 2.b)  $W_{ext} = 30 meV$ .
- 3)  $W_{ext} \ll W_{propre}$ .



**Exercice 17.4** pour s'entraîner

### Distribution dipolaire surfacique

On se place dans le repère sphérique de centre  $O$ , d'axe polaire  $\vec{u}_z$  (à partir duquel on compte l'angle  $\theta$ ).

On considère une distribution surfacique de charge, de densité  $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos(\theta)$ , sur une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , où  $\sigma_0$  est une constante.

- 1) Charge totale :
  - 1.a) Calculer la charge totale  $Q$  de la distribution.
  - 1.b) Pourquoi peut-on alors s'intéresser au moment dipolaire  $\vec{p}$  de cette distribution ?
- 2) Moment dipolaire :
  - 2.a) Exprimer  $\vec{p}$  grâce à des intégrales.
  - 2.b) Calculer  $\vec{p}$  en fonction de  $R$  et  $\sigma_0$ .
  - 2.c) La direction de  $\vec{p}$  était-elle prévisible ?

- 1) Charge totale :
  - 1.a)  $Q = 0$ .
  - 1.b) On a donc affaire à un dipôle si  $\vec{p} \neq \vec{0}$ .
- 2) Moment dipolaire :

- 2.a)  $\vec{p} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r \cdot \vec{u}_r \cdot \sigma(r, \theta, \varphi) \cdot r \cdot d\theta \cdot r \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi$ .
- 2.b)  $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \sigma_0 \cdot \vec{u}_z$ .
- 2.c) La distribution de charge a pour axe de symétrie  $O, \vec{u}_z$ , donc  $\vec{p} // \vec{u}_z$ .



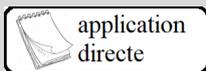
### Exercice 17.5 pour s'entraîner

#### Répulsion de deux hémisphères chargés

On charge une sphère parfaitement conductrice, de rayon  $R$ , avec une charge  $Q$ .

- Exprimer la charge surfacique  $\sigma$  portée par la sphère.
- On divise la sphère en deux hémisphères suivant un plan diamétral.
  - Exprimer la pression électrostatique  $P_e$  en un point d'un hémisphère ;
  - En déduire la force totale de répulsion entre les hémisphères.

- Une sphère :  $\sigma = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2}$ .
  - Deux hémisphères :
    - $P_e = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot R^4 \cdot \epsilon_0}$ .
    - $\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} P_e \cdot d\vec{S}$ . Par symétrie :  $\vec{F} = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot R^2 \cdot \epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{u}_z$ .
- On trouve :  $\vec{F} = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \epsilon_0} \vec{u}_z$ .



### Exercice 17.6 pour s'entraîner

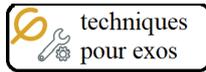
#### Interaction de deux dipôles électrostatiques à distance constante

On étudie deux dipôles électrostatiques de moments dipolaires respectifs  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ . Le premier est fixe en  $O$ , centre d'un repère sphérique d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$ , parallèle à son moment dipolaire :  $\vec{p}_1 = p_1 \cdot \vec{u}_z$ .

Le second dipôle est placé en  $r = cste$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi = 0$ . On repère son moment dipolaire par l'angle  $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{p}_2)$ , qui peut varier.

- Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\alpha)$  d'interaction du second dipôle avec le champ électrostatique créé par le premier dipôle.
- Que doit vérifier  $\tan(\theta - \alpha)$  à l'équilibre stable ?
- Application : que vaut  $\alpha$  si
  - $\theta = 0$  ;
  - $\theta = \frac{\pi}{4}$  ;
  - $\theta = \frac{\pi}{2}$  ;
  - $\theta = \pi$ .

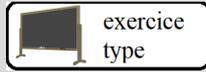
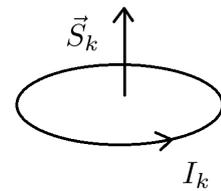
- $E_p(\alpha) = \frac{-p_1 \cdot p_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} [2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta - \alpha)]$ .
- $\tan(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} \tan(\theta)$  à l'équilibre stable.
- Application :
  - $\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  ;
  - $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 18^\circ$  ;
  - $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$  ;
  - $\theta = \pi \Rightarrow \alpha = 0$ .



### Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Pour déterminer un moment dipolaire magnétique, il faut se ramener à des spires de section  $S_k$  parcourues par un courant  $I_k$  :

$$\vec{m} = \sum_k I_k \vec{S}_k$$



### Exercice 17.7 (le prof fait cet exercice type jeudi) Dipôles magnétostatiques de l'électron

#### 1) Magnéton de Bohr

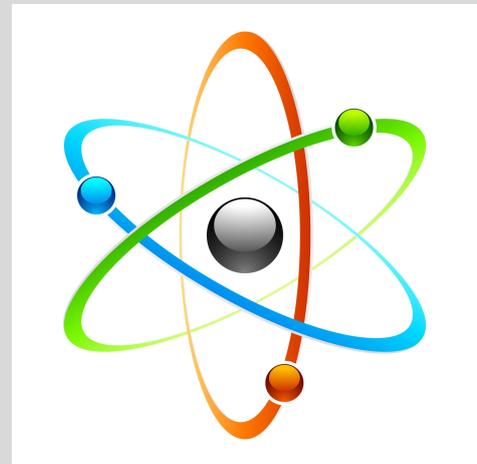
Déterminer un ordre de grandeur du magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. On cherchera cette grandeur sous la forme

$$\mu_B \approx e^\alpha \times m^\beta \times \hbar^\gamma$$

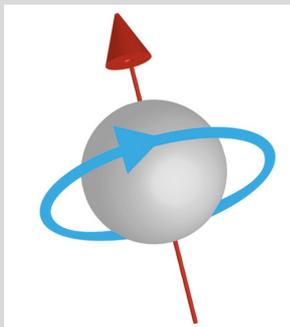
où  $e$  est la charge et  $m$  la masse de l'électron.

#### 2) Modèle planétaire :

Le modèle atomique de Rutherford est un modèle physique proposé en 1911 : Rutherford imagina un atome constitué d'un noyau chargé positivement et contenant la majorité de la masse de l'atome, et séparé par du vide, des électrons tournant autour comme des planètes autour d'une étoile. C'est le modèle planétaire de l'atome. Ce modèle sera adapté en 1913 par le physicien danois Niels Bohr.



Calculer le rapport gyromagnétique d'un électron tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  à la distance  $r$  du noyau de son atome.



#### 3) Modélisation du spin de l'électron :

Le spin (proposé par Samuel Goudsmit et George Uhlenbeck, en septembre 1925) a d'abord été interprété comme un degré de liberté supplémentaire, s'ajoutant aux trois degrés de liberté de translation de l'électron : son moment cinétique intrinsèque (ou propre). En d'autres termes, l'électron ponctuel était vu comme tournant sur lui-même – d'où le nom de « spin » (de l'anglais « to spin » : faire tourner). Mais il est vite apparu que cette « rotation » devait être considérée comme purement quantique : elle n'a pas d'équivalent en mécanique classique. La représentation du spin en termes de simple rotation a donc été abandonnée.

On modélise l'électron par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge volumique  $\rho$  homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire uniforme  $\omega$ .

**3.a)** Exprimer le courant  $dI$  créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance  $r$  (à  $dr$  près) à  $O$  et par l'angle  $\theta$  (à  $d\theta$  près) par rapport à ( $Oz$ ).

**3.b)** Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire  $d\vec{m}$  associé à cette spire, en fonction de  $\rho$ ,  $r$  et  $\theta$  ?

**3.c)** En déduire le moment dipolaire magnétique total  $\vec{m}$  de l'électron en fonction de  $e$  (la charge de l'électron),  $R$  et  $\omega$ .

On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr

$$m = \mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

et que le rayon de la sphère doit être  $R = 2,8 \text{ fm}$ .

**3.d)** Discuter des résultats précédents.

1) (en utilisant la force de Laplace  $F = I L B$  et le théorème d'Ampère  $B L = \mu_0 I$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} [e] = \text{C} \\ [m] = \text{kg} \\ [\hbar] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ [\mu_B] = \text{A} \cdot \text{m}^2 = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right.$$

D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 2 \\ -2\gamma = -2 \end{array} \right.$$

donc  $\gamma = 1$ ,  $\beta = -1$  et  $\alpha = +1$ . Aussi

$$\mu_B \approx \frac{e \hbar}{m}$$

2)

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} = \frac{dq}{dt} \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = -e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = \frac{-e \cdot \omega}{2} \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z$$

et le moment cinétique en  $O$ , où se trouve le noyau est :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u}_r \wedge m \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$$

donc :

$$\gamma = \frac{-e}{2 \cdot m}$$

3) Modélisation du spin de l'électron :

**3.a)**  $dI = \rho \omega r^2 \sin(\theta) dr d\theta$ .

**3.b)**  $d\vec{m} = \pi \rho \omega r^4 \sin^3(\theta) dr d\theta \cdot \vec{u}_z$ .

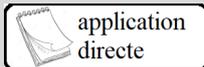
**3.c)**  $\vec{m} = \frac{-1}{5} e \omega R^2 \cdot \vec{u}_z$ .

**3.d)** Discussion de la modélisation :

$$\omega = \frac{5 \mu_B}{e R^2} = 3,7 \times 10^{25} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{max} = \omega R = 1,0 \times 10^{11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_{max} > c$  : la modélisation est donc inacceptable !



application  
directe

**Exercice 17.8** pour s'entraîner

### Modèle classique du spin de l'électron

1) Modélisation de l'électron :

Une modélisation simpliste du "spin" de l'électron est donnée par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge volumique  $\rho$  homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire uniforme  $\omega$ .

**1.a)** Exprimer le courant  $dI$  créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance  $r$  (à  $dr$  près) à  $O$  et par l'angle  $\theta$  (à  $d\theta$  près) par rapport à ( $Oz$ ).

**1.b)** Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire  $d\vec{m}$  associé à cette spire, en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $\theta$  ?

**1.c)** En déduire le moment dipolaire magnétique total  $\vec{m}$  de l'électron en fonction de  $e$  (la charge de l'électron),  $R$  et  $\omega$ .

2) Discussion de la modélisation :

On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr

$$m = \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

et que le rayon de la sphère doit être  $R = 2,8 fm$ .

**2.a)** Que vaut la vitesse angulaire  $\omega$  ?

**2.b)** En déduire la vitesse maximale  $v_{max}$  d'un point de la sphère.

**2.c)** Que faut-il conclure d'un tel résultat ?

- 1) Modélisation de l'électron :
- $dI = \rho \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta$ .
  - $d\vec{m} = \pi \cdot \rho \cdot \omega \cdot r^4 \cdot \sin^3(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{u}_z$ .
  - $\vec{m} = \frac{-1}{5} e \cdot \omega \cdot R^2 \cdot \vec{u}_z$ .
- 2) Discussion de la modélisation :
- $\omega = \frac{5 \cdot \mu_B}{e \cdot R^2} = 3.7 \cdot 10^{25} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - $v_{max} = \omega \cdot R = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - $v_{max} > c$  : la modélisation est donc inacceptable !



**Exercice 17.9** pour s'entraîner

### Rapport gyromagnétique de l'électron tournant autour du noyau

1) Calculer le rapport gyromagnétique d'un électron tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  à la distance  $r$  du noyau de son atome.

1)

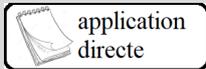
$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} = \frac{dq}{dt} \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = -e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = \frac{-e \cdot \omega}{2} \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z$$

et le moment cinétique en  $O$ , où se trouve le noyau est :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u}_r \wedge m \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$$

donc :

$$\gamma = \frac{-e}{2 \cdot m}$$



**Exercice 17.10** pour s'entraîner

### Champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique dans l'approximation dipolaire et champ créé par une spire sur son axe

1) Montrer que le champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique dans l'approximation dipolaire permet de retrouver le champ magnétique créé par une spire circulaire centrée en  $O$ , de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$  sur son axe  $Oz$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 z^3} \vec{u}_z$$

1) Sur l'axe,  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , donc :

$$\begin{cases} B_r(M) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \cos \theta}{r^3} = \pm \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{m}{r^3} \\ B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{m \cdot \sin \theta}{r^3} = 0 \\ B_\varphi(M) = 0 \end{cases}$$

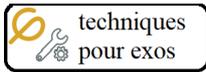
Or sur l'axe de la spire,

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin^3 \alpha}{2 \cdot R} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{u}_z$$

qui devient dans l'approximation dipolaire ( $r = z \gg R$ ) :

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot (r^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \pi \cdot R^2}{2 \pi \cdot r^3} \vec{u}_z$$

(cqfd)

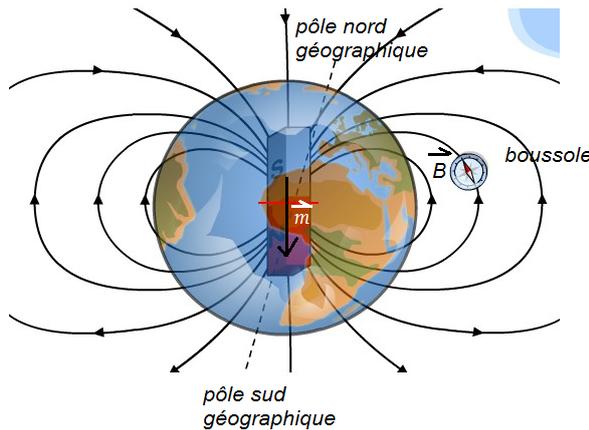


**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

**Dipôle actif**

Un dipôle positionné en  $O$ , centre du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{m}_0 = p_0 \vec{u}_z$  orienté selon l'axe polaire crée un champ magnétostatique en  $M$  de composantes dans le **repère sphérique** :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} B_r = \frac{2\mu_0 m_0 \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

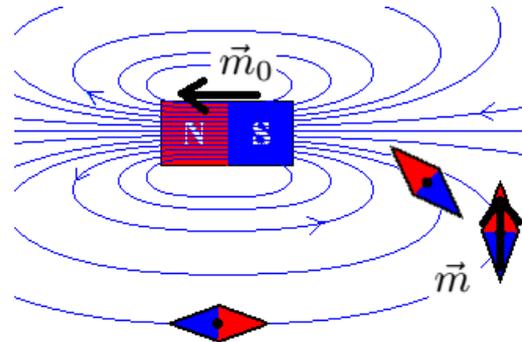


En première approximation, le champ magnétique terrestre est celui créé par un dipôle magnétique situé au centre de la Terre, orienté vers le pôle sud géographique.

**Dipôles**

On peut assimiler à un dipôle magnétique :

- une boussole ou un aimant ( $\vec{m}$  du sud vers le nord - rouge).
- une boucle de courant  $\vec{m} = I \vec{S}$ , avec  $\vec{S}$  orientée par le contour fermé parcouru par  $I$  selon la règle de la main droite).

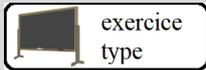


**Dipôle passif**

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire  $\vec{m}$  avec un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  est  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$ .

Le moment de l'action est  $\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$ . Il tend à aligner parallèlement le dipôle au champ.

La résultante de l'action est  $\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext})$ . Elle tend à déplacer le dipôle vers les régions de champ intense.



**Exercice 17.11** (le prof fait cet exercice type jeudi)  
**Géomagnétismes**

La Terre de centre  $O$  et de rayon  $R_T$ , d'axe polaire ( $O, \vec{u}_z$ ) orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipôle magnétique de moment dipolaire :  $\vec{m} = m \vec{u}_z$ .

On repère un point  $M$  du globe terrestre par  $r = R_T = 6371$  km,  $\theta$  fixé, et  $\varphi$  quelconque. On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle :

$$B_r(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \cos \theta}{r^3} \quad B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m \cdot \sin \theta}{r^3} \quad B_\varphi(M) = 0$$

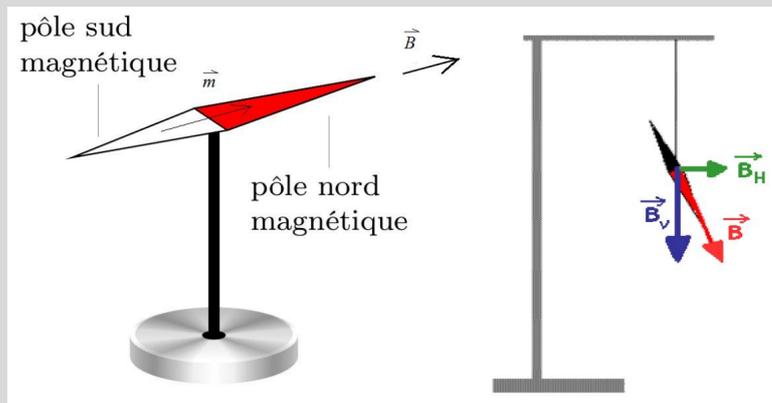
1) Exprimer la latitude  $\lambda$  comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de  $\theta$ .

A Paris ( $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  est vers le sol : il fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale et sa composante horizontale est  $B_h = 20 \mu\text{T}$ .

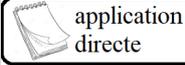
2) Exprimer :

- 2.a) la composante verticale  $B_v$  du champ magnétique terrestre ;
- 2.b) la norme  $B_t$  du champ magnétique terrestre.

3) Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre  $m$ .



- 1)  $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$ .
- 2) Champ magnétique terrestre :
  - 2.a) composante verticale  $B_v = B_h \cdot \tan I = 43\mu T$  ;
  - 2.b) norme  $B_t = \frac{B_h}{\cos I} = 47\mu T$ .
- 3)  $m = \frac{4 \cdot \pi \cdot R_T^3}{\mu_0 \cdot \sin(\lambda + \frac{\pi}{2})} = 78 \cdot 10^{21} A \cdot m^2$ .

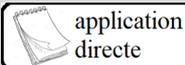
application  
directe**Exercice 17.12** pour s'entraîner**Interaction de deux dipôles magnétiques à distance constante**

On étudie deux dipôles magnétiques de moments dipolaires respectifs  $\vec{m}_1$  et  $\vec{m}_2$ . Le premier est fixe en  $O$ , centre d'un repère sphérique d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$ , parallèle à son moment dipolaire :  $\vec{m}_1 = m_1 \cdot \vec{u}_z$ .

Le second dipôle est placé en  $r = cste$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi = 0$ . On repère son moment dipolaire par l'angle  $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{m}_2)$ , qui peut varier.

- 1) Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\alpha)$  d'interaction du second dipôle avec le champ magnétique créé par le premier dipôle.
- 2) Que doit vérifier  $\tan(\theta - \alpha)$  à l'équilibre stable ?
- 3) Application : que vaut  $\alpha$  si
  - 3.a)  $\theta = 0$  ;
  - 3.b)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ;
  - 3.c)  $\theta = \pi$ .

- 1)  $E_p(\alpha) = \frac{-\mu_0 \cdot m_1 \cdot m_2}{4 \cdot \pi \cdot r^3} [2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta - \alpha)]$ .
- 2)  $2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) = 0$  donc  $\tan(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} \tan(\theta)$  à l'équilibre stable.
- 3) Application :
  - 3.a)  $\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  ;
  - 3.b)  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$  ;
  - 3.c)  $\theta = \pi \Rightarrow \alpha = 0$ .

application  
directe**Exercice 17.13** pour s'entraîner**Force exercée par un champ magnétique uniforme sur un dipôle**

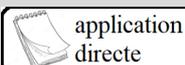
Soit un repère cartésien  $Oxyz$ , et un vecteur  $\vec{u}_0$  dans le plan  $(xOy)$ , et on pose l'angle  $\alpha = (\vec{u}_0, \vec{u}_y)$ .

Il règne dans l'espace un champ magnétique  $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_0$  uniforme et stationnaire.

Soit une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ , dans le plan  $xOz$  parcourue par un courant  $I$  dans le sens trigonométrique défini par le vecteur  $\vec{u}_x$ .

- 1) Quel est le moment dipolaire  $\vec{m}$  du dipôle magnétique associé à cette spire ?
- 2) On calculera, pour l'action exercée par le champ magnétique sur la spire :
  - 2.a) l'énergie potentielle  $E_p$  ;
  - 2.b) le moment en  $O$   $\vec{M}_O$  ;
  - 2.c) la résultante des forces  $\vec{F}$ .

- 1)  $\vec{m} = I \cdot \vec{S} = I \cdot \pi \cdot R^2 \vec{u}_y$ .
- 2) On calcule :
  - 2.a)  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -I \cdot \pi \cdot R^2 \cdot B \cdot \cos \alpha$  ;
  - 2.b)  $\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B} = I \cdot \pi \cdot R^2 \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot \vec{u}_z$  ;
  - 2.c)  $\vec{F} = -\vec{grad}(E_p) = \vec{0}$ .

application  
directe**Exercice 17.14** pour s'entraîner**Force exercée par un fil sur un dipôle magnétique**

Soit un fil infini rectiligne parcouru par un courant  $I$ , suivant l'axe  $Oz$ . On se placera dans le système de coordonnées cylindrique de même axe.

- 1) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le fil.
- 2) Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  selon  $\vec{u}_\theta$  et distant d'une distance  $r$  du fil.
  - 2.a) Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre le fil et le dipôle.
  - 2.b) En déduire la force exercée par le fil sur le dipôle.

- 1)  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \vec{u}_\theta$ .

- 2) Interaction

- 2.a)  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{-\mu_0 \cdot I \cdot m}{2 \cdot \pi \cdot r}$ .

- 2.b)  $\vec{F} = -\text{grad}(E_p) = \frac{-\mu_0 \cdot I \cdot m}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \vec{u}_r$  (qui attire le dipôle vers le fil, zone où le champ magnétique est plus intense).



application  
directe

**Exercice 17.15** pour s'entraîner

### Mesure du moment dipolaire magnétique d'un aimant

On se place dans un repère cartésien  $(Oxyz)$ ,  $(Oz)$  étant vertical.

Une boussole (assimilée à une aiguille aimantée mobile sans frottements autour de  $(Oz)$ ) est placée en  $O$  et s'oriente parallèlement au champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t = B_t \cdot \vec{u}_x$  (où  $B_t = 20 \mu T$ ).

On approche de cette boussole un petit aimant, en le gardant parallèle à la direction Est-Ouest  $(Oy)$ .

Cet aimant est assimilé à un dipôle magnétique, de moment magnétique  $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_y$ , de norme  $m$  que l'on va déterminer.

1) Déterminer l'angle  $\alpha$  que fait la boussole avec  $(Ox)$ , en fonction de  $m$  et de  $r$ , la distance de l'aimant à la boussole.

Pour  $r = 1, 2m$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . On donne  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ .

2) En déduire  $m$ .

- 1)  $\alpha = \arctan\left(\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot B_t}\right)$ .

- 2) Pour  $\alpha = 45^\circ$ ,  $m = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot B_t}{2 \cdot \mu_0} = 1, 7 \cdot 10^2 A \cdot m^2$ .



application  
directe

**Exercice 17.16** pour s'entraîner

### Cadre carré dans un champ magnétique

Un cadre carré vertical, indéformable, de centre  $O$ , de côté  $d$  constitué de  $N$  spires parcourues par un courant stationnaire  $I$ , peut tourner autour d'un axe vertical  $(Oz)$  parallèle à deux de ses côtés dans le référentiel  $R$  du sol (supposé galiléen).

On applique un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_x$  uniforme et stationnaire (on négligera le champ magnétique propre du circuit électrique).

On repère le plan du cadre par l'angle  $\theta$  que fait sa normale  $\vec{n}$  (dont le sens est donné par l'orientation électrique des fils) avec  $\vec{u}_x$  :  $\theta = (\vec{n}, \vec{u}_x)$ .

1) Exprimer le moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des forces de Laplace appliquées au cadre :

1.a) en utilisant la force de Laplace ;

1.b) en utilisant le dipôle magnétostatique.

- 1) Moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des forces de Laplace appliquées au cadre :

- 1.a) Force de Laplace :  $\vec{M}_O = N \cdot I \cdot \oint \left[ O\vec{M} \wedge \left( d\vec{l} \wedge \vec{B} \right) \right]$ .

- 1.b) Dipôle magnétostatique :  $\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}$  avec le moment dipolaire  $\vec{m} = N \cdot I \vec{S} = N \cdot I \cdot d^2 \cdot \vec{n}$ .

Dans tous les cas :  $\vec{M}_O = N \cdot I \cdot B \cdot d^2 \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_z$ .



**Exercice 17.17** pour s'entraîner

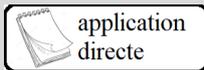
### Inclinaison du champ magnétique terrestre en fonction de la latitude

La Terre de centre  $O$  et de rayon  $R_T$ , d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$  orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipole magnétique de moment dipolaire :  $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_z$ .

On repère un point  $M$  du globe terrestre par  $r = R_T$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi$  quelconque. En  $M$ , le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  fait un angle  $I$  avec l'horizontale (l'inclinaison  $I$  est négative si  $\vec{B}_t$  est vers le sol).

- 1) Exprimer  $\tan(I)$  en fonction de  $\theta$ .
- 2) Exprimer la latitude  $\lambda$  comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de  $\theta$ .  
On donne  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ .
- 3) En déduire  $\tan(I)$  en fonction de  $\lambda$ .
- 4) Application : que vaut l'inclinaison à Paris ( $\lambda = 49^\circ$ ),

- 1)  $\tan(I) = \frac{2}{\tan(\theta)}$ .
- 2)  $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$ .
- 3)  $\tan(I) = -2 \cdot \tan(\lambda)$ .
- 4) Application :  $\lambda = 49^\circ \Rightarrow I = -67^\circ$  (en réalité  $I = -65^\circ$ ).



**Exercice 17.18** pour s'entraîner

### Valeur du moment dipolaire magnétique terrestre

La Terre de centre  $O$  et de rayon  $R_T$ , d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$  orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipole magnétique de moment dipolaire :  $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_z$ .

On repère un point  $M$  du globe terrestre par  $r = R_T = 6371 \text{ km}$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi$  quelconque.

- 1) Exprimer la latitude  $\lambda$  comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de  $\theta$ .

A Paris ( $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  est vers le sol : il fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale et sa composante horizontale est  $B_h = 20 \mu\text{T}$ .

- 2) Exprimer :
  - 2.a) la composante verticale  $B_v$  du champ magnétique terrestre ;
  - 2.b) la norme  $B_t$  du champ magnétique terrestre.
- 3) Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre  $m$ .

- 1)  $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$ .
- 2) Champ magnétique terrestre :
  - 2.a) composante verticale  $B_v = B_h \cdot \tan I = 43 \mu\text{T}$  ;
  - 2.b) norme  $B_t = \frac{B_h}{\cos I} = 47 \mu\text{T}$ .
- 3)  $m = \frac{4 \cdot \pi \cdot R_T^3}{\mu_0 \cdot \sin(\lambda + \frac{\pi}{2})} = 78 \cdot 10^{21} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .



**Exercice 17.19** pour s'entraîner

### Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

On se place dans un repère cartésien  $(Oxyz)$ ,  $(Oz)$  étant vertical.

Une boussole (assimilée à une aiguille aimantée mobile sans frottements autour de  $(Oz)$ ) est placée en  $O$  et s'oriente parallèlement à la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t = B_t \cdot \vec{u}_x$  (on cherche à déterminer  $B_t$ ).

On place cette boussole au centre de bobines de Helmholtz assimilées à deux spires circulaires parcourues par le même courant  $I$ , d'axe parallèle à la direction Est-Ouest  $(Oy)$ , de rayon  $R = 10 \text{ cm}$ , disposées dans les plans

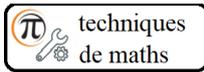
$$y = +\frac{R}{2} \text{ et } y = -\frac{R}{2}.$$

- 1) Exprimer le champ magnétique  $B_H$  créé par les bobines de Helmholtz en  $O$ .
- 2) Déterminer l'angle  $\alpha$  que fait la boussole avec  $(Ox)$ , en fonction de  $I$ .  
Pour  $I = 2,2A$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . On donne  $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}H.m^{-1}$ .
- 3) En déduire  $B_t$ .

$$1) \vec{B}_H = \frac{8.\mu_0.I}{5.R\sqrt{5}}\vec{u}_y.$$

$$2) \alpha = \arctan\left(\frac{8.\mu_0.I}{5.R\sqrt{5}.B_t}\right).$$

$$3) \text{ Pour } \alpha = 45^\circ, B_t = \frac{8.\mu_0.I}{5.R\sqrt{5}} = 20\mu T.$$

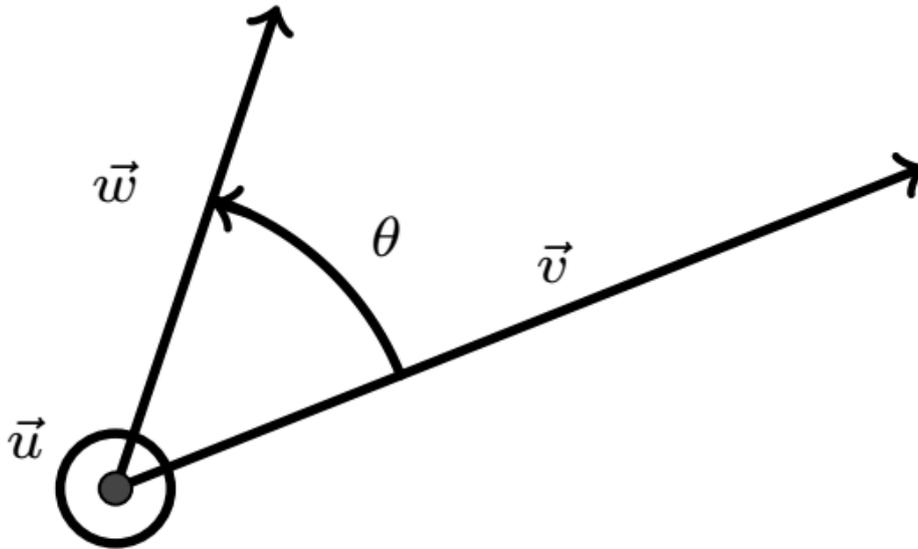


## Techniques mathématiques à maîtriser Produit vectoriel

**Produit vectoriel :**

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta \vec{u} \quad \text{où } \vec{u} \text{ est un vecteur unitaire perpendiculaire à } \vec{v} \text{ et } \vec{w} : \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} .$$

Son sens est obtenu par la règle du tire bouchon, ou bien celle de la main droite ou bien encore celle du bonhomme d'Ampère.



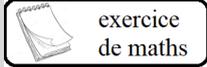
### Expression dans un repère cartésien

Dans un repère cartésien direct (x,y,z) :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - w_y \cdot v_z \\ v_z \cdot w_x - w_z \cdot v_x \\ v_x \cdot w_y - w_x \cdot v_y \end{pmatrix}$$

### Formules relatives au produit vectoriel

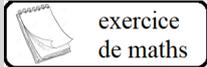
$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= -\vec{B} \wedge \vec{A} \\ \vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \\ \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$



**Exercice 17.20** pour s'entraîner  
**Produit vectoriel et parallélogramme**

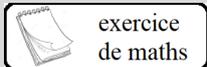
1) Montrer que la norme du produit vectoriel de deux vecteurs est égale à la surface du parallélogramme dont ils sont les côtés.

1)  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B})$ .



**Exercice 17.21** pour s'entraîner  
**Produit vectoriel et parallélépipède**

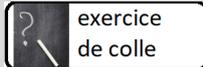
1) Soit un parallélépipède de côtés  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ . Montrer que son volume est  $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})|$ .



**Exercice 17.22** pour s'entraîner  
**Produit vectoriel et vitesse aréolaire**

1) Caractériser le vecteur :  $\frac{(\vec{r} \wedge d\vec{r})}{2}$ . Quel rapport a-t-il avec le moment cinétique ?

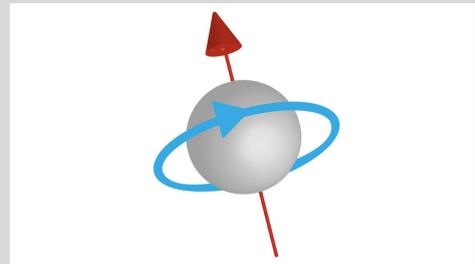
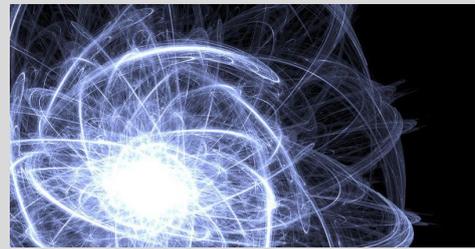
1)  $\frac{(\vec{r} \wedge d\vec{r})}{2} = dA \vec{u}_z = \frac{\vec{\sigma}_O}{m} dt$



### Exercice 17.23 Modèle classique de l'électron

La mécanique classique nous a appris à distinguer dans le mouvement d'un corps deux composantes : d'une part, un mouvement extrinsèque, son déplacement ; d'autre part, un mouvement intrinsèque, sa rotation sur lui-même. Ainsi, pour la Terre, on peut aisément séparer sa révolution annuelle autour du Soleil de sa rotation quotidienne sur elle-même. À chacun de ces mouvements du corps considéré est associée une grandeur cinématique spécifique : pour son déplacement, la quantité de mouvement, et pour sa rotation, le moment cinétique (ou angulaire) propre. Il s'agit d'une grandeur vectorielle dont la direction est celle de l'axe de rotation et dont la valeur est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation. Un objet quantique, ou « quanton », est doté d'un moment cinétique propre, qui traduit ses propriétés rotationnelles, même s'il s'agit d'une notion plus abstraite et moins imagée qu'un mouvement de rotation classique. Mise en évidence au cours des années 1920 pour l'électron, cette grandeur a reçu en anglais la dénomination de spin, exprimant le tournoisement et provenant de la désignation anglaise de la quenouille d'une fileuse au rouet.

"Qu'est donc le spin ?" Jean-Marc Lévy-Leblond - février 2017 - POUR LA SCIENCE N° 473



#### 1) Magnéton de Bohr

Déterminer un ordre de grandeur du magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. On cherchera cette grandeur sous la forme

$$\mu_B \approx e^\alpha \times m^\beta \times \hbar^\gamma$$

où  $e$  est la charge et  $m$  la masse de l'électron.

#### 2) Modèle planétaire :

Calculer le rapport gyromagnétique d'un électron tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  à la distance  $r$  du noyau de son atome.

#### 3) Modélisation du spin de l'électron :

Une modélisation simpliste du "spin" de l'électron est donnée par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge volumique  $\rho$  homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire uniforme  $\omega$ .

**3.a)** Exprimer le courant  $dI$  créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance  $r$  (à  $dr$  près) à  $O$  et par l'angle  $\theta$  (à  $d\theta$  près) par rapport à ( $Oz$ ).

**3.b)** Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire  $d\vec{m}$  associé à cette spire, en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $\theta$  ?

**3.c)** En déduire le moment dipolaire magnétique total  $\vec{m}$  de l'électron en fonction de  $e$  (la charge de l'électron),  $R$  et  $\omega$ .

#### 4) Discussion de la modélisation :

On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr

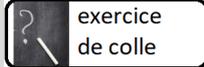
$$m = \mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

et que le rayon de la sphère doit être  $R = 2,8 \text{ fm}$ .

**4.a)** Que vaut la vitesse angulaire  $\omega$  ?

**4.b)** En déduire la vitesse maximale  $v_{max}$  d'un point de la sphère.

**4.c)** Que faut-il conclure d'un tel résultat ?



exercice  
de colle

### Exercice 17.24 Monopôles et dipôles magnétiques

Depuis la découverte du magnétisme, tous les objets magnétiques étudiés jusqu'à présent, qu'il s'agisse de notre Terre ou d'un simple barreau aimanté, du microscopique proton ou de l'électron pratiquement ponctuel, sont caractérisés par deux pôles magnétiques, généralement appelés nord et sud.

La recherche d'un monopôle magnétique a pourtant motivé très tôt la curiosité des physiciens, d'autant qu'électricité et magnétisme sont des phénomènes fort semblables et qu'un monopôle électrique comme l'ion  $H^+$  (ou proton) s'obtient très facilement en ionisant l'atome d'hydrogène, qui est lui-même un dipôle électrique, avec son pôle négatif, l'électron, et son pôle positif, le proton.

Dès 1931, Paul Dirac montre que, dans le formalisme quantique, l'existence de monopôles magnétiques expliquerait que les charges électriques sont toutes multiples d'une charge électrique élémentaire, celle de l'électron.

<https://www.universalis.fr/encyclopedie/monopole-magnetique/>



#### 1) Monopôle magnétostatique

**1.a)** A partir des équations de Maxwell, démontrer l'équation locale de conservation de la charge.

**1.b)** Justifier (par une analogie avec l'électrostatique par exemple) le nom de "monopôle magnétique" donné à l'expression :

$$\vec{C} = \iiint \vec{j} \cdot d^3\tau$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courants.

**1.c)** En exprimant  $\text{div}(\vec{x} \cdot \vec{j})$ , montrer que  $\vec{C} = \vec{0}$ .

#### 2) Dipôles

**2.a)** En se servant du fait que les monopôles magnétiques n'existent pas, démontrer que l'expression générale d'un moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint (\vec{OM} \wedge \vec{j}) d^3\tau$$

ne dépend pas du repère choisi.

**2.b)** A partir de la précédente relation, retrouver l'expression du moment dipolaire magnétique créé par une spire de courant définissant une surface orientée  $\vec{S}$  parcourue par un courant  $I$  :

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

#### 3) Actions exercées sur un dipôle

On s'intéresse à un dipôle magnétique assimilé à une spire parcourue par un courant  $I$ , plongée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  uniforme et constant.

**3.a)** Montrer que le moment en  $O$  des forces exercées sur ce dipôle par le champ magnétique est

$$\vec{M}_0 = I \oint (\vec{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} - I \oint (\vec{OM} \cdot d\vec{\ell}) \vec{B}$$

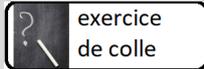
On donne pour ce faire la formule du double produit vectoriel  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

**3.b)** En déduire que

$$\vec{M}_0 = -I \iint \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{OM} \cdot \vec{B}) \wedge d^2\vec{S}$$

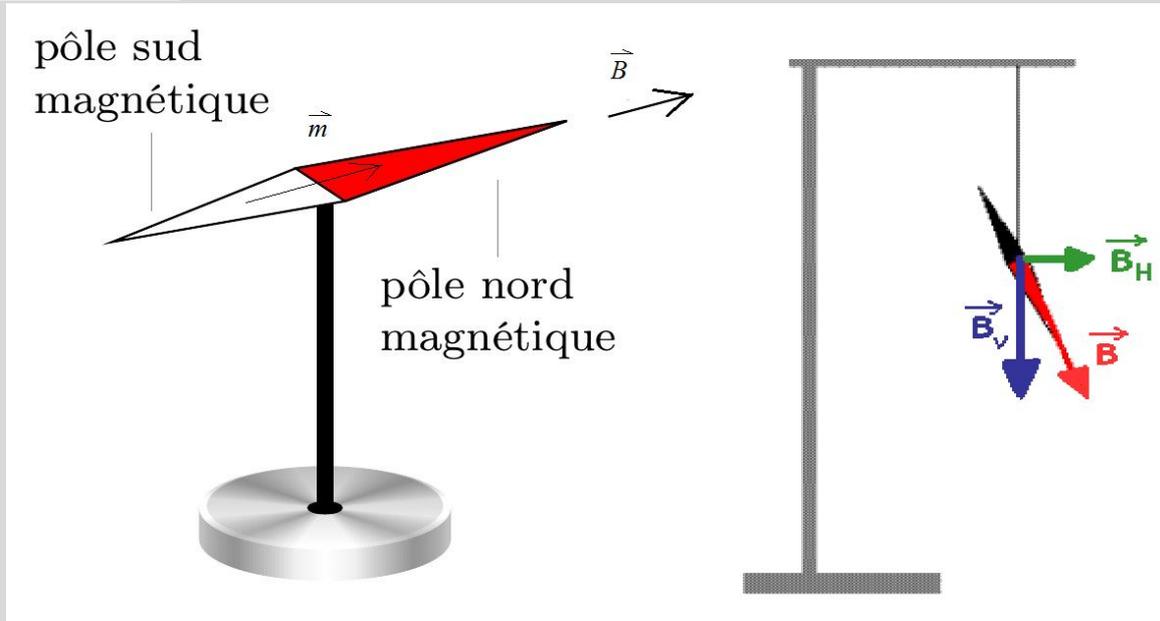
On donne pour ce faire la formule de Kelvin :  $\oint_{\mathcal{C}} f d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} d^2\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(f)$ .

**3.c)** En calculant  $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{OM} \cdot \vec{B})$ , déduire l'expression de  $\vec{M}_0$  avec  $\vec{m}$ .



exercice  
de colle

### Exercice 17.25 Modélisation du champ magnétique terrestre



#### 1) Fonctionnement d'une boussole.

Le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  se décompose en une composante horizontale  $\vec{B}_h$  et une composante verticale  $\vec{B}_v$  :  $\vec{B}_t = \vec{B}_h + \vec{B}_v$ . A Paris (de latitude  $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  est orienté vers le bas et fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale.

Une aiguille aimantée de moment dipolaire  $\vec{m}$  (repérée par l'aiguille, vers la zone rouge) est posée sur une liaison pivot verticale : elle s'oriente librement dans un plan horizontal.

**1.a)** Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction de  $\vec{m}$  avec  $\vec{B}_t$ . On fera apparaître des angles idoines.

**1.b)** En déduire la direction donnée par la boussole.

#### 2) Inclinaison $I$ du champ magnétique terrestre.

**2.a)** Proposer un dispositif pour mesurer expérimentalement l'inclinaison  $I$ .

Le pôle Nord magnétique de la Terre est un point errant unique sur la surface où le champ magnétique terrestre pointe vers le bas. En 2015, les coordonnées de ce point ( $86^\circ 27' \text{ N}$ ,  $136^\circ 59' \text{ O}$ ) étaient très proches des coordonnées du pôle nord géographique.

**2.b)** Dans les coordonnées sphériques de centre, le centre de la Terre, d'axe polaire (orienté du pôle géographique sud vers le pôle géographique nord), quelle est l'expression du champ magnétique terrestre au pôle nord magnétique ?

#### 3) Norme du champ magnétique terrestre.

On place, à Paris, une boussole au centre d'un solénoïde quasi infini formé de  $n = 716$  spires par mètres, parcourues par le courant  $I$ , d'axe parallèle à la direction Est-Ouest ( $Oy$ ).

**3.a)** Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_H$  créé par le solénoïde.

**3.b)** Pour  $I = 22 \text{ mA}$ , l'angle que fait la boussole avec ( $Ox$ ) est  $\alpha = 45^\circ$ . En déduire  $B_h$ .

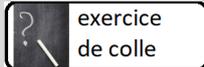
**3.c)** En déduire  $B_t$ .

#### 4) Lignes de champ magnétique terrestre.

On assimile le champ magnétique terrestre à celui créé par un dipôle permanent de moment  $\vec{m}_t$  positionné au centre de la Terre.

**4.a)** Tracer l'allure des lignes de champ d'un dipôle de moment  $\vec{m}_t$ .

**4.b)** En utilisant les résultats précédents, positionner la Terre, Paris et le pôle nord géographique sur ces lignes de champ. Conclure.



exercice  
de colle

### Exercice 17.26 Champ magnétique terrestre et boussole

#### 1) Forme du champ magnétique terrestre

Le champ magnétique de la Terre peut être considérée approximativement comme celui d'un dipôle magnétostatique situé au centre de la Terre. Ici, on considérera que l'axe du dipôle est confondu avec l'axe des pôles géographiques. On se place dans le repère sphérique de centre  $O$ , le centre de la Terre. Si on se place à la surface de la Terre au point  $M$ , c'est à dire à la distance  $r = R_T = 6300$  km de  $O$  et pour les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , on suppose que l'approximation dipolaire est justifiée.

**1.a)** Rappeler le cadre de l'approximation dipolaire.

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle sont

$$\begin{cases} B_r(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi(M) = 0 \end{cases}$$

**1.b)** Tracer l'allure des lignes de champ magnétique du dipôle dans l'approximation dipolaire.

Le vecteur champ magnétique terrestre  $\vec{B}$  possède une composante verticale  $\vec{B}_v$  (dirigée vers le centre de la Terre) et une composante horizontale  $\vec{B}_h$ , dirigée vers le pôle nord.

**1.c)** Dans quel sens est orienté le dipôle magnétique terrestre? Justifier.

Les pôles magnétiques sont les endroits sur Terre où la composante horizontale  $\vec{B}_h$  a une valeur nulle.

**1.d)** Où se trouvent les pôles magnétiques? Où est le pôle nord du point de vue magnétique? Justifier.

L'angle formé par  $\vec{B}$  et  $\vec{B}_h$  est appelé inclinaison.

**1.e)** Donner une valeur approximative de l'inclinaison  $i_F$  en France (on prendra comme latitude  $\lambda = 49^\circ$ ).

La valeur du champ magnétique en France est de l'ordre de  $B = 47 \mu\text{T}$ .

**1.f)** En déduire les valeurs des composantes horizontale et verticale du champ magnétique en France.

**1.g)** En déduire la valeur du moment dipolaire magnétique de la Terre.

#### 2) Utilisation de la boussole

On s'intéresse à un dipôle magnétique  $\vec{m}'$  ("passif") placé un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$ .

**2.a)** Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce dipôle magnétostatique avec le champ magnétique extérieur?

**2.b)** Quel est le moment en un point  $M$  de l'action exercée par le champ magnétique extérieur sur ce dipôle magnétostatique?

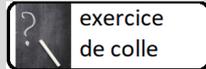
**2.c)** Quel est l'effet de l'interaction entre ce dipôle et le champ magnétique extérieur? Quelles sont les positions d'équilibre? Sont-elles stables ou instables?

Bien que les aimants aient été connus depuis l'Antiquité, ce sont les Chinois qui, vers l'an 1000 découvrirent l'existence du champ magnétique terrestre et l'utilisèrent pour s'orienter à l'aide de la boussole.

**2.d)** Expliquer le fonctionnement d'une boussole.

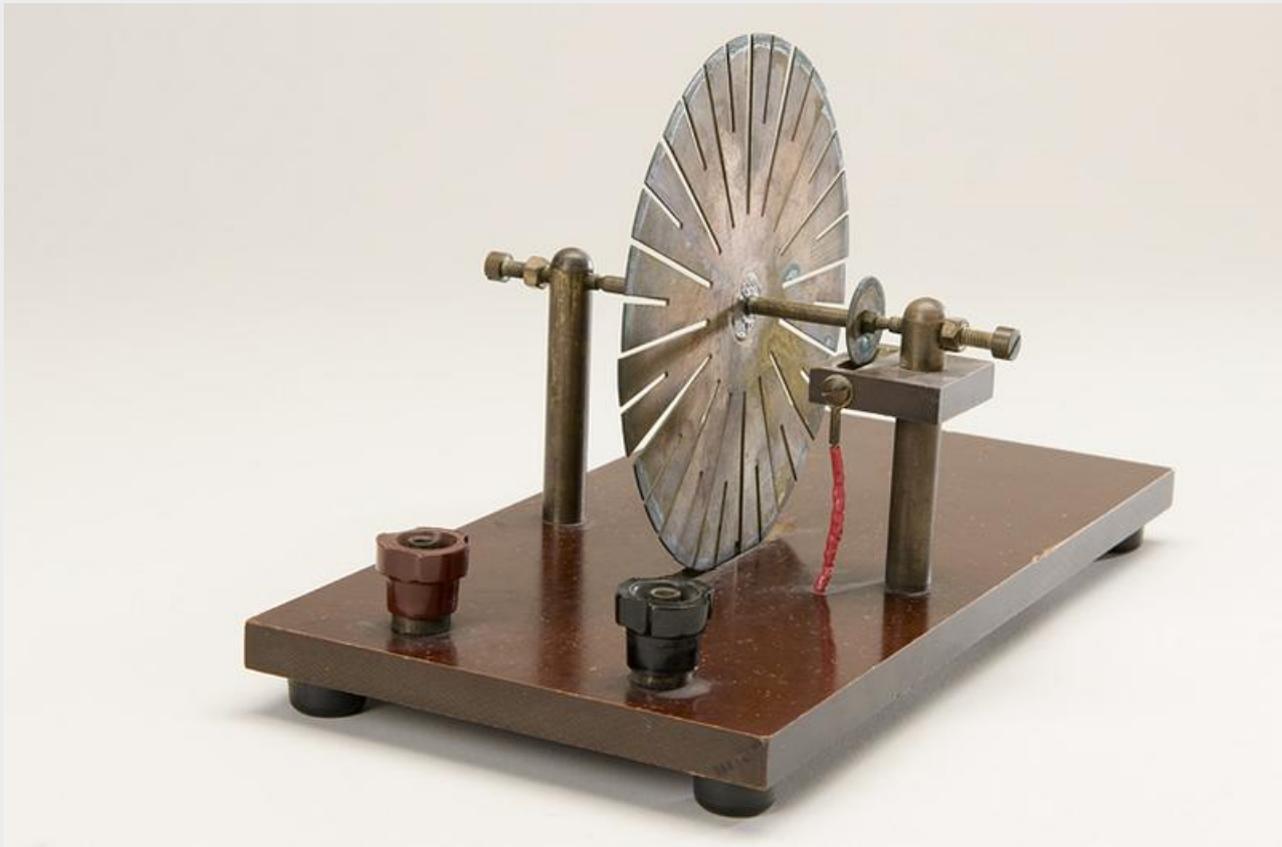
En fait, l'axe du dipôle magnétique terrestre n'est pas exactement confondu avec l'axe géographique de rotation de la Terre : les pôles magnétiques se trouvent actuellement à environ 1000 km des pôles géographiques (respectivement au Canada, en Terre Adélie). La différence angulaire entre la direction du nord géographique et celle indiquée par la boussole est appelée déclinaison magnétique, c'est un angle qui dépend du lieu où l'on se trouve. Pour connaître la déclinaison magnétique d'un lieu il suffit de se procurer une carte détaillée. Comme les positions des pôles magnétiques dérivent de 40 km par an, il importe de choisir une carte récente.

**2.e)** Faire un schéma de la Terre avec le dipôle magnétique (ses pôles nord et sud), les pôles géographiques et géomagnétiques, quelques lignes de champ magnétique ainsi qu'une boussole avec ses deux pôles.



exercice  
de colle

### Exercice 17.27 Roue de Barlow



Dispositif électromagnétique inventé en 1822 par le physicien anglais Peter Barlow (1776-1862) pour montrer l'action d'un champ magnétique sur un courant électrique, la roue de Barlow est une roue à rayons métalliques, ou un disque de cuivre, mobile autour d'un axe horizontal, placé entre les branches d'un aimant en fer à cheval, également horizontal. La partie inférieure de la périphérie de la roue trempe dans un bac à mercure.

La démonstration consiste à faire passer un courant électrique dans celui des rayons de la roue qui est vertical, en reliant l'axe de la roue et le bain de mercure à un générateur à courant continu ; l'effet observé est la mise en rotation de la roue. Tous ses rayons venant successivement au contact du bain de mercure, la roue se maintient en rotation continue.

On peut considérer que la roue de Barlow est une préfiguration du moteur électrique.

<https://www.universalis.fr/encyclopedie/roue-de-barlow/>

On s'intéresse à un disque conducteur de rayon  $r_0$ , d'épaisseur  $e$  qui peut tourner autour de son axe ( $Oz$ ) dans le référentiel  $R$  du sol (supposé galiléen).

Un contact glissant sur l'axe (en  $O$ ) et un autre sur la périphérie obtenu à l'aide d'une cuve à mercure, permettent de faire circuler un courant  $I$  dans le conducteur (orienté de  $O$  vers la périphérie).

On impose un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire  $\vec{B}_{ext} = B_{ext} \cdot \vec{u}_z$  (on négligera le champ magnétique propre du circuit électrique).

1) Intensité  $I$  :

1.a) Donner l'expression de l'intensité  $I$  à travers un cercle de rayon  $r < r_0$  grâce à une double intégrale de la densité de courant volumique  $\vec{j}$ .

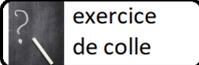
1.b) En déduire  $I$  en fonction d'une simple intégrale de la densité de courant volumique  $\vec{j}$  sur  $\theta$ .

2) Moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des forces de Laplace appliquées à la roue :

2.a) Exprimer  $\vec{M}_O$  sous forme d'une triple intégrale.

2.b) Calculer  $\vec{M}_O$  en fonction de  $B_{ext}$ ,  $I$  et  $r_0$ .

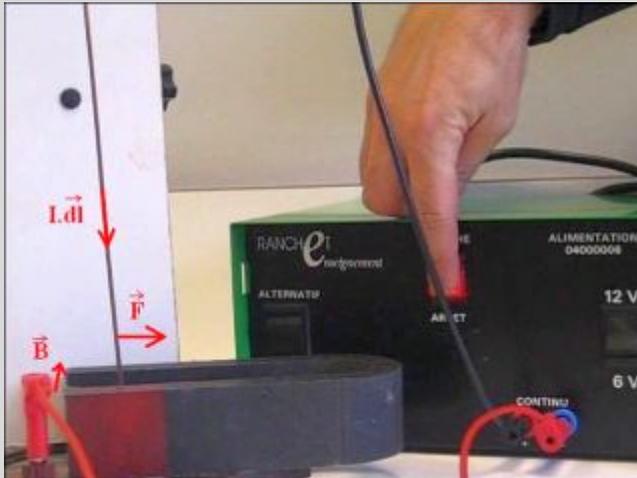
2.c)  $\vec{M}_O$  est-il indépendant de la topographie des lignes de courant ?



exercice  
de colle

### Exercice 17.28 Balance de Cotton

#### 1) Premier dispositif



Une tige conductrice homogène  $OA$  de longueur  $d = 10$  cm, de masse  $m = 50$  g est fixée en  $O$  dans le référentiel  $R$  du sol (supposé galiléen). Elle peut tourner parfaitement dans un plan vertical  $(xOy)$ , autour d'un axe horizontal  $(Oz)$ . Son extrémité mobile  $A$  affleure dans une cuve à mercure, ce qui permet le passage d'un courant stationnaire  $I = 1,0$  A orientée vers le bas.

On applique un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  uniforme et stationnaire avec  $B = 100$  mT (on négligera le champ magnétique propre du circuit électrique).

L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{u}_y$  avec  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>. On pose  $\theta = (-\vec{u}_y, \vec{OA})$ .

- 1.a) Exprimer le moment  $\vec{M}_O$  en  $O$  des forces de Laplace appliquées à  $OA$ .
- 1.b) Exprimer le moment  $\vec{M}'_O$  en  $O$  du poids de  $OA$  en fonction de  $\theta$ .
- 1.c) Calculer la position d'équilibre  $\theta_{eq}$  de la tige

#### 2) Balance de Cotton

La balance de Cotton permet de mesurer un champ magnétique uniforme et stationnaire.



Elle est constituée d'un fléau de deux bras accroché en un point  $O$  où il peut librement tourner.

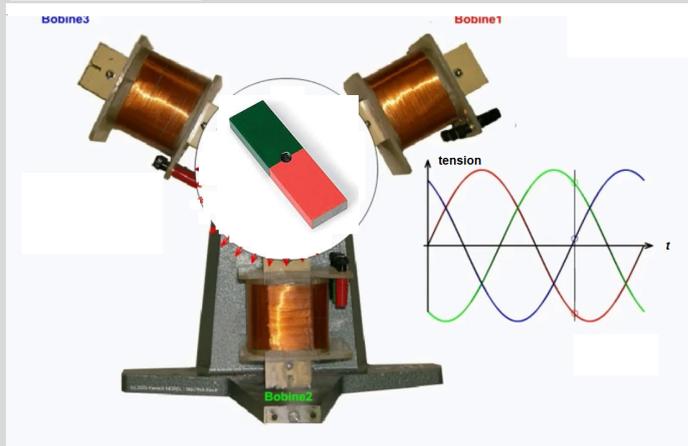
Au bout du premier bras  $OA$  (de longueur  $R_1 = 10$  cm) est suspendu un plateau sur lequel est posée une masse marquée  $m$ . L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \vec{u}_y$  avec  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>.

Au bout du second bras  $OB$  (de longueur  $R_2 = 30$  cm) se trouve un fil électrique rectiligne  $MN // OA$  de longueur  $d = 2,0$  cm  $\ll R_2$  parcouru par un courant  $I = 1,0$  A plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme est stationnaire qui lui est perpendiculaire.

- 2.a) Calculer numériquement  $B$  à l'équilibre ( $m = 2,0$  g).
- 2.b) Quelle est la sensibilité de la mesure lorsque les dimensions,  $m$  et  $I$  sont connues avec une précision relative de 1% et  $g$  avec une précision de 0,01% ?

exercice  
de colle

### Exercice 17.29 Principe du moteur synchrone



Dans un moteur synchrone triphasé, le stator est constitué de trois électroaimants alimentés par une source triphasée.

Le rotor se compose soit d'aimants permanents soit d'électroaimants (bobinage) alimentés par une source continue.

Sur ce type de moteur, le rotor tournera à la même vitesse que le champ tournant créé par les électroaimants.

#### 1) Etude du champ magnétique créé par le stator.

On suppose que chacune des bobines n° $k$  est un solénoïde infini d'axe  $\vec{u}_k$ , de rayon  $R$ , de nombre de spires par unité de longueur  $n$ , alimentée par une intensité  $I_k$  à l'instant  $t$ .

##### 1.a) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_k$ créé par une bobine.

L'alimentation des bobines, assimilées chacune à une résistance  $R$ , est effectuée en triphasé : la tension d'alimentation de chacune d'entre elles est sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ , de même amplitude  $U_0$ , déphasées entre elles de  $2\pi/3$  radians.

##### 1.b) Déterminer les intensités $I_k(t)$ .

Le stator est constitué de trois bobines placées de telle sorte que les axes font entre eux un angle de  $2\pi/3$  radians.

1.c) Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le stator est uniforme et tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \omega_0 \vec{u}_z$ .

On suppose que le rotor est un aimant cylindrique allongé qui peut tourner autour d'un axe  $(O, \vec{u}_z)$  passant par son centre et perpendiculaire à son moment magnétique  $\vec{M}$ .

#### 2) Etude préalable du couple :

##### 2.a) Calculer le couple $\vec{\Gamma}$ s'exerçant sur l'aimant en fonction de $M$ , $B$ et $\theta = (\vec{M}, \vec{B})$ .

##### 2.b) L'aimant étant immobile, quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ du couple qui s'exerce sur lui ?

#### 3) Etude du régime permanent :

L'aimant étant maintenant lancé à la vitesse angulaire  $\omega_0$ , il s'établit un régime permanent où les vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  font entre eux un angle  $\alpha = (\vec{M}, \vec{B})$  (positif si  $\vec{M}$  est en retard sur  $\vec{B}$ ).

##### 3.a) Exprimer le couple s'exerçant sur l'aimant en fonction de $M$ , $B$ et $\alpha$ .

##### 3.b) Dans quel cas est-il moteur ?

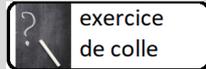
#### 4) Etude du régime permanent moteur :

Dans le fonctionnement comme moteur, le régime est stable si une petite augmentation du retard entraîne une augmentation du couple moteur.

##### 4.a) Dans quelles conditions le régime moteur est-il stable ?

##### 4.b) Calculer la valeur maximale du couple, $\Gamma_{max}$ , en fonction de $M$ et $B$ .

##### 4.c) Calculer la valeur maximale de la puissance $P_{max}$ , en fonction de $M$ , $B$ et $\omega_0$ .

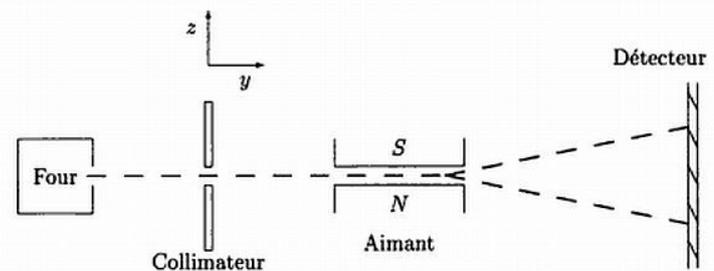


### Exercice 17.30 L'expérience de Stern et Gerlach

Le spin est associé à des particules, des atomes et des molécules. Il est apparenté au moment cinétique et au moment magnétique. Historiquement, le moment magnétique atomique a été révélé par l'expérience de Stern-Gerlach, que nous allons décrire schématiquement [...] En 1922, O. Stern et W. Gerlach ont mis au point une expérience visant à mesurer le moment magnétique d'atomes d'argent. Le dispositif expérimental est illustré, dans ses grandes lignes, aux figures 4.1 et 4.2, qui représentent deux coupes différentes de l'appareil.

Figure 4.1

Coupe de l'appareil de Stern-Gerlach dans le plan des faisceaux.



Les atomes d'argent émergent du four dans un vide poussé et le collimateur les filtre en un faisceau essentiellement filiforme. Ils passent ensuite entre les pôles de l'aimant. La configuration du champ magnétique est illustrée à la figure 4.2.

Entre les pôles de l'aimant, la force magnétique exercée sur l'atome est égale à

$$\vec{F} = \mu_z \vec{\nabla} (B_z) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{z}$$

Selon l'illustration de la figure 4.2, la dérivée suivant  $z$  de  $B_z$  est positive. L'atome d'argent sera donc dévié vers le haut si la composante  $\mu_z$  de son moment magnétique est positive, et vers le bas si  $\mu_z$  est négative.

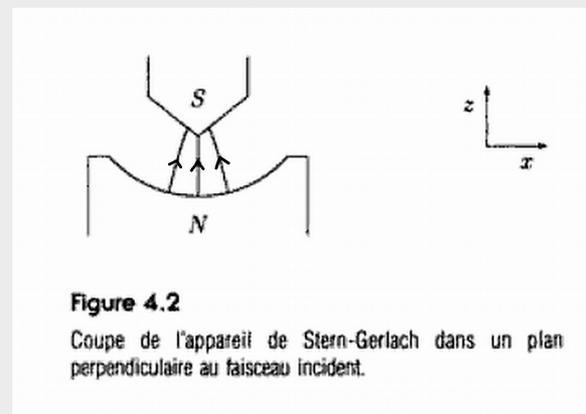


Figure 4.2

Coupe de l'appareil de Stern-Gerlach dans un plan perpendiculaire au faisceau incident.

D'un point de vue classique, on s'attend que les atomes d'argent émergent du four avec des moments magnétiques  $\vec{\mu}$  orientés dans toutes les directions. La composante  $\mu_z$  devrait donc prendre toutes les valeurs positives et négatives, dans un intervalle approprié. Par conséquent, les atomes d'argent du faisceau filiforme incident devraient, à la sortie de l'aimant, s'éparpiller le long d'une mince ligne sur le détecteur. Or, ce n'est pas ce que Stern et Gerlach ont observé. Le faisceau incident s'est plutôt séparé en deux faisceaux filiformes dirigés, respectivement, vers le haut et vers le bas du détecteur.

- 1) Etude du champ magnétique : justifier que " la dérivée suivant  $z$  de  $B_z$  est positive".
- 2) Etude mécanique

On s'intéresse à un atome d'argent de masse  $m$  et de moment magnétique  $\vec{\mu}$  qui passe en  $t = 0$  par le collimateur de coordonnées  $(0, 0, 0)$  avec une vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_y$ .

A  $t = t_0$ , l'atome d'argent pénètre dans l'entrefer de longueur  $\ell$ , qu'il quitte à la date  $t_1$ . On supposera que  $t_1 - t_0$  est suffisamment court pour que  $|v_z| \ll v_0$ .

L'atome d'argent atteint ensuite le détecteur, situé à une distance  $d$  de l'entrefer, à la date  $t_2$

2.a) Déterminer, grâce au texte, les équations paramétriques du mouvement dans l'entrefer.

2.b) Faire de même entre l'entrefer et le détecteur.

2.c) En déduire que la coordonnée  $z$  de l'atome sur le détecteur est proportionnelle à  $\mu_z$ . On donnera le facteur de proportionnalité en fonction de  $m$ ,  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ ,  $\ell$ ,  $d$  et  $v_0$ .

- 3) Conclusion de l'expérience

On admet que le moment magnétique  $\vec{\mu}$  des particules est proportionnel à leur moment cinétique  $\vec{\sigma}$  :  $\vec{\mu} = \gamma \vec{\sigma}$ , où  $\gamma$  est le "rapport gyromagnétique". En particulier pour des atomes d'argent, de "spin"  $1/2$ ,  $\sigma_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ .

3.a) Vérifier que la constante de Planck a la même dimension qu'un moment cinétique.

3.b) En quoi l'expérience de Stern et Gerlach montre que la projection de "spin" est quantifiée ?