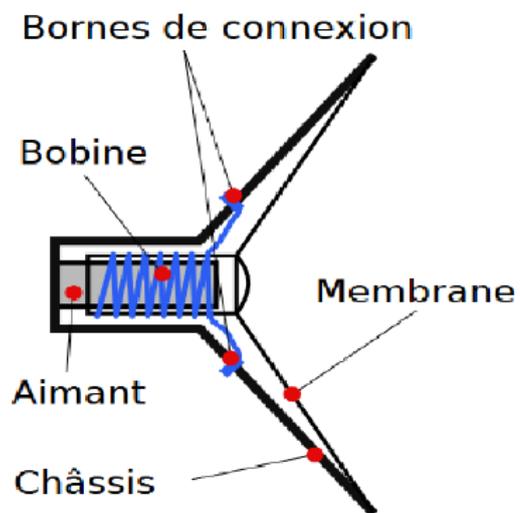
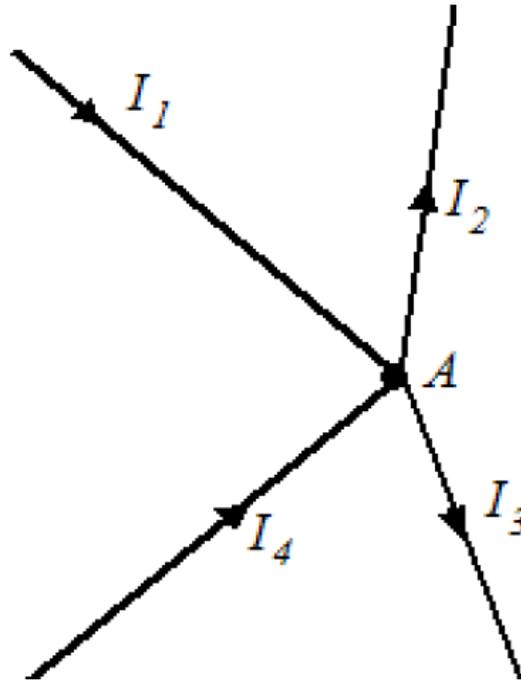
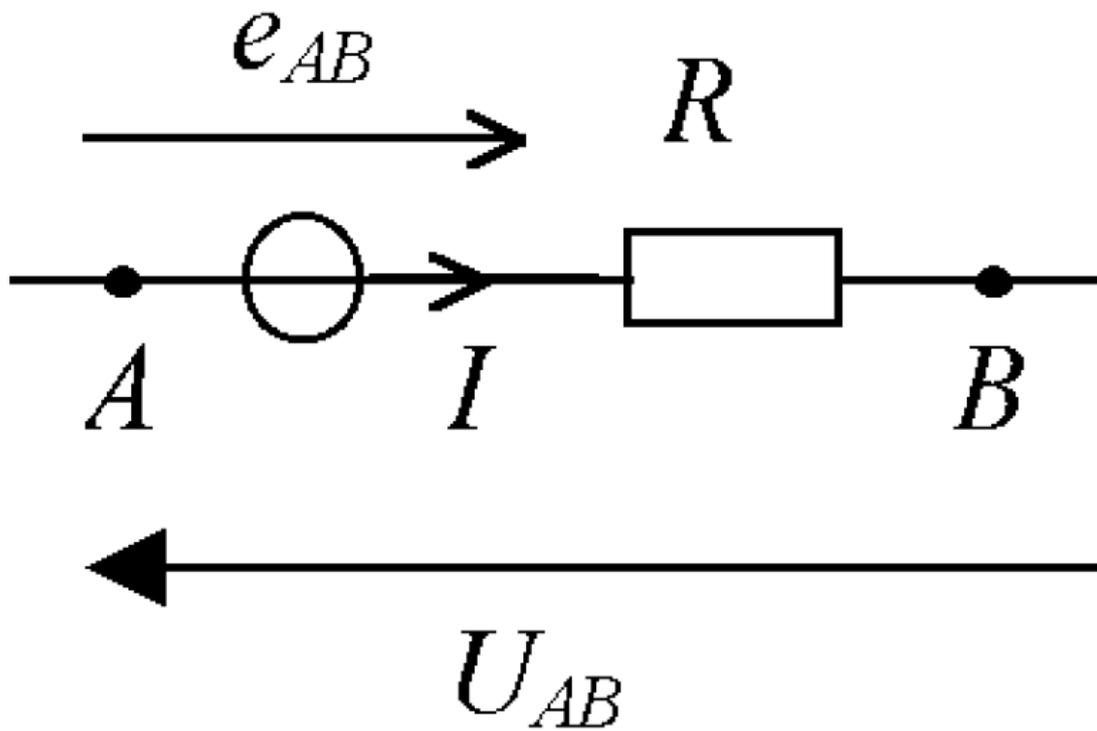


# Comment fonctionne un haut-parleur?

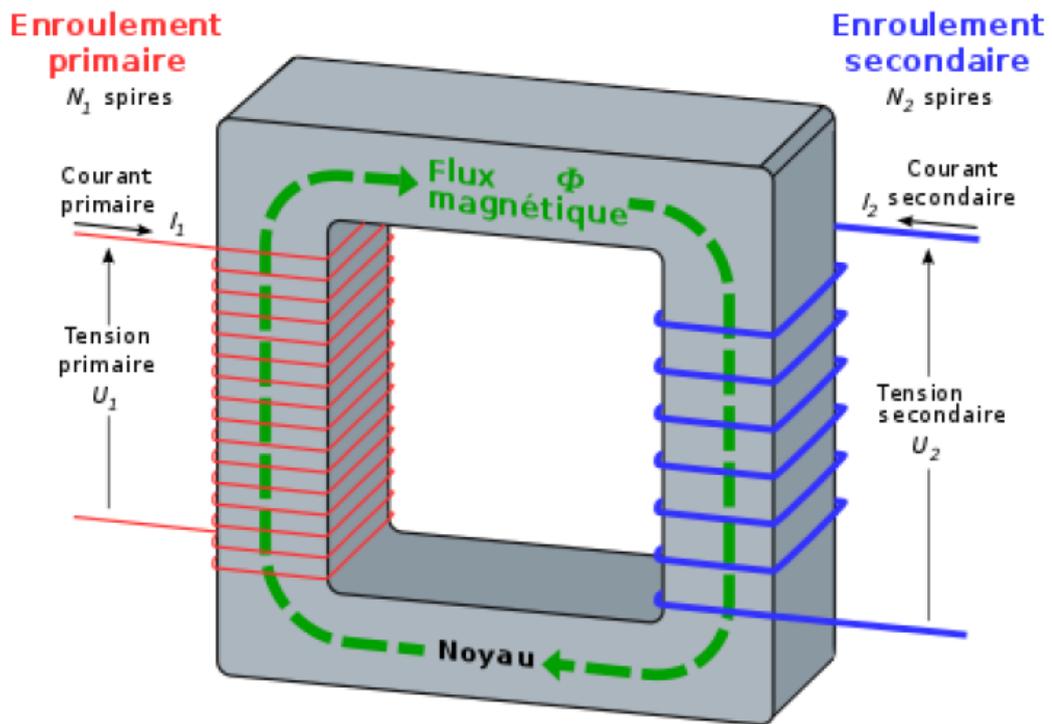


► **écrire les lois de l'électromagnétisme dans l'ARQS**



**► modéliser un conducteur dans l'ARQS**

## ► lister des applications de l'induction



# Électromagnétisme dans l'ARQS

## Les points du cours à connaître

### I- Lois générales de l'électromagnétisme

#### 1. Conservation de la charge

##### 1 Densités volumiques de charge et de courant déduites des caractéristiques des porteurs de charge *théorème*

Dans  $d^3\tau$ , il y a  $n_k \cdot d^3\tau$  particules de type  $k$ .  $\Rightarrow$

Si les particules de type  $k$  de densité  $n_k$  ont une charge  $q_k$  et une vitesse  $\vec{v}_k$ , alors

$$\rho = \sum_k n_k q_k \text{ et } \vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

##### 2 Equation locale de conservation de la charge *théorème*

pour un système (volume  $V$ ) fermé, c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique  $Q = \iiint_{M \in V} \rho(M) \cdot d^3\tau$  varie à cause du courant  $I$  qui traverse la surface fermée qui délimite le volume  $V$

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\tau = - \oiint \vec{j} \cdot d^2\Sigma = - \iiint \operatorname{div} \vec{j} \cdot d^3\tau$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j}) = 0$$

#### 2. Lois générales de l'électromagnétisme

##### Les charges et courants, sources du champ électromagnétique *animation*

La figure 1 représente l'unification de l'électricité et du magnétisme dans un même formalisme par Maxwell en 1862. Comment charges et courants génèrent les champs électrique et magnétique ?.

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

##### Equations de Maxwell *définition*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“Maxwell flux”} : \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{“Maxwell Gauss”} : \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{“Maxwell Faraday”} : \operatorname{rot} (\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{“Maxwell Ampère”} : \operatorname{rot} (\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

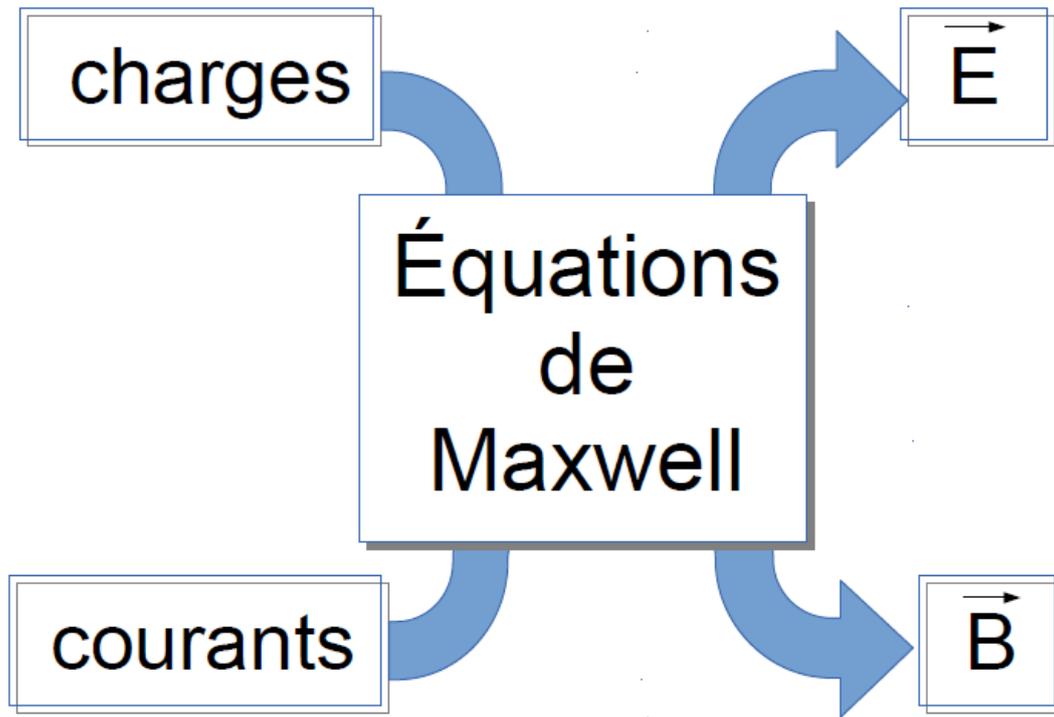


FIGURE 1 – Les charges et courants, sources du champ électromagnétique

✪ **Constantes fondamentales de l'électromagnétisme** *s'y retrouver*  
avec :

- Permittivité du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

👁 **L'action du champ électromagnétique sur les charges et courants** *animation*

La figure 2 représente les champs électrique et magnétique qui influent sur les charges et courants..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

🔪 **3 Bilan énergétique électromagnétique** *théorème*

⇒

Du fait de l'existence d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ ,

- un volume  $V$  a une énergie électromagnétique  $E_{em} = \iiint e_{em} \text{ d}^3\tau$
- avec l'énergie volumique  $e_{em}(M) = \frac{\varepsilon_0 E(M)^2}{2} + \frac{B(M)^2}{2\mu_0}$  (en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

Le bilan énergétique s'écrit

- pour le volume  $V$  :  $-\frac{\text{d}E_{em}}{\text{d}t} = P_r + P_d$

- et, localement,  $-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$   
avec

- la puissance rayonnée  $P_r = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{\text{d}}^2\Sigma$ , flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  (en

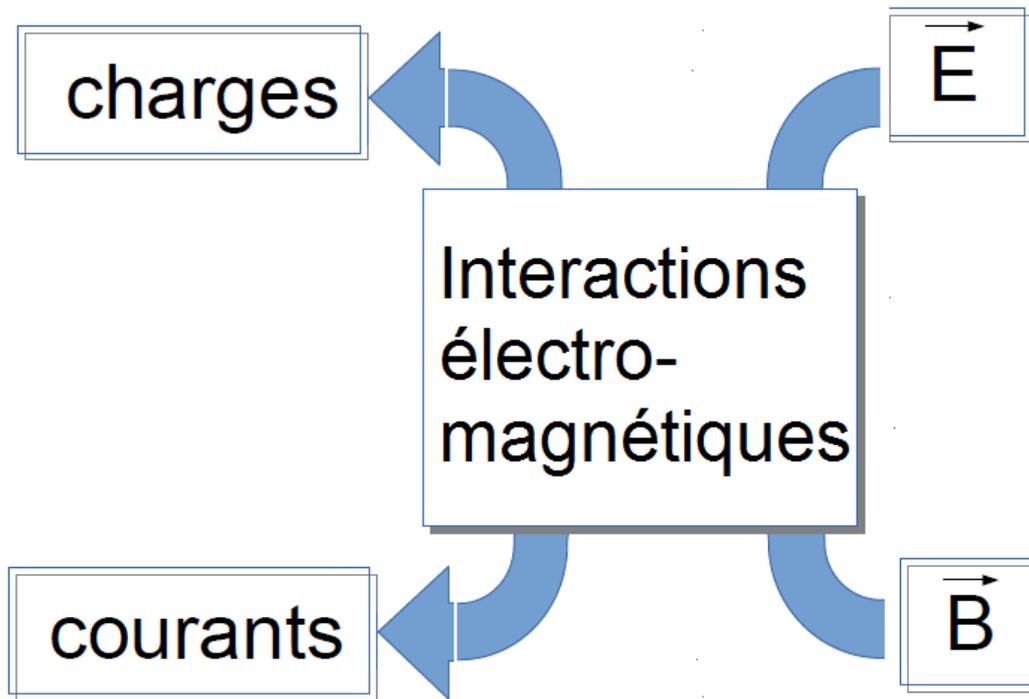


FIGURE 2 – L'action du champ électromagnétique sur les charges et courants

$W \cdot m^{-2}$ ),

- et la puissance dissipée  $P_d = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3\tau$ , due à l'effet Joule.

### 3. Cas des régimes lentement variables



#### Approximation des Régimes Quasi Stationnaires *définition*

Tout régime sinusoïdal de longueur d'onde  $\lambda$  vérifiera l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) si et seulement

$$D \ll \lambda$$

où  $D$  est la taille caractéristique du dispositif.



#### ARQS et comportement ondulatoire *s'y retrouver*

Il s'agit de négliger les phénomènes ondulatoires : dans l'ARQS, les ondes électromagnétiques, à l'instant  $t$ , se trouvent dans le même état d'onde quel que soit le point  $M$  (défini par le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ) :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \approx \psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = \psi(t)$$

Négliger la propagation par rapport à la variation temporelle revient à  $\vec{k} \cdot \vec{r} \approx 0 \Leftrightarrow \frac{r}{\lambda} \approx 0 \Leftrightarrow r \ll \lambda$  pour tout  $r$  du dispositif. Or  $r \leq D$ .

✳ **L'ARQS est un régime de basse fréquence** *s'y retrouver*

L'Approximation des

Régimes

Quasi

Stationnaires

(ou **ARQP** : approximation des régimes quasi - permanents).

consiste à se placer dans un régime périodique de pulsation  $\omega$  très faible. Tout se passe presque comme en régime permanent, quand  $\omega = 0$ , sauf que le régime est variable.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$$

Le régime sinusoïdal de longueur d'onde  $\lambda$  a, dans le vide, une pulsation  $\omega$  (et une fréquence  $\nu$ ) telles que :

$$\nu \ll \frac{c}{D}$$

L'ARQS est donc l'ensemble des régimes de suffisamment basse fréquence.

Dans la vie courante, l'utilisation d'un montage électrique sur une paillasse de taille  $D \sim 1m$  donne :  $\nu \ll 3 \times 10^8$  Hz . Ainsi, l'utilisation d'un générateur basses fréquences ("génÉBF", qui délivre des signaux électriques de fréquences inférieures à 5 MHz) nous place dans l'ARQS.

## II- Conducteurs dans l'ARQS

### 1. Conducteur en régime permanent

✳ **Actions subies par les électrons libres d'un conducteur ohmique** *s'y retrouver*

Les électrons libres dans un métal fixe subissent :

- l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau fixe (les ions) sous la forme d'une force phénoménologique de la forme  $\frac{-m\vec{v}}{\tau}$  où  $\tau$  est le temps caractéristique de relaxation des électrons ;
- l'action du champ électromagnétique sous la forme de la force de Lorentz :  $-e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$ , la partie magnétique étant bien souvent négligeable pour une onde car alors  $\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$ , avec  $v \ll c$ .

 **Loi d'Ohm locale** *définition*

Un conducteur en magnétostatique plongé dans un champ électrique  $\vec{E}_0$  suit la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du métal (en  $S \cdot m^{-1}$ ).

✳ **Interprétation électrique de la puissance dissipée** *s'y retrouver*

On peut associer :

- la puissance transférée du champ électromagnétique à la matière par des forces de Lorentz en électromagnétisme,

- et la puissance dissipée par effet Joule en électricité.

### 👁 Effet Hall *animation*

La figure 3 représente l'effet de l'application d'un champ magnétique perpendiculairement à la plus grande face d'une plaquette dans laquelle circule un courant..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

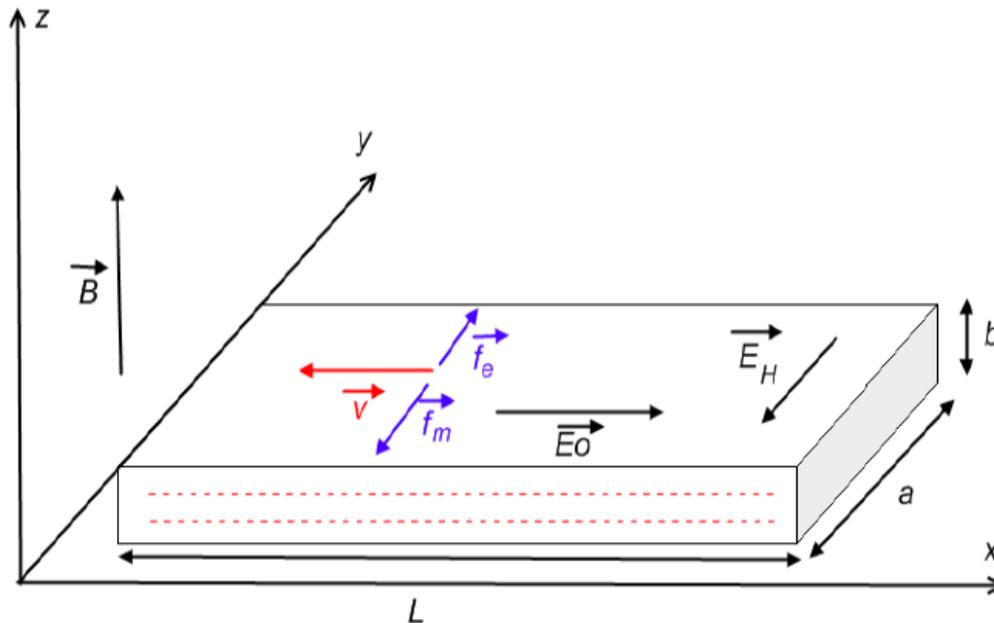


FIGURE 3 – Effet Hall

### ⊛ Loi de l'effet Hall *s'y retrouver*

Entre les bords d'une plaquette de Hall parcourue par un courant  $I$  plongée dans un champ magnétique  $B$  existe une tension de Hall

$$U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot b} = R_H \frac{I \cdot B}{b} \quad \text{avec la constante de Hall : } R_H = \frac{1}{n \cdot e}$$

La constante de Hall des conducteurs est très faible, par contre celle des semi-conducteur est plus grande. Aussi, on utilise des sondes de Hall formée d'une plaquette de semi-conducteur qui permet, par la mesure de la tension de Hall, de déduire le champ magnétique.

## 2. Lois suivies par les conducteurs dans l'ARQS

### 🔪 4 Conducteur dans l'ARQS *théorème*

La loi de conservation locale de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  devient dans les conducteurs

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho$$

d'après l'équation de Maxwell Gauss. Aussi, tout excès (ou défaut) de charge initial  $\rho_0$

va relaxer avec un temps caractéristique  $\theta = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \sim 10^{-18} s \ll T$ , la période du régime dans l'ARQS.

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} \Rightarrow \rho \simeq 0$$

On voit donc que la charge des conducteurs dans l'ARQS est quasiment nulle. La loi de conservation locale de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  devient dans les conducteurs dans l'ARQS  $\text{div}(\vec{j}) \approx 0$ , ce qui impose la conservation du flux de  $\vec{j}$  sur un tube de  $\vec{j}$  (un fil électrique).

Les courants de déplacement sont

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \Rightarrow \|\vec{j}_D\| \sim \|\vec{j}\| \frac{\theta}{T} \ll \|\vec{j}\|$$

$\Rightarrow$

Dans les conducteurs dans l'ARQS,

- $\rho \approx 0$
- la loi des nœuds est vérifiée ;
- $I = cste$  dans une branche électrique,
- les courants de déplacement sont négligeables devant les courants électriques :

$$\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\| \Rightarrow \text{rot}(\vec{B}) \approx \mu_0 \vec{j}$$

### ✪ Champs magnétiques dans l'ARQS *s'y retrouver*

On pourra étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire au cas de l'ARQS : toutes les expressions de  $\vec{B}$  obtenues en magnétostatique restent valables dans l'ARQS en remplaçant l'intensité  $i$  par  $i(t)$ .

Le fait que  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \vec{j}$  fait que l'on appelle ce régime "ARQS magnétique".

## 3. Induction dans un circuit électrique

### 👁️ Equivalent du conducteur filiforme en électrocinétique *schéma*

La figure 4 représente la modélisation d'un fil électrique. On pourra remplacer dans tout circuit un conducteur filiforme par son équivalent en électrocinétique, c'est à dire un conducteur ohmique en série avec un générateur parfait de tension.

### ♥ Loi de Faraday *à retenir*

soit un circuit  $C$  orienté. La force électromotrice ("fém") d'induction qui correspond à ce circuit filiforme, orientée dans le sens de  $C$  est :

$$e_{em} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{où} \quad \phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

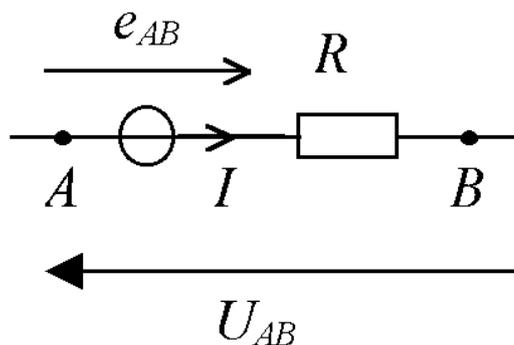


FIGURE 4 – Equivalent du conducteur filiforme en électrocinétique

est le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  qui s'appuie sur le contour fermé orienté  $C$  et qui est orientée par lui.



### Loi de Lenz à retenir

L'effet des courants induits (c'est à dire le champ magnétique qu'ils créent) s'oppose à la cause qui leur a donné naissance (c'est à dire aux variations du champ magnétique inducteur).

La loi de Lenz est une loi de modération (il y a rétroaction négative).

## III- Applications de l'induction



### Principe de l'alternateur : vidéo

pour induire une différence de potentiel (et un courant), il suffit de faire varier le flux du champ magnétique à travers une bobine. Pour cela, deux possibilités :

- soit on fait tourner l'aimant permanent (qui est le rotor), la bobine restant fixe (c'est le stator), on est alors dans le cas de l'induction de Neumann ;
- soit on garde fixe l'aimant permanent (qui est cette fois-ci le stator), et on fait tourner dans son voisinage la bobine (qui est alors le rotor), et on se trouve dans un cas d'induction de Lorentz.

Dans les deux cas, l'énergie cinétique d'un axe (le rotor) est convertie en travail électrique : l'alternateur est un convertisseur électromécanique.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



### Circuits couplés s'y retrouver

On considère deux circuits filiformes orientés ( $C_1$  et  $C_2$ ), parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ .

**Inductance mutuelle** *définition*

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

L'inductance mutuelle  $M$  qui s'exprime en henrys (H) elle est positive ou négative suivant les conventions d'orientation des deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ .

**Inductance propre** *définition*

$$\phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$$

L'inductance  $L$ , s'exprime en henry (H), elle est toujours positive, et elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des circuits (pas des conventions d'orientation).

**Coefficient de couplage** : *s'y retrouver*

on peut poser la grandeur sans dimension :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

( $k \in [0; 1]$ )

Cas du couplage nul : il n'y a aucun couplage entre deux circuits si  $k = 0$ , c'est à dire si leur inductance mutuelle est nulle ( $M = 0$ ). C'est le cas par exemple une bobine est suffisamment éloignée de l'autre pour ne pas ressentir le champ magnétique créé par celle-ci.

Cas du couplage optimal : le couplage optimal, au contraire est obtenu pour un coefficient de couplage maximal ( $k = 1$ ), ce qui demande que tout le champ magnétique créé par une bobine intervienne dans le flux de l'autre. En pratique, pour réaliser cela, on utilise un noyau de fer doux autour duquel on réalise les deux bobinages. Les propriétés ferromagnétiques du fer font que la quasi-totalité du champ magnétique est alors dans le noyau.

**Auto-induction** *s'y retrouver*

une bobine ("self" ou "auto-induction", ou encore "induction") parcourue par un courant  $i$  peut être assimilée à un circuit filiforme orienté  $C$ .

Si d'autres bobines interviennent, on supposera leur mutuelle nulle, afin de n'avoir à considérer que l'inductance propre.

**Continuité du courant dans une bobine** : *s'y retrouver*

La continuité temporelle de l'énergie assure la continuité du courant  $i$  dans la bobine.

**"Inertie" du courant à cause de la présence d'une bobine : vidéo**

L'énergie emmagasinée dans une bobine peut être mise en évidence par le flash envoyé par une diode électroluminescente après que le générateur qui alimentait cette bobine soit mis hors fonction.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**remarque**

Il ne faut donc jamais mettre un interrupteur dans la même maille qu'une bobine au risque de créer des étincelles.

**Caractéristiques techniques d'une bobine**

pour avoir une inductance  $L$  respectable, on a tout intérêt à réaliser de nombreux bobinages (c'est à dire augmenter  $N$ ).

D'autre part, l'introduction d'un noyau de fer doux aura pour conséquence de multiplier la valeur de la perméabilité du vide  $\mu_0$  par la perméabilité magnétique relative de ce matériau, très élevée.

**Exemples de perméabilités magnétiques relatives**

Le tableau 1 présente quelques valeur de perméabilités relatives.

Matériau	Cobalt	Fer	Mu-métal	Nickel
$\mu_r$	250	10000	10000	600

TABLE 1 – Perméabilité magnétiques relatives (maximales) de quelques matériaux ferromagnétiques à 20°C

**Caractéristiques techniques d'un transformateur**



Un transformateur est réalisé par le bobinage de deux circuits filiformes orientés autour

d'un cadre de fer doux qui canalise -presque- tout le champ magnétique. Ce noyau de fer est bien souvent feuilleté afin d'éviter les courants de Foucault en son sein (et donc les "pertes fer").



### Transformateur idéal *s'y retrouver*

Si les résistances du primaire (indiqué 1) et du secondaire (indiqué 2) sont nulles :  $R_1 = R_2 = 0$

et si tout le champ magnétique est canalisé par le noyau de fer doux :

$$\phi_{\rightarrow 1} = N_1 \phi \text{ et } \phi_{\rightarrow 2} = N_2 \phi$$

où  $\phi$  est le flux du champ magnétique à travers une unique spire n'importe où autour du cadre de fer doux,

alors les tensions ( $u_1$  et  $u_2$ ) et intensités ( $i_1$  et  $i_2$ ) suivent

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \text{ et } \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$$



### Schéma de distribution du courant. *schéma*

La figure 5 représente un bon et un mauvais schéma de distribution du courant. Supposons en effet que EDF distribue l'électricité simplement, depuis la centrale électrique jusqu'à l'utilisateur (simulé par une résistance  $R_u$ ) avec des fils électriques (pris en compte par une résistance  $R_f$ ).

La puissance dissipée par effet Joule dans les fils est  $P_f = R_f \cdot i_u^2$ , où  $i_u$  est l'intensité distribuée à l'utilisateur. Cette puissance dissipée dans les fil serait de l'ordre de grandeur de celle récupérée par l'utilisateur.

De surcroît, la chute ohmique  $u_f$  serait telle que la tension récupérée par l'utilisateur  $u_u$  serait différente de celle donnée par la centrale  $u_c$ .

En fait, EDF élève la tension grâce à plusieurs transformateurs élévateurs (le schéma de la figure ?? pour plus de clarté n'en présente qu'un) avant d'acheminer sur ses lignes ( $R_f$ ) la puissance électrique, puis distribue au consommateur après une diminution de la tension grâce à des transformateurs abaisseurs.

Ainsi, la puissance dissipée par effet Joule dans les fils est maintenant négligeable devant celle récupérée par l'utilisateur. De plus, la chute ohmique est négligeable :  $u_f' \approx 0$  ( $i_f' \approx 0$ ).

Ainsi, la tension récupérée par l'utilisateur  $u_u'$  est quasiment celle donnée par la centrale  $u_c$  (soit 220V efficaces).

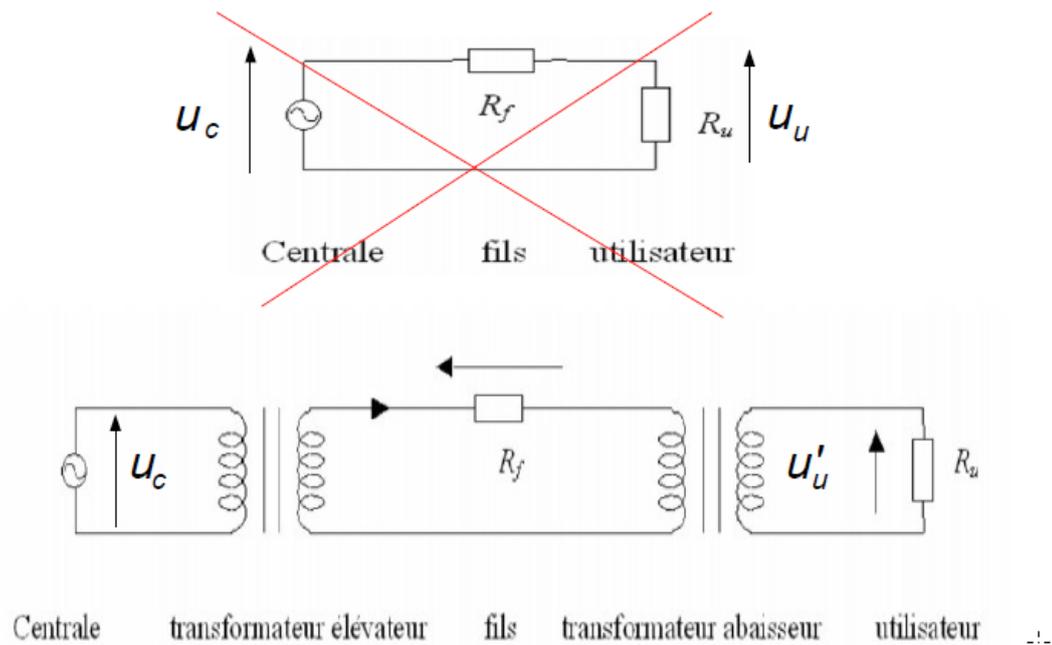


FIGURE 5 – Schéma de distribution du courant.



## Valeurs numériques (compléments) Électromagnétisme dans l'ARQS

### Conducteurs dans l'ARQS

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$  avec une conductivité électrique  $\gamma \approx 10^7 - 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

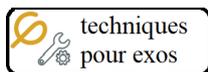
La densité d'électrons est typiquement  $n_e \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

Dans l'ARQS :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \vec{j}$  avec  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Tout excès (ou défaut) de charge initial  $\rho_0$  va relaxer avec un temps caractéristique  $\theta = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \sim 10^{-18} \text{ s}$

### Matériaux ferromagnétiques

Perméabilité magnétiques relatives des matériaux ferromagnétiques :  $\mu_r \approx 10^2 - 10^4$ .



**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

**Courants de Foucault**

On veut déterminer  $\vec{E}$  tel que  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  connaissant  $\vec{B}$ .

Il y aura des courants induits  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  dans conducteur (courants de Foucault).

**Détermination des symétries**

Il faut déterminer les invariances et les plans de symétrie et d'antisymétrie des causes  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (c'est-à-dire celles de  $\vec{B}$ ).

Les conséquences ( $\vec{E}$ ) :

- ont les mêmes invariances que celles de  $\vec{B}$ ,
- sont orthogonales aux plans de symétrie de  $\vec{B}$ ,
- sont dans les plans d'antisymétrie de  $\vec{B}$ .

**Théorème de Faraday**

On détermine un contour fermé orienté  $\mathcal{C}$  qui vérifie les symétries, sur lequel s'appuie une surface  $S$ .

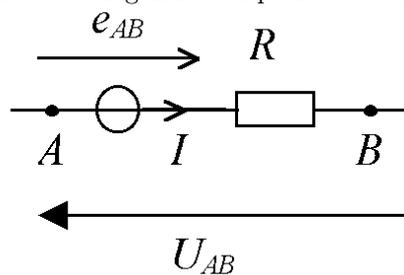
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

**Courants induits dans des fils**

S'il existe un fil électrique (contour fermé  $\mathcal{C}$ ) alors il y aura des courants induits  $I$  avec une fém d'induction  $e_{AB}$ .

**Modélisation du fil électrique**

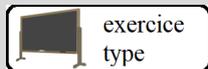
On pourra remplacer dans tout circuit un conducteur filiforme par son équivalent en électrocinétique, c'est à dire un conducteur ohmique en série avec un générateur parfait de tension :



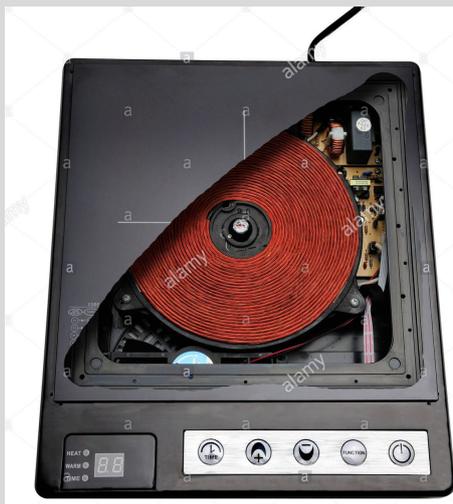
**Théorème de Faraday**

Sur le contour fermé orienté  $\mathcal{C}$  sur lequel s'appuie une surface  $S$  :

$$e_{AB} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$



**Exercice 18.1** (le prof fait cet exercice type jeudi)  
**Induction**



On place, dans un champ magnétique uniforme et dépendant du temps  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$ , une poêle cylindrique d'axe ( $Oz$ ) de rayon  $a$ , d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\gamma$ .

- 1) Exprimer la puissance moyenne dissipée  $\langle P_d \rangle$  dans la poêle en fonction de son volume  $V$ .

1) On s'intéresse à une spire (fictive) circulaire, de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ , d'épaisseur  $e$ , donc de section  $e dr$ . Sa résistance est  $R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{2\pi r}{\gamma e dr}$ .

La loi de Faraday donne :

$$e_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B(t)) = \pi r^2 B_0 \omega \cos(\omega t)$$

Comme  $e_{em} + Ri = 0$ ,  $i = \frac{e_{em}}{R}$  et la puissance dissipée dans cette spire est

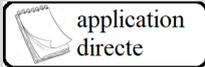
$$dP_d = Ri^2 = \frac{e_{em}^2}{R} = \frac{\gamma e dr}{2\pi r} (\pi r^2 B_0 \omega \cos(\omega t))^2 = \frac{\gamma e dr}{2} \pi r^3 B_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

La puissance totale est

$$P_d = \int_{r=0}^{r=a} dP_d = \frac{\gamma e}{2} \pi B_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \int_{r=0}^{r=a} r^3 dr = \frac{\gamma \pi a^4 e \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)}{8}$$

Comme  $V = \pi e a^2$  et  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ ,

$$\langle P_d \rangle = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 a^2 V}{16}$$



**Exercice 18.2** pour s'entraîner

### Courants de Foucault dans un cylindre conducteur

On se place dans un repère cylindrique d'axe  $(Oz)$ .

Un conducteur cylindrique en cuivre (de conductivité  $\gamma = 58.10^6 S.m^{-1}$ ), d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R = 20cm$  et de longueur  $L = 50cm$  est placé dans un champ magnétique homogène mais variable

$$\vec{B} = B_0 \cdot \cos(\omega.t) \cdot \vec{u}_z$$

où  $B_0 = 1,0T$  et  $\omega = 2.\pi.\nu$ , avec  $\nu = 50Hz$ .

- 1) Donner l'expression des courants de Foucault  $\vec{j}$  induits dans le conducteur.
- 2) En déduire la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  dissipée par effet Joule dans le cylindre.

$$1) \vec{j} = \frac{\gamma}{2} \omega \cdot B_0 \cdot r \cdot \sin(\omega.t) \cdot \vec{u}_\theta.$$

$$2) \langle P \rangle = \frac{\gamma}{8} \omega^2 \cdot B_0^2 \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2.\pi.L = \frac{\pi^3 \cdot \nu^2 \cdot B_0^2 \cdot R^4 \cdot L \cdot \gamma}{4} = 9,0.10^8 W.$$



**Exercice 18.3** pour s'entraîner

### Cylindre conducteur creux en rotation dans un champ magnétique

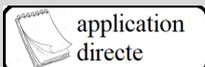
Soit un conducteur métallique (de conductivité  $\gamma = 58.10^6 S.m^{-1}$ ), cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R = 15,0cm$ , creux (d'épaisseur  $a = 1,0mm \ll R$ ).

On fait tourner ce cylindre autour de son axe, à la vitesse angulaire  $\omega = 10rad.s^{-1}$  dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$  avec  $B_a = 10mT$ .

1) Quelle est la f.e.m.  $e$  qui apparait entre les faces intérieure et extérieure du cylindre? Application numérique.

A.N :  $B = 0,1T$  ;  $R = 5cm$  ;  $a = 1mm$  et le cylindre effectue 240 tours par minute.

$$1) e = R.\omega.B_a.a = 0,45V.$$



**Exercice 18.4** pour s'entraîner

### Cadre tournant dans un champ magnétique homogène et permanent

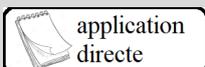
Soit un champ magnétique homogène et permanent  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ .

On s'intéresse à un cadre conducteur rectangulaire  $ABCD$ . Les longueurs de ses côtés sont  $a$  suivant  $AD$  et  $BC$  et  $b$  suivant  $AB$  et  $CD$ . Ce cadre tourne autour de l'axe  $AD = (Ox)$ . On repère sa rotation par l'angle  $\theta = (\vec{u}_z, AB)$ .

1) Calculer la f.e.m. induite dans le cadre.

1) On calcule la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ , avec  $\phi = B_0 \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$ .  
Soit :

$$e = -\frac{d\theta}{dt} B_0 \cdot a \cdot b \cdot \cos \theta$$



**Exercice 18.5** pour s'entraîner

### Cadre fixe dans un champ magnétique homogène et variable

Soit un champ magnétique homogène et variable  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega.t) \cdot \vec{u}_z$ .

On s'intéresse à un cadre conducteur rectangulaire  $ABCD$  dans le plan  $(xOy)$ . Les longueurs de ses côtés sont  $a$  suivant  $AD$  et  $BC$  et  $b$  suivant  $AB$  et  $CD$ .

1) Calculer la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant.

1) On calcule la f.e.m. induite dans le cadre en utilisant la loi de Faraday :  $e = -\frac{d}{dt}\phi$ , avec  $\phi = B_0 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . Soit :

$$e = \omega \cdot B_0 \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



**Exercice 18.6** pour s'entraîner

### Déplacement d'une barre conductrice sur deux rails conducteurs concourants

On se place dans un repère cartésien orthogonal direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $\vec{u}_z$  vers le haut.

Deux tiges conductrices  $OA$  et  $OA'$  sont placées dans un plan horizontal; elles ont pour médiatrice l'axe  $(Ox)$  et font un angle  $\alpha = (\vec{OA}, \vec{u}_x) = (\vec{u}_x, \vec{OA}')$  avec lui.

On déplace une barre conductrice parallèlement à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$ , avec  $v_0 > 0$ . Cette barre est en contact avec la tige  $OA$  (respectivement  $OA'$ ) en  $B$  (respectivement en  $B'$ ). A  $t = 0$ ,  $B = B' = O$ .

1) Exprimer, à l'instant  $t$ , en fonction de  $\alpha$  et  $v_0$  :

1.a) la circonférence  $C(t)$  du circuit ;

1.b) l'aire  $S(t)$  du circuit.

Les conducteurs composant le circuit ont une résistance linéique  $R_l$ . Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical, uniforme et constant  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$ , avec  $B_a > 0$ .

2) Exprimer, en fonction de  $B_a$ ,  $v_0$ ,  $R_l$  et de  $\alpha$  :

2.a) la valeur absolue de la f.e.m  $|e(t)|$  qui apparaît dans le circuit ;

2.b) la valeur absolue de l'intensité  $|i(t)|$  qui circule dans le circuit.

1) Circuit :

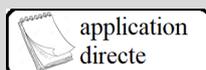
1.a) circonférence  $C(t) = 2 \cdot v_0 \cdot t \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$  ;

1.b) aire  $S(t) = (v_0 \cdot t)^2 \cdot \tan \alpha$ .

2) Induction :

2.a) f.e.m  $|e(t)| = 2 \cdot v_0^2 \cdot B_a \cdot \tan(\alpha) \cdot t$  ;

2.b) intensité  $|i(t)| = \frac{v_0 \cdot B_a}{R_l} \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ .



**Exercice 18.7** pour s'entraîner

### Déplacement d'une barre conductrice sur deux rails conducteurs parallèles

On se place dans un repère cartésien orthogonal direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $\vec{u}_z$  vers le haut.

Deux tiges conductrices  $AB$  et  $A'B'$  sont placées parallèlement ( $AB // A'B' // (Ox)$ ) dans un plan horizontal; elles sont distantes de  $AA' = 15cm$ .

On déplace une barre conductrice  $CC'$  qui reste parallèle à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$ , avec  $v_0 = 50cm \cdot s^{-1}$ .

Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical, uniforme et constant  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$ , avec  $B_a = 0,10T$ .

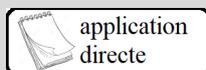
1) Quelle est la f.e.m  $e$  qui apparaît entre  $A$  et  $A'$  ?

Entre  $A$  et  $A'$  se trouve un conducteur ohmique, de résistance  $R = 1,0k\Omega$  (la résistance des tiges étant négligeable).

2) Quelle est la puissance  $P$  dissipée par ce résistor ?

1)  $|e| = v_0 \cdot B_a \cdot AA' = 7,5mV$ .

2)  $P = \frac{e^2}{R} = \frac{(v_0 \cdot B_a \cdot AA')^2}{R} = 56nW$ .



**Exercice 18.8** pour s'entraîner

### Transformateur abaisseur de tension

On s'intéresse à un transformateur supposé parfait qui comporte  $N_1$  spires au primaire, et  $N_2$  spires au secondaire.

Au primaire, on impose une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U_1 = 25,0kV$ , et on récupère une tension sinusoïdale d'amplitude  $U_2 = 3,32kV$ .

- 1) En déduire le rapport du nombre de spires  $\frac{N_1}{N_2}$  du transformateur. On met à la sortie de ce transformateur un transformateur identique.
- 2) Quelle est la tension efficace  $U_3$  à la sortie de cette association ?

- 1)  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1 \cdot \sqrt{2}}{U_2} = 10,7.$

- 2)  $U_3 = \frac{U_2}{\frac{N_1}{N_2} \sqrt{2}} = \frac{U_1}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} = 220V.$



**Exercice 18.9** pour s'entraîner

### Bobine plongée dans un champ magnétique variable inhomogène

On se place dans un repère cylindrique d'axe  $Oz$ .

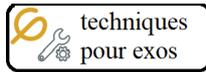
Une bobine constituée de  $N$  spires circulaires, de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$ , est plongée dans un champ magnétique variable inhomogène

$$\vec{B} = B_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot r}{2 \cdot R}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \vec{e}_z$$

- 1) Calculer le flux du champ magnétique  $\Phi(t)$  à travers la bobine.
- 2) En déduire la f.e.m  $e(t)$  induite.

- 1)  $\Phi(t) = \frac{8 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\pi} R^2 \cdot N \cdot B_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$

- 2)  $e(t) = \frac{8 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\pi} R^2 \cdot N \cdot \omega \cdot B_0 \cdot \sin(\omega \cdot t).$



## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Etudier l'effet de peau dans un conducteur

#### Ecrire les équations de Maxwell

Dans un conducteur ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ) dans l'ARQS, les équations de Maxwell deviennent

- MG :  $\text{div}(\vec{E}) \approx 0$ ;
- MF :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;
- MΦ :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ;
- MA :  $\text{rot}(\vec{B}) \approx \mu_0 \gamma \vec{E}$ .

#### Etablir l'équation de diffusion

Il faut découpler les équations entre  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  grâce à  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$ . On aboutit à une équation d'onde suivie par  $\vec{E}$  et  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  :

$$\Delta(\vec{E}) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

qui est l'équation de diffusion.

#### Trouver la solution de l'équation de diffusion

On peut injecter une OPPM :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-j(\omega t - \underline{k}z)]$$

- Il faut trouver la solution de la relation de dispersion de en utilisant

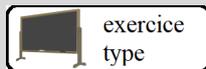
$$\underline{k} = k_r + j k_i$$

(avec  $k_r$  et  $k_i$  deux réels) qui donne deux équations réelles.

- Une fois déterminés  $k_r$  et  $k_i$  en faisant apparaître une longueur caractéristique  $\delta$ , on réinjecte dans la forme de l'onde.

**Remarque :** il y a deux possibilités pour  $k_r$  et  $k_i$ , on somme les solutions (superposition).

- On repasse ensuite aux réels.
- Les conditions aux limites donnent les constantes.



### Exercice 18.10 (le prof fait cet exercice type jeudi) Effet de peau

On considère un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , immobile et parallélépipédique. On se place en régime sinusoïdal, à la pulsation  $\omega$ , dans l'ARQS. Le courant circule suivant  $\vec{u}_x$ , mais la densité de courant varie a priori avec la profondeur  $z$  dans le conducteur (qui est le demi espace  $z > 0$ ) :

$$\vec{j} = j_x(z, t) \vec{u}_x = J_m(z) \cos(\omega t - \Phi(z)) \vec{u}_x$$

#### 1) Equation différentielle :

- 1.a) Rappeler les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS.
- 1.b) Exprimer la loi d'Ohm locale.
- 1.c) Montrer, grâce aux équations de Maxwell, que  $j_x$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial j_x(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_x(z, t)}{\partial z^2}$$

Que vaut  $D$  ?

#### 2) Solution :

2.a) Caractériser la précédente équation différentielle. Pourquoi peut-on utiliser le complexe associé  $\tilde{j}_x(z, t)$  pour résoudre l'équation différentielle ?

- 2.b) Résoudre la précédente équation et, en exprimant  $\delta$  et  $\phi(z)$ , montrer que :

$$j_x = J_1 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \phi(z)) + J_2 e^{\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + \phi(z))$$

- 2.c) Expliquer pourquoi  $J_2$  est nécessairement nul.

#### 3) Schémas :

Caractériser la densité de courant dans le conducteur, à l'aide des graphes

- 3.a)  $j_x(z, t = 0)$
- 3.b) et  $j_x(z = 0, t)$ ,  $j_x(z = \delta, t)$ ,  $j_x(z = 3\delta, t)$  sur un même graphique.

4) Applications numériques : on considère un conducteur de cuivre ( $\gamma = 58 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Que vaut  $\delta$  pour les fréquences suivantes :

- 4.a) 0 Hz (en continu), 50 Hz (secteur), 1 MHz (limite de l'ARQS).

4.b) Interprétation : quand peut-on négliger l'effet de peau ? Quelle est la forme de conducteur la plus adaptée aux hautes fréquences ?

1)

**1.a)** Equations de Maxwell : Equations de "Maxwell flux" :  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Equations de "Maxwell Gauss" :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Equations de "Maxwell Faraday" :  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Equations de "Maxwell Ampère" :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$ .

**1.b)** Loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ .

**1.c)** Equation différentielle : "Maxwell Faraday" :  $\Rightarrow \text{rot}(\text{rot}(\vec{j})) = -\gamma \cdot \frac{\partial \text{rot}(\vec{B})}{\partial t}$ . "Maxwell Ampère" :  $\Rightarrow \text{rot}(\text{rot}(\vec{j})) = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ . Dans les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}(\vec{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial j_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot}(\vec{j})) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial z^2}$$

Ainsi :  $-\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial z^2} = -\gamma \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ . On a donc l'équation demandée, avec :

$$D = \mu_0 \cdot \gamma$$

2) Solution :

**2.a)** La précédente équation différentielle est : linéaire, sans second membre, irréversible (non invariante par retournement du temps).

Complexe associé :  $\tilde{j}_x(z, t)$  vérifie l'équation différentielle car cette dernière est linéaire.

**2.b)** Résolution de l'équation : On a donc :  $D \cdot \frac{\partial(\tilde{J}_m(z) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t})}{\partial t} = \frac{\partial^2(\tilde{J}_m(z) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t})}{\partial z^2}$ . Ce qui donne :  $-j \cdot \omega \cdot D \cdot \tilde{J}_m(z) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} = e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot \frac{\partial^2(\tilde{J}_m(z))}{\partial z^2}$ , soit  $\frac{\partial^2(\tilde{J}_m(z))}{\partial z^2} + j \cdot \omega \cdot D \cdot \tilde{J}_m = 0$ . Résolvons l'équation caractéristique :  $r^2 + j \cdot \omega \cdot D = 0$  dont les solutions sont :  $r_{\pm} = \pm e^{-j \frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\omega \cdot D} = \pm \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot (1 - j)$ .

Ainsi le complexe  $\tilde{J}_m$  est de la forme :

$$\tilde{J}_m(z) = J_+ \cdot e^{r_+ \cdot z} + J_- \cdot e^{r_- \cdot z} = J_+ \cdot e^{\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot e^{-j \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} + J_- \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot e^{j \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z}$$

Et le complexe  $\tilde{j}_x$  est de la forme :

$$\tilde{j}_x(z) = J_+ \cdot e^{\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t + \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z)} + J_- \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z)}$$

Enfin  $j_x$  est de la forme :

$$j_x(z) = J_+ \cdot e^{\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z\right) + J_- \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z\right)$$

On a bien l'équation demandée avec  $J_1 = J_-$ ,  $J_2 = J_+$

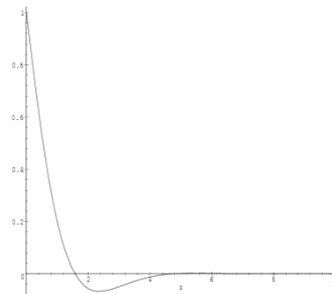
et :

$$\begin{cases} \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot D}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma}} \\ \phi(z) = \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma}{2}} \cdot z = \frac{z}{\delta} \end{cases}$$

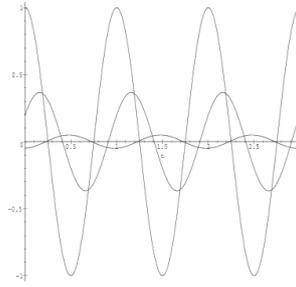
**2.c)**  $J_2 = J_+ = 0$  en effet, la solution  $J_+ \cdot e^{\sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \sqrt{\frac{\omega \cdot D}{2}} \cdot z\right)$  a une amplitude qui diverge ( $\rightarrow \infty$ ). elle donc est physiquement inacceptable :  $j_x(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

3) Schémas :

**3.a)**  $j_x(z, t = 0)$  : La courbe est représentée sur la figure suivante :



**3.b)**  $j_x(z = 0, t)$ ,  $j_x(z = \delta, t)$ ,  $j_x(z = 3 \cdot \delta, t)$  : Les courbes sont représentées sur la figure suivante :



$$j_x(z=0, t), j_x(z=\delta, t), j_x(z=3\delta, t)$$

4) Applications numériques :

4.a) 0Hz (en continu) :

$$\delta = +\infty$$

50Hz (secteur) :

$$\delta = 9,3mm$$

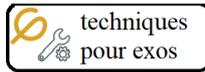
1MHz (limite de l'ARQS) :

$$\delta = 66\mu m$$

4.b) Interprétation :

Quand peut-on négliger l'effet de peau ? Si  $\delta \gg e$ , l'épaisseur du conducteur (ou son rayon), c'est à dire aux basses fréquences.

La forme de conducteur la plus adaptée aux hautes fréquences : Comme seule la partie périphérique conduit le courant, un tuyau suffit !

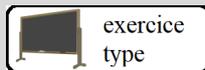


techniques  
pour exos

### Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Du fait de l'existence d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ ,

- un volume  $V$  a une énergie électromagnétique  $E_{em} = \iiint e_{em} d^3\tau$
- avec l'énergie volumique  $e_{em}(M) = \frac{\varepsilon_0 E(M)^2}{2} + \frac{B(M)^2}{2\mu_0}$  (en  $J \cdot m^{-3}$ ).  
Le bilan énergétique s'écrit
- pour le volume  $V$  :  $-\frac{dE_{em}}{dt} = P_r + P_d$
- et, localement,  $-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E}$   
avec
- la puissance rayonnée  $P_r = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{d}^2\Sigma$ , flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  (en  $W \cdot m^{-2}$ ),
- et la puissance dissipée  $P_d = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\tau$ , due à l'effet Joule.



exercice  
type

### Exercice 18.11 (le prof fait cet exercice type jeudi) Bilan d'énergie électromagnétique

On considère un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ , immobile, cylindrique (d'axe  $(Oz)$ , de longueur  $L$ , dont la section est un disque de rayon  $a$ ). On se place dans le repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  d'axe  $(Oz)$ .

Ce conducteur, qui est parcouru par un courant  $i$  (vers les  $z$  croissants) subit une tension  $u$  à ses bornes (en convention récepteur).

Dans tous le problème, on suppose que la densité volumique de courant y est homogène :  $\vec{j} = j_z \vec{u}_z$ , c'est à dire que l'on négligera l'effet de peau.

Pour les applications numériques, on prendra un conducteur en cuivre ( $\gamma = 58 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ), de rayon  $a = 1,0 \text{ mm}$ .

1) En régime permanent :

On va partir de la loi d'Ohm locale ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ), utilisée en électromagnétisme, pour, dans un premier temps démontrer la loi d'Ohm globale ( $u = R_0 i$ ), bien connue en électricité.

1.a) Exprimer  $i$  en fonction de  $j_z$ ,  $\gamma$ ,  $L$  et  $a$ .

1.b) Exprimer  $u$  de même.

1.c) En déduire que le conducteur ohmique vérifie bien la loi d'Ohm globale  $u = R_0 i$ . On exprimera  $R_0$  en fonction de  $\gamma$ ,  $L$  et  $a$ .

1.d) Donner l'expression du champ électrique  $\vec{E}(r, \theta, z)$ , en fonction de  $i$ ,  $\gamma$ ,  $L$  et  $a$ .

1.e) Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(r, \theta, z)$ , de la même façon.

1.f) Exprimer l'énergie du champ électrique  $E_e$ , en fonction de  $i$ ,  $\gamma$ ,  $L$  et  $a$ .

1.g) Exprimer de même l'énergie du champ magnétique  $E_m$ .

On s'intéresse maintenant à un bilan énergétique.

1.h) Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\pi}(r, \theta, z)$  dans le conducteur en fonction de  $i$ ,  $L$ ,  $a$  et  $\gamma$ .

1.i) En déduire avec les mêmes variables la puissance rayonnée  $P_r$  à travers la surface fermée qui délimite le conducteur ohmique.

1.j) Exprimer la puissance dissipée  $P_d$  par effet Joule dans le conducteur ohmique, en fonction de  $i$ ,  $L$ ,  $a$  et  $\gamma$ .

1.k) Réécrire le bilan énergétique global pour le champ électromagnétique qui règne à l'intérieur du conducteur et comparer les termes avec  $P_{elec} = u i$ , la puissance électrique échangée par ce dipôle.

2) En régime sinusoïdal forcé à basse fréquence :

Dans cette sous-partie,  $j_z = j_0 \cos(\omega t)$ . On néglige l'effet de peau car  $a \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}$ .

2.a) Faire l'application numérique pour la pulsation maximale  $\omega_{max_1}$  que cette dernière relation impose.

2.b) Montrer que pour  $\omega \ll \omega_{max_2}$  (dont on donnera un ordre de grandeur en fonction de  $\gamma$  et de constantes universelles, et dont on fera l'application numérique), l'équation de Maxwell Ampère peut s'écrire  $\text{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}$ , ce qui nous permet de réutiliser l'expression de  $\vec{B}$  précédemment trouvée en régime permanent.

2.c) Exprimer la moyenne de l'énergie électrique  $\langle E_e \rangle$  en fonction de  $i_0$ ,  $a$ ,  $L$ ,  $\omega$  et  $\gamma$ .

2.d) De la même façon, exprimer la moyenne de l'énergie magnétique  $\langle E_m \rangle$ .

2.e) Que vaut le rapport des moyennes des énergies électrique et magnétique  $\frac{\langle E_e \rangle}{\langle E_m \rangle}$ ? Application numérique. L'énergie du champ électromagnétique dans le conducteur ohmique est-elle principalement électrique ou magnétique?

2.f) Montrer que dans le cadre des basses fréquences défini précédemment, on conserve le bilan énergétique global effectué en régime permanent.

1) Caractéristiques électrocinétiques :

1.a)  $i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$ . Conclusion :

$$i = j_z \cdot \pi \cdot a^2$$

1.b)  $\vec{E} = -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}(V)$  en régime stationnaire.

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \text{grad}(V) \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = -V_B + V_A \Rightarrow.$$

$$\text{Si } d\vec{l} = +dz \cdot \vec{u}_z, \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_z \cdot L = u.$$

$$\text{Or } \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \Rightarrow E_z = \frac{i_z}{\gamma}.$$

Donc

$$u = \frac{j_z \cdot L}{\gamma}$$

1.c) D'après les deux dernières relations :  $\frac{u}{i} = \frac{j_z \cdot L}{\gamma \cdot j_z \cdot \pi \cdot a^2}$ , soit  $u = R_0 \cdot i$  avec

$$R_0 = \frac{L}{\gamma \cdot \pi \cdot a^2}$$

1.d)  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{i}{\gamma \cdot \pi \cdot a^2} \cdot \vec{u}_z$$

1.e) Maxwell Ampère dans l'ARQS :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$ .

Dans un repère cylindrique d'axe, l'axe du fil,  $\vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$ . Les plans contenant l'axe du fil sont plans de symétrie pour  $\vec{j}$ .  $\vec{B}$  est un pseudo vecteur, donc orthogonal aux plans de symétrie pour  $\vec{j}$ . donc  $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ .

On choisit  $C$ , un cercle d'axe, l'axe du fil, de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :  $d\vec{l} = r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$ .  
 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot d^2\vec{S}$ .  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot B_\theta(r) = \mu_0 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot j_z$ . Donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot a^2} \vec{u}_\theta$$

1.f) L'énergie électrique est :  $E_E = \iiint \frac{\epsilon_0 \cdot E^2}{2} \cdot d^3\tau$ . Soit :

$$E_E = \frac{\epsilon_0 \cdot i^2 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \gamma^2}$$

1.g)

L'énergie magnétique est :  $E_M = \iiint \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot d^3\tau = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2 \cdot \pi} \int_{z=0}^L \frac{\mu_0 \cdot i^2 \cdot r^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot a^4 \cdot \gamma} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$ . Soit :

$$E_M = \frac{\mu_0 \cdot i^2 \cdot L}{16 \cdot \pi}$$

1.h) Le vecteur de Poynting est :  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Soit :

$$\vec{\Pi} = - \frac{i^2 \cdot r}{2 \cdot \pi^2 \cdot a^4 \cdot \gamma} \vec{u}_r$$

1.i) La puissance rayonnée est  $P_r = \oiint \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{\Sigma} = - \int_{\theta=0}^{2 \cdot \pi} \int_{z=0}^L \frac{i^2 \cdot a}{2 \cdot \pi^2 \cdot a^4 \cdot \gamma} \cdot a \cdot d\theta \cdot dz$ .

$$P_r = - \frac{i^2 \cdot L}{\pi \cdot a^2 \cdot \gamma}$$

1.j) La puissance dissipée par effet Joule est  $P_d = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d^3\tau$ .

$$P_d = \frac{i^2 \cdot L}{\gamma \cdot \pi \cdot a^2}$$

1.k) La conservation de l'énergie s'écrit au niveau local :  $-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$  et au niveau global :  
 $-\frac{dE_{em}}{dt} = P_r + P_d$ .  $\frac{dE_{em}}{dt} = 0 \Rightarrow P_r = -P_d$  : c'est bien ce que l'on avait vu!

2) Régime sinusoïdal forcé à basse fréquence

$$2.a) \quad a \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma}} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{\omega_{max1} \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$$

$$\omega_{max1} = \frac{2}{a^2 \cdot \mu_0 \cdot \gamma} = 27.10^3 \text{rad.s}^{-1}$$

2.b) On cherche à avoir  $\left| \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \ll \left| \mu_0 \cdot \vec{j} \right|$  soit  $\varepsilon_0 \cdot \omega \ll \gamma$ . La limite se trouve pour :

$$\omega_{max2} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 6,6.10^{18} \text{rad.s}^{-1}$$

2.c) La moyenne de l'énergie électrique est :  $\langle E_E \rangle = \frac{\varepsilon_0 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \gamma^2} \langle i^2 \rangle \Rightarrow$

$$\langle E_E \rangle = \frac{\varepsilon_0 \cdot i_0^2 \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \gamma^2}$$

2.d) La moyenne de l'énergie magnétique est :  $\langle E_M \rangle = \frac{\mu_0 \cdot L}{16 \cdot \pi} \langle i^2 \rangle \Rightarrow$

$$\langle E_M \rangle = \frac{\mu_0 \cdot i_0^2 \cdot L}{32 \cdot \pi}$$

2.e) Le rapport des moyennes des énergies est :  $\frac{\langle E_E \rangle}{\langle E_M \rangle} = \frac{\varepsilon_0 \cdot i_0^2 \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \gamma^2} \frac{32 \cdot \pi}{\mu_0 \cdot i_0^2 \cdot L} \Rightarrow$

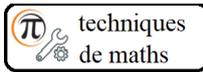
$$\frac{\langle E_E \rangle}{\langle E_M \rangle} = \frac{8 \cdot \varepsilon_0}{a^2 \cdot \gamma^2 \cdot \mu_0} = 4 \frac{\omega_{max1}}{\omega_{max2}} = 16.10^{-15}$$

Conclusion :  $\langle E_E \rangle \ll \langle E_M \rangle$  l'énergie est donc principalement magnétique.

2.f) La conservation de l'énergie s'écrit au niveau local :  $-\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$  et au niveau global :  
 $-\frac{dE_{em}}{dt} = P_r + P_d$ . Or  $\left| \frac{dE_{em}}{dt} \right| \simeq \left| \frac{dE_M}{dt} \right| \simeq 2 \cdot \omega \frac{\mu_0 \cdot i_0^2 \cdot L}{16 \cdot \pi}$  Aussi :  $\frac{\left| \frac{dE_{em}}{dt} \right|}{P_d} \simeq 2 \cdot \omega \frac{\mu_0 \cdot i_0^2 \cdot L}{16 \cdot \pi} \frac{\gamma \cdot \pi \cdot a^2}{i_0^2 \cdot L} = \omega \frac{\mu_0 \cdot \gamma \cdot a^2}{8} = \frac{\omega}{4 \cdot \omega_{max1}}$   
 $\left| \frac{dE_{em}}{dt} \right| \ll P_d \Rightarrow$

$$P_r = -P_d$$

c'est bien ce que l'on avait vu !



## Techniques mathématiques à maîtriser Découpler des équations différentielles

### Position du problème :

Il s'agit de déterminer la solution des équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

où  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$  sont des coefficients constants. On fait apparaître cela sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Méthode matricielle :

On peut diagonaliser la matrice et en chercher les valeurs propres et les vecteurs propres, c'est-à-dire se ramener à

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dont on connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{a'_{11}t} \\ y'(t) = C_2 e^{a'_{22}t} \end{cases}$$

■ *Exemple :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a pour vecteurs propres :

$$\begin{cases} x' = x + jy \\ y' = y + jx \end{cases}$$

en effet :

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + j\dot{y} = ay - jax = ja(x + jy) = ja x' \\ \dot{y}' = \dot{y} + j\dot{x} = -ax + jay = ja(y + jx) = ja y' \end{cases}$$

On connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{jat} \\ y'(t) = C_2 e^{jat} \end{cases}$$

Il faut ensuite revenir à la première base :

$$\begin{cases} x = \frac{x' - jy'}{2} = \frac{C_1 - jC_2}{2} e^{jat} \\ y = \frac{x' + jy'}{2j} = \frac{C_1 + jC_2}{2j} e^{jat} \end{cases}$$

### Méthode de la re-dérivation :

On peut dériver à nouveau le système :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} = a_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y) \\ \ddot{y} = a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} = a_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + a_{22}(a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}$$

avec un peu de chance, s'il y a des coefficients nuls dans la matrice, il peut y avoir des simplifications.

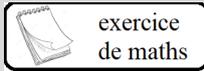
■ *Exemple :*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x \end{cases} \quad \text{devient :} \quad \begin{cases} \ddot{x} = a_{12}a_{21}x \\ \ddot{y} = a_{21}a_{12}y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\text{si } a_{12}a_{21} > 0 : \begin{cases} x(t) = C_1 e^{\sqrt{a_{12}a_{21}}t} \\ y(t) = C_2 e^{\sqrt{a_{12}a_{21}}t} \end{cases} \quad \text{si } a_{12}a_{21} < 0 : \begin{cases} x(t) = C_1 e^{j\sqrt{-a_{12}a_{21}}t} \\ y(t) = C_2 e^{j\sqrt{-a_{12}a_{21}}t} \end{cases}$$

## 1. Techniques mathématiques - Découplage d'équations différentielles



**Exercice 18.12** pour s'entraîner

### Découplage d'un système d'équations différentielles par diagonalisation

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en diagonalisant la matrice.

1) Le système a pour vecteurs propres :

$$\begin{cases} x' = x + j y \\ y' = y + j x \end{cases}$$

en effet :

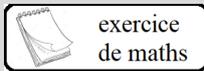
$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + j \dot{y} = a y - j a x = j a (x + j y) = j a x' \\ \dot{y}' = \dot{y} + j \dot{x} = -a x + j a y = j a (y + j x) = j a y' \end{cases}$$

On connaît les solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = C_1 e^{j a t} \\ y'(t) = C_2 e^{j a t} \end{cases}$$

Il faut ensuite revenir à la première base :

$$\begin{cases} x = \frac{x' - j y'}{2} = \frac{C_1 - j C_2}{2} e^{j a t} \\ y = \frac{x' + j y'}{2j} = \frac{C_1 + j C_2}{2j} e^{j a t} \end{cases}$$



**Exercice 18.13** pour s'entraîner

### Découplage d'un système d'équations différentielles par re-dérivation

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dot{x} = a y \\ \dot{y} = a x \end{cases}$$

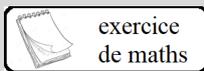
en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ \ddot{y} = a^2 y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{a t} \\ y(t) = C_2 e^{a t} \end{cases}$$



**Exercice 18.14** pour s'entraîner

### Découplage d'un système d'équations différentielles par re-dérivation

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \dot{x} = a y \\ \dot{y} = -a x \end{cases}$$

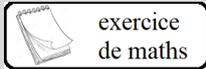
en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a^2 x \\ \ddot{y} = -a^2 y \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{j a t} \\ y(t) = C_2 e^{j a t} \end{cases}$$



exercice  
de maths

**Exercice 18.15** pour s'entraîner

### Découplage d'un système d'équations aux dérivées partielles par re-dérivation

1) Trouver la solution du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{cases}$$

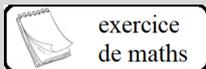
Donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

dont les solutions sont :

$$\psi(x, t) = A_+ \exp \left[ j \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] + A_- \exp \left[ j \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right]$$

Même chose pour  $\phi(x, t)$ .



exercice  
de maths

**Exercice 18.16** pour s'entraîner

### Découplage d'un système d'équations aux dérivées partielles par re-dérivation

1) Trouver la solution en régime permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) du système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{D} \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

en re-dérivant.

1) Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sqrt{D} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

Donc :

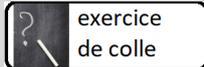
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = D \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

qui est une équation de diffusion dont les solutions en régime permanent sont :

$$\psi(x) = a x + b$$

Et donc  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sqrt{D} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$  a pour solution

$$\phi(x) = c$$



exercice  
de colle

### Exercice 18.17 Pince ampèremétrique

En refermant la pince ampèremétrique sur un conducteur, on peut mesurer des courants qui vont de 2 A à plus de 600 A, sans raccordement électrique.

Fonctionnement : un conducteur parcouru par un courant crée un champ magnétique autour de lui. Ce champ magnétique induit une tension dans la bobine que constitue la pince. Cette tension, proportionnelle à la valeur du courant traversant le conducteur, est lue directement sur l'ampèremètre.

Attention : les pinces ampèremétriques ne fonctionnent que pour le courant alternatif!

Pour mesurer un courant triphasé avec un ampèremètre à pince, il faut mesurer chaque conducteur séparément. Il n'est pas possible de mesurer les conducteurs ensemble : les champs magnétiques s'annulent réciproquement, et l'indication est zéro!

Extraits d'un site suisse sur l'électricité disponible à l'adresse <http://www-energie.arch.ucl.ac.be/cogeneration/CDRom/mesures/mescourantelectrique.htm>

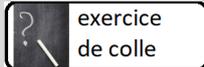


Soit un fil infini confondu avec  $Oz$  parcouru par un courant  $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ , courant qu'on cherche à déterminer... sans couper le fil pour placer un ampèremètre.

On va utiliser une pince ampèremétrique qui s'ouvre et se ferme (c'est une pince) de façon à entourer le fil rectiligne.

Quand la pince entoure le fil, on a constitué un tore de section carrée de côté  $a = 5$  cm, d'axe  $Oz$  et de rayon moyen  $\frac{3}{2}a$ , sur lequel on a bobiné  $N$  spires régulièrement espacées. Ce circuit de résistance  $R$  est fermé sur un ampèremètre de résistance négligeable qui mesure un courant  $i(t)$  dans la pince.

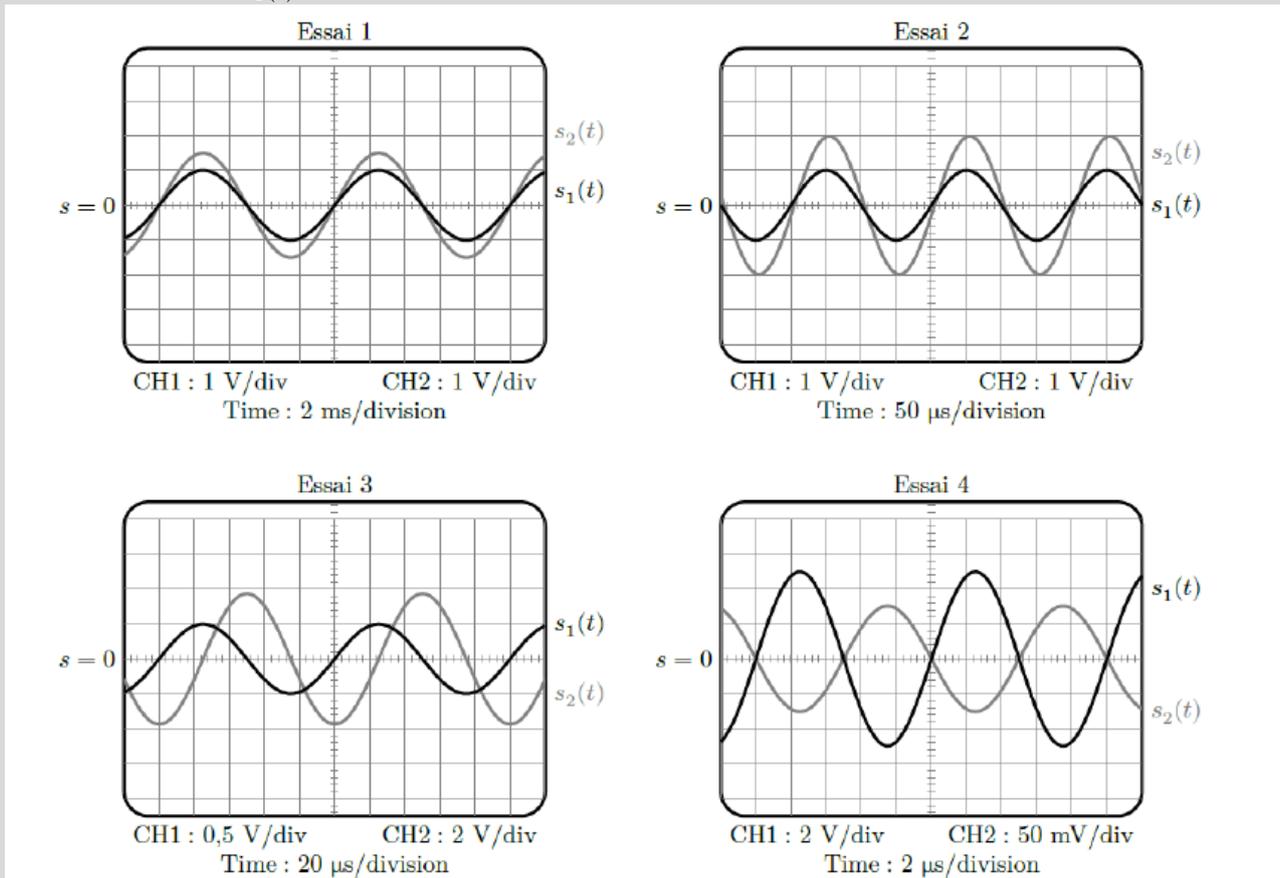
- 1) Calculer le champ magnétique total créé par  $I(t)$  et  $i(t)$  en un point  $M$  placé à l'intérieur du tore.
- 2) En déduire le flux total du champ magnétique dans les  $N$  spires du tore.
- 3) Ecrire l'équation électrique relative au circuit constitué par les spires et l'ampèremètre de la pince.
- 4) En utilisant les complexes et en supposant  $N \gg 1$ , exprimer le courant inconnu  $I$  en fonction du courant mesuré  $i$ .



### Exercice 18.18 Identification d'un filtre

On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur  $s$  est égale à  $j\omega$  où  $\omega$  est la pulsation des signaux sinusoïdaux et  $j^2 = -1$ .

- 1) Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ?
- 2) Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés sur la figure ci-dessous,  $s_2(t)$  désigne la tension de sortie du filtre et  $s_1(t)$  la tension d'entrée.

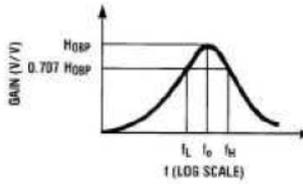


Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité.

## Annexe

### Filtres réalisables avec le LMF100

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP} \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L}; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

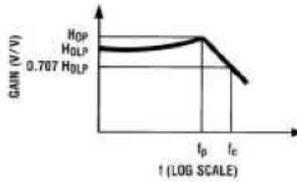
$$f_L = f_0 \left( \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left( \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

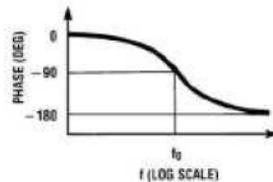
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP} \omega_0^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

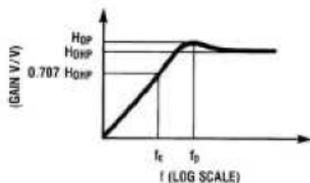
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

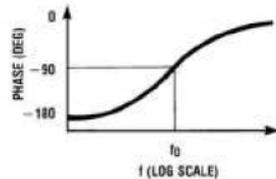
$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP} s^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(b)

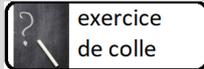


$$f_c = f_0 \times \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}} \right]^{-1}$$

$$f_p = f_0 \times \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

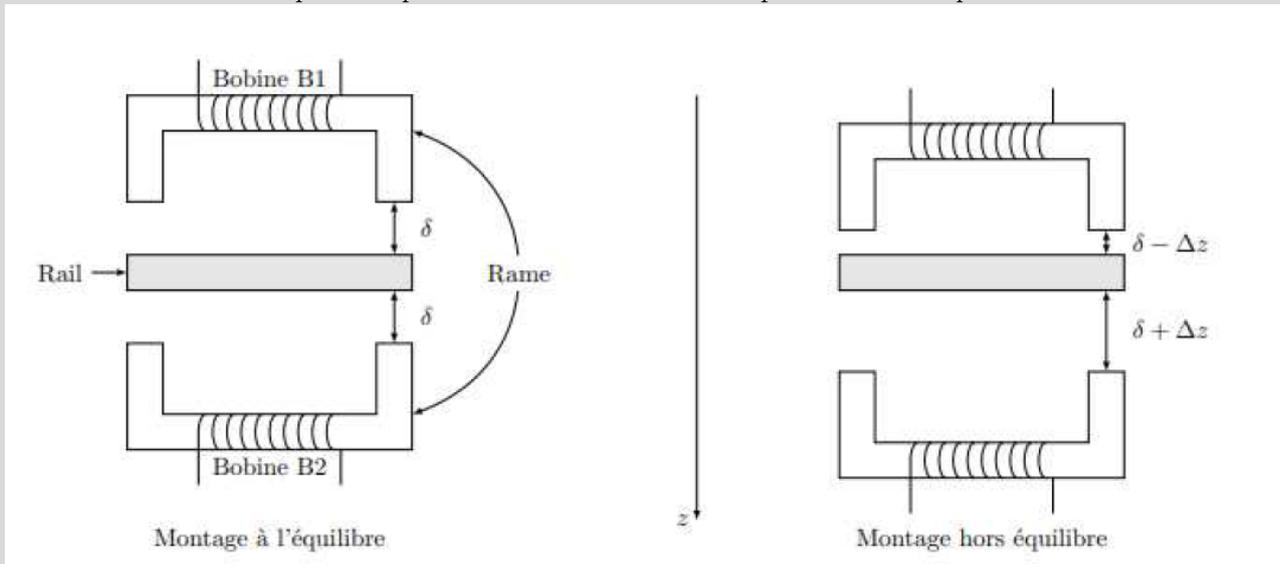
FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response



exercice  
de colle

### Exercice 18.19 Capteur de position

On s'intéresse à un capteur de position à inductance variable pour détecter la position d'un rail.



À l'équilibre, les inductances des bobines  $B_1$  et  $B_2$  sont identiques et valent  $L_e$ . Hors d'équilibre, l'inductance de la bobine  $B_1$  est  $L_1 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right)$  et celle de la bobine  $B_2$  :  $L_2 = L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$ . La mesure de ces inductances permet de remonter à la position de la rame, repérée par  $\Delta z$ . Les deux bobines sont montées en série et l'ensemble est alimenté par un générateur délivrant la tension :  $e(t) = E \cos(\omega t)$ , en série avec une résistance  $R$ . On néglige la résistance des deux bobines.

1) Faire le schéma du montage. Déterminer les expressions des tensions complexes  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  aux bornes respectivement de  $B_1$  et  $B_2$ , en fonction de  $R$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\omega$  et  $\underline{e}$ .

2) Ces tensions sont placées à l'entrée d'un montage électrique non décrit ici qui délivre la tension de sortie :  $u_s(t) = u_1(t) - u_2(t)$ .

Exprimer la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega)$  sous la forme :

$$T(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}.$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $\underline{T}(j\omega)$  (gain et phase).

3) On donne :  $R = 750 \Omega$ ,  $L_e = 60 \text{ mH}$ ,  $f = 4,0 \text{ kHz}$ .

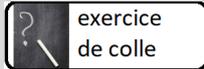
Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme :  $u_s(t) = \frac{E\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$ . Exprimer et calculer le déphasage  $\varphi$ .

4) On souhaite obtenir un signal continu image de la position de la rame. Pour cela on utilise un multiplieur analogique, qui multiplie les signaux  $e(t)$  et  $u_s(t)$ . Il délivre la tension :  $s_m(t) = K_m e(t)u_s(t)$  où  $K_m = 0,1 \text{ V}^{-1}$ .

4.a) Exprimer la tension  $s_m(t)$  à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale.

4.b) Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue  $S_m$  proportionnelle à  $\Delta z$  ?

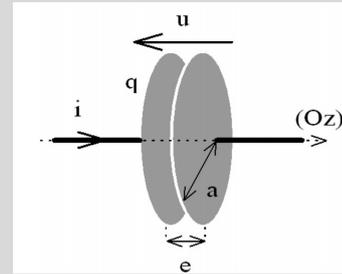
4.c) Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire la plus petite valeur de  $\frac{\Delta z}{\delta}$  mesurable avec ce dispositif. On prendra  $E = 6,0 \text{ V}$ .



exercice  
de colle

### Exercice 18.20 Etude électromagnétique d'un condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux disques conducteurs en regard, de rayon  $a$ , de même axe  $(Oz)$ , espacés de  $e$ . On négligera les effets de bord.  $q$  est la charge de l'armature pointée par la tension  $u$ , et l'intensité  $i$  est choisie de telle sorte que :  $i = \frac{dq}{dt}$  (cf. figure ci-contre). On se place dans le repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .



#### 1) Etude en électrostatique :

$u$  est constante.

**1.a)** Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(r, \theta, z)$  qui règne entre les armatures en fonction de  $u$ ,  $a$  et  $e$ .

**1.b)** Justifier que la capacité d'un tel condensateur soit  $C_0 = \frac{\epsilon_0 \pi \cdot a^2}{e}$ .

**1.c)** Exprimer l'énergie  $E_e$  du champ électrique qui règne entre les deux armatures en fonction de  $u$ ,  $a$  et  $e$ .

**1.d)** Retrouver l'énergie électrique  $W_c$  stockée dans le condensateur en fonction de  $u$  et  $C_0$ .

#### 2) Etude en régime lentement variable :

La tension  $u$  varie : il existe un courant  $i$  non nul. On supposera que le champ électrostatique précédemment déterminé reste valable, en prenant en compte la variation de  $u$ .

**2.a)** Réécrire, pour l'espace inter-armatures, l'équation de Maxwell Ampère qui donne  $\text{rot} \vec{B}$  en fonction de  $i$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $c$  et  $C_0$ .

**2.b)** Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(r, \theta, z)$  qui règne entre les armatures en fonction de  $i$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $c$  et  $C_0$ .

**2.c)** Exprimer l'énergie  $E_m$  du champ magnétique qui règne entre les deux armatures en fonction de  $i$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $c$  et  $C_0$ .

#### 3) Etude en régime sinusoïdal forcé :

La tension  $u$  varie sinusoïdalement  $u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . On supposera que les résultats précédents concernant le champ électrique sont toujours valables si on considère  $u$  variable.

**3.a)** Exprimer la moyenne de l'énergie électrique  $\langle E_e \rangle$  en fonction de  $u_0$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $\omega$  et  $C_0$ .

**3.b)** De la même façon, exprimer la moyenne de l'énergie magnétique  $\langle E_m \rangle$ .

**3.c)** Que vaut le rapport des moyennes des énergies électrique et magnétique  $\frac{\langle E_e \rangle}{\langle E_m \rangle}$  en fonction de  $u_0$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $\omega$  et  $C_0$  ?

**3.d)** Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), l'énergie du champ électromagnétique dans le condensateur est-elle principalement électrique ou magnétique ? (Justifier).

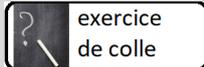
**3.e)** Que vaut la puissance dissipée  $P_d$  par effet Joule entre les deux armatures ?

**3.f)** Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\pi}(r, \theta, z, t)$  entre les armatures, en fonction de  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $a$  et  $e$ .

**3.g)** Déterminer de la même façon la puissance rayonnée  $P_r(t)$  à travers la surface fermée qui délimite l'espace entre les armatures.

**3.h)** Quels sont le sens et la direction de  $\vec{\pi}$  ainsi que le signe de  $P_r$  dans le cas d'une charge du condensateur ?

**3.i)** Réécrire le bilan énergétique global pour le champ électromagnétique qui règne entre les armatures du condensateur et comparer termes à termes avec le bilan électrocinétique  $\frac{dW_c}{dt} = P_{elec}$ , où  $P_{elec}$  est la puissance échangée par ce dipôle.



exercice  
de colle

### Exercice 18.21

#### Une autre façon de voir l'établissement du courant dans un solénoïde

On s'intéresse à un solénoïde cylindrique d'axe  $Oz$  de rayon  $a$ , de longueur  $e \gg a$ , constitué de  $N$  spires circulaires dans lesquelles circulent un courant  $I$  dans le sens trigonométrique.

1) Etude magnétostatique.

On supposera que le champ magnétique est quasi-nul à l'extérieur du solénoïde.

1.a) Déterminer l'expression du champ magnétique (homogène)  $\vec{B} = B_z \cdot \vec{u}_z$  à l'intérieur du solénoïde en fonction de  $I$ ,  $N$ ,  $e$  et  $\mu_0$ .

1.b) Montrer que le flux du champ magnétique à travers les spires est  $\phi = L.I$ . Que vaut l'inductance  $L$  en fonction de  $e$ ,  $a$ ,  $N$  et  $\mu_0$  ?

2) Passage au régime variable.

L'intensité  $I$  qui circule dans le fil électrique varie. On suppose que le champ magnétique garde la même expression que celle trouvée précédemment en fonction de  $I(t)$ .

2.a) Exprimer le champ électrique dans le solénoïde qu'on cherchera sous la forme  $\vec{E} = E_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta$ , en fonction de  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $e$ , et  $I$ .

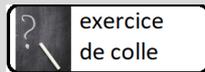
3) Etude énergétique.

3.a) Exprimer l'énergie électromagnétique  $E_{em}$  de l'espace intérieur au solénoïde, en supposant qu'elle est uniquement magnétique, en fonction de  $I$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $N$  et  $\mu_0$ .

3.b) Exprimer  $P_r$ , la puissance rayonnée à travers  $\Sigma$ , la surface fermée qui délimite le solénoïde, en fonction de  $I$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $N$  et  $\mu_0$ .

3.c) Vérifier le résultat en faisant un bilan énergétique global.

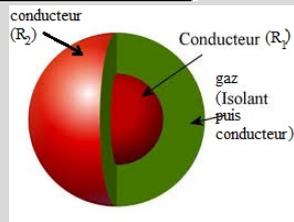
3.d) Comparer  $E_{em}$  et  $\frac{L.I^2}{2}$ , l'énergie stockée dans le solénoïde. Interpréter ce qui se passe énergétiquement dans le cas où  $I > 0$  augmente.



exercice  
de colle

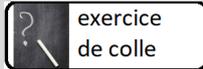
### Exercice 18.22

#### Isolant rendu conducteur par un flash



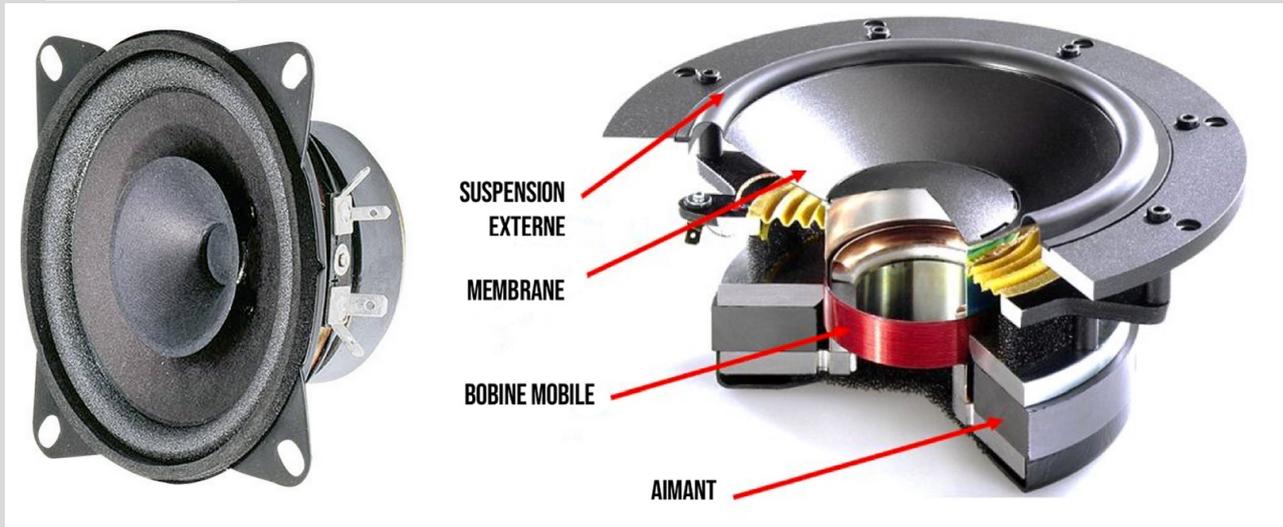
Une sphère métallique de rayon  $R_1$  porte initialement une charge  $Q_0$  uniformément répartie en surface. Une autre sphère métallique de rayon  $R_2 > R_1$  est initialement non chargée. Entre les deux se trouve un gaz non conducteur. Suite à un flash lumineux, ce gaz devient conducteur et est caractérisé par sa conductivité  $\gamma$ . On supposera que le gaz reste localement neutre. On appelle  $Q(t)$  la charge portée par la sphère intérieure. Le système est plongé dans le vide.

- 1) Que vaut le champ électrique entre les deux sphères ?
- 2) En déduire la densité volumique de courant.
- 3) Quel est le champ magnétique engendré ?
- 4) Vérifier les équations de Maxwell. En déduire une équation différentielle satisfaite par  $Q(t)$ .
- 5) Résoudre cette précédente équation différentielle et donner la charge  $Q(t)$  portée par la sphère.
- 6) Calculer l'énergie électromagnétique  $E_{em}(t)$ .
- 7) En déduire la capacité d'un condensateur sphérique.
- 8) Vérifier le bilan énergétique global sur l'espace entre les deux sphères.



exercice  
de colle

### Exercice 18.23 Modélisation d'un haut-parleur



On modélise un haut-parleur électrodynamique en utilisant certaines hypothèses simplificatrices :

- On considère que l'ensemble membrane et bobine mobile se comporte comme un solide rigide de masse  $m$  qui se déplace d'un seul bloc le long de l'axe ( $z/z'$ ) et on note  $z$  l'élongation de l'équipage mobile par rapport à sa position d'équilibre.
- Le spider et la suspension périphérique seront considérés comme des ressorts linéaires de constante de raideur totale  $k$ .
- La force de frottement fluide  $\vec{F}_f$  exercée par l'air sur la membrane sera du type  $\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$  avec  $h$  un coefficient de frottement supposé constant.

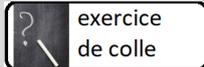
Le circuit de l'enroulement est équivalent à une inductance propre  $L$  en série avec une résistance  $R$  et une force électromotrice (fem)  $e_{em}$  telle que :

$$e_{em} = \ell \frac{dz}{dt} B$$

- 1) Ecrire les équations régissant le comportement du haut-parleur :
  - 1.a) l'équation électrique,
  - 1.b) l'équation mécanique.
- 2) On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ .
  - 2.a) Réécrire les deux dernières relations trouvées.
  - 2.b) Montrer que le haut-parleur est équivalent à une association en série d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$  et d'un dipôle d'impédance complexe  $Z_m$  tel que :

$$Z_m = \frac{R_m}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- 2.c) Donner le schéma électrique équivalent au haut-parleur.



exercice  
de colle

### Exercice 18.24

#### Chute d'un aimant dans un tube conducteur

On peut observer la fem induite dans une bobine à l'intérieur de laquelle un petit aimant tombe. On admettra que, grâce à un dispositif expérimental, l'aimant est freiné dans sa chute et a une vitesse constante  $-v.\vec{e}_z$ .

#### 1) Champ magnétique créé par l'aimant

On suppose que l'aimant est assimilable à un point matériel en  $O$  de masse  $m$ , centre du repère d'axe  $Oz$  vertical vers le haut. Il se comporte comme un dipôle magnétique de moment  $m = +m.\vec{e}_z$ .

**1.a)** Rappeler les expressions du champ magnétique créé dans l'approximation dipolaire par cet aimant. On se placera dans les coordonnées sphériques  $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$  de centre  $O$ , d'axe polaire  $Oz$ .

**1.b)** On se place maintenant en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de centre  $O$ , d'axe  $Oz$ . Exprimer la composante radiale  $B_r(r, \theta, z)$  du champ magnétique créé par l'aimant dans l'approximation dipolaire.

#### 2) Induction dans la bobine

La bobine est formée de  $N$  bobinages circulaires de rayon  $R'$ , d'axe  $Oz$ , de conductivité  $\sigma$ , à la côte  $z$  dans le repère cylindrique de centre l'aimant. On suppose que l'aimant est immobile et que la bobine est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v} = +v.\vec{e}_z$ .

**2.a)** Expliquer pourquoi il y a de l'induction. Sans aucun calcul, tracer l'allure de l'évolution de la tension  $e$  aux bornes de la bobine au cours du temps.

On admet que la fem est  $e = \oint (\vec{v}_{conduc} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ .

**2.b)** En déduire l'expression de  $e$  aux bornes de la bobine en fonction de  $z$ .

#### 3) Etude du signal

On observe la tension  $u(t)$  aux bornes de la bobine à l'oscilloscope. On choisira l'origine des dates de telle sorte que  $t = 0$  quand l'aimant passe dans la bobine ( $z = 0$ ).

**3.a)** Exprimer  $u(t)$ .

**3.b)** Montrer que cette tension est de la forme  $u = u_0 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ , avec  $x = \frac{t}{\tau}$ . On exprimera  $\tau$  et  $u_0$ .

**3.c)** Tracer l'allure de  $u(t)$  et montrer que la détermination des extréma de cette courbe permet de déterminer la vitesse de chute de l'aimant.

exercice de colle

**Exercice 18.25**  
**Train à moteur linéaire**



Selon la page wikipédia qui lui est consacrée, un moteur linéaire est un moteur électrique dont les « rotor » et « stator » ont été « mis à plat ». Alors qu'un moteur rotatif classique produit un couple (rotation), le moteur linéaire produit une force (translation) permettant le déplacement d'objets ou de véhicules.

Les moteurs actuels utilisent le courant alternatif, et une voie spécialement aménagée.

La photo de gauche montre un train ART de la société Bombardier qui se déplace grâce à la bande d'aluminium que l'on voit entre les voies.

Deux principes peuvent être retenus :

- s'il y a deux flux magnétiques, l'un dans la voie et l'autre dans la partie mobile, il s'agit d'un moteur synchrone ;
- si le flux magnétique n'est généré qu'à un seul endroit, par exemple dans la voie, et que la partie mobile est électro-magnétiquement passive, le moteur est dit asynchrone - le récepteur peut alors n'être qu'un simple métal conducteur (cuivre, aluminium, etc.).

On va expliquer comment peut fonctionner un train à moteur linéaire du second type.

On s'intéresse pour cela à un cadre conducteur carré, de résistance  $R$ , d'inductance négligeable, constitué de  $N$  spires de côté  $b$  dans le plan horizontal  $(Oxy)$ , en mouvement de translation rectiligne uniforme (l'abscisse de son centre est  $x = Vt$ ) dans le référentiel du laboratoire  $R$ . Ce cadre est soumis à l'action d'un champ magnétique vertical de la forme :  $\vec{B}(x, t) = B_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v_\phi} \right) \right] \vec{e}_z$ .

On désigne par  $g = 1 - \frac{V}{v_\phi}$  un facteur sans dimension (dit de glissement).

1) Montrer que le flux de  $\vec{B}$  à travers le cadre est de la forme :

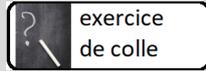
$$\phi(t) = \alpha \sin \left( \frac{b\omega}{2v_\phi} \right) \cos(g\omega t)$$

2) En déduire l'intensité  $i(t)$  du courant qui circule dans le cadre.

3) Calculer la puissance des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre. Montrer que sa valeur moyenne est :

$$\langle P \rangle = \frac{2 B_m^2 b^2 N^2 v_\phi^2 g (1 - g)}{R} \sin^2 \left( \frac{b\omega}{2v_\phi} \right)$$

4) Etudier la valeur moyenne des forces de Laplace suivant la valeur de  $g$ . En particulier, quand le cadre est-il freiné ou propulsé par les forces de Laplace ?



exercice  
de colle

### Exercice 18.26

#### Déplacement d'une barre conductrice sur des rails dans un champ magnétique



Appareil de démonstration d'une force sur un conducteur dans un champ magnétique. Un support aménagé de deux rails en aluminium avec bornes diamètre 4 mm, permet de faire glisser librement un barreau métallique. Lorsque l'axe est placé sur les rails à proximité d'un aimant, et que le courant circule dans les rails, un mouvement de répulsion entraîne l'axe loin du centre du champ magnétique. Livré complet avec barre de roulement et Aimant à entrefers variable. Le rail et l'aimant à entrefers sont aussi proposés individuellement...

<http://www.biolab.fr/boutique-biolab/sciences-physiques-chimiques/electrostatisme-electromagnetisme/rail-de-laplace-complet-detail>.

On se place dans un repère cartésien orthogonal direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , avec  $\vec{u}_z$  vers le haut.

Les conducteurs composant le circuit ont une résistance linéique  $R_l$ . Le tout est plongé dans un champ magnétique vertical, uniforme et constant  $\vec{B} = B_a \cdot \vec{u}_z$ , avec  $B_a = 0,10 \text{ T}$ .

**1)** Deux tiges conductrices  $AB$  et  $A'B'$  sont placées parallèlement ( $AB//A'B'//(Ox)$ ) dans un plan horizontal ; elles sont distantes de  $AA' = 15 \text{ cm}$ .

On déplace une barre conductrice  $CC'$  qui reste parallèle à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ , avec  $v_0 = 50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**1.a)** Quelle est la f.e.m  $e$  qui apparaît entre  $A$  et  $A'$  ?

Entre  $A$  et  $A'$  se trouve un conducteur ohmique, de résistance  $R = 1,0k\Omega$  (la résistance des tiges étant négligeable).

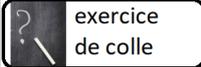
**1.b)** Quelle est la puissance  $P$  dissipée par ce résistor ?

**2)** Les deux tiges conductrices  $OA$  et  $OA'$  sont maintenant concourantes : elles ont pour médiatrice l'axe  $(Ox)$  et font un angle  $\alpha = (\vec{OA}, \vec{u}_x) = (\vec{u}_x, \vec{OA}')$  avec lui.

On déplace à nouveau une barre conductrice parallèlement à  $(Oy)$  à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ , avec  $v_0 > 0$ . Cette barre est en contact avec la tige  $OA$  (respectivement  $OA'$ ) en  $B$  (respectivement en  $B'$ ). A  $t = 0$ ,  $B = B' = O$ .

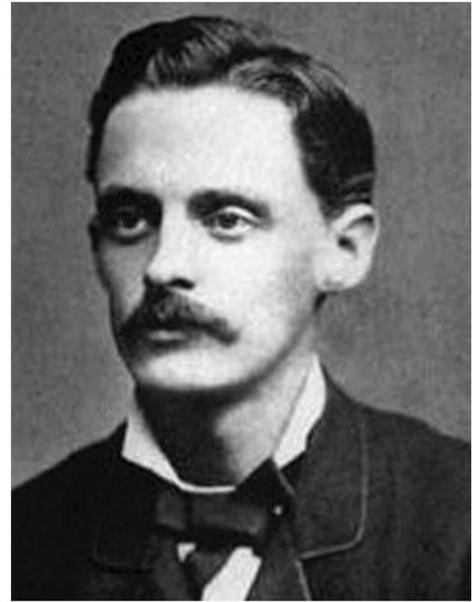
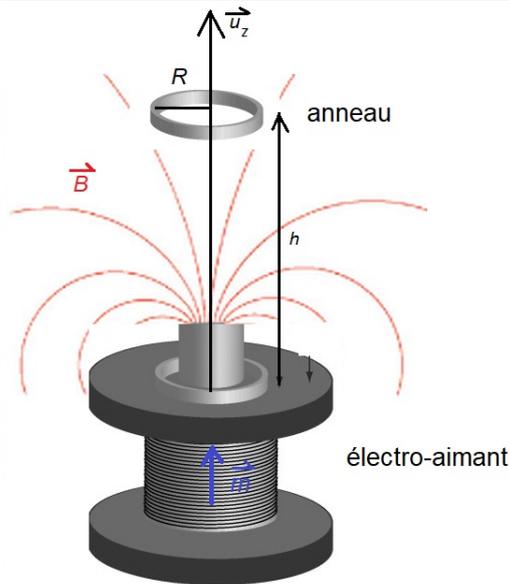
**2.a)** Exprimer, à l'instant  $t$ , en fonction de  $\alpha$  et  $v_0$  la circonférence  $C(t)$  du circuit et l'aire  $S(t)$  du circuit.

**2.b)** Exprimer, en fonction de  $B_a$ ,  $v_0$ ,  $R_l$  et de  $\alpha$  : la valeur absolue de la f.e.m  $|e(t)|$  qui apparaît dans le circuit et la valeur absolue de l'intensité  $|i(t)|$  qui circule dans le circuit.



exercice  
de colle

### Exercice 18.27 Expérience de l'anneau sauteur d'Elihu Thomson



Elihu Thomson (1853 - 1937) était un ingénieur et inventeur américain d'origine anglaise qui a contribué à la fondation de grandes compagnies électriques aux États-Unis, au Royaume-Uni et en France.

Dans l'expérience d'Elihu Thomson encore appelée expérience de l'anneau sauteur, un anneau conducteur se soulève au dessus d'une bobine parcourue par un courant alternatif, qui joue le rôle d'électroaimant.

#### 1) Champ magnétique de l'électroaimant

On modélise l'électroaimant (d'axe  $Oz$ ) comme un dipôle magnétique positionné en  $O$  (centre du repère) de moment dipolaire  $\vec{m} = m(t) \vec{u}_z$  avec  $m(t) = m_0 \cos(\omega t)$ . On rappelle qu'un tel dipôle magnétostatique crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ magnétostatique de composantes

$$\begin{cases} B_{r_s}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m(t) \cos \theta_s}{r_s^3} \\ B_{\theta_s}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(t) \sin \theta_s}{r_s^3} \\ B_{\varphi_s}(M) = 0 \end{cases}$$

dans le repère sphérique de coordonnées  $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ , de centre  $O$ , d'axe polaire  $Oz$ .

**1.a)** Afin de se placer dans le repère cylindrique d'axe  $Oz$  de coordonnées  $(r_c, \theta_c, z)$ , exprimer  $r_s$ ,  $\cos \theta_s$  et  $\sin \theta_s$  en fonction de  $(r_c, \theta_c, z)$ .

**1.b)** Déterminer alors les composantes  $(B_{r_c}, B_{\theta_c}, B_z)$  du champ magnétique en un point  $M$  de coordonnées  $(r_c, \theta_c, z)$  dans le repère cylindrique d'axe  $Oz$ .

**1.c)** Simplifier les précédentes équations dans le cas où  $r_c = a \ll z = z_0$ .

#### 2) Courant induit dans l'anneau

On modélise l'anneau par un simple fil de rayon  $a$  centré sur l'axe  $Oz$ , dans le plan  $z = z_0$ , de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ .

**2.a)** Exprimer le flux du champ magnétique extérieur à travers ce fil orienté dans le sens trigonométrique.

**2.b)** Déterminer l'équation différentielle suivie par le courant  $I(t)$  qui parcourt ce fil dans le sens trigonométrique autour de l'axe  $Oz$ .

**2.c)** En déduire l'expression du courant  $I(t)$ .

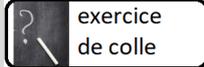
#### 3) Force de Laplace subie par l'anneau

**3.a)** Calculer la résultante des forces de Laplace.

**3.b)** Expliquez pourquoi l'anneau se soulève et se maintient à une certaine altitude  $z_0$ . Discuter de la nécessité :

- d'un régime variable,
- d'une inductance propre à l'anneau,
- d'un évasement des lignes de champ magnétique.

pour la lévitation de l'anneau.



exercice  
de colle

### Exercice 18.28 Sphère dans un four à induction

Un four à induction est un four électrique fonctionnant grâce au phénomène de chauffage par induction de métal. Les fonderies modernes utilisent ce type de four qui supprime les hauts fourneaux pour produire la fonte ; ils sont utilisés pour fondre le fer et l'acier, le cuivre, l'aluminium et les métaux précieux.

La puissance nécessaire varie de 10 kW à 42 MW, pour des volumes de fonte, respectivement, de 20 kg à 65 t de métal.

(Article wikipédia "four à induction".)



On place, dans un champ magnétique uniforme et dépendant du temps  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$ , une sphère de rayon  $R$  et de conductivité  $\gamma$ .

1) On s'intéresse à une spire (fictive) définie (dans le repère sphérique) par

- un rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ ,
- un angle depuis l'axe  $Oz$  compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$
- faisant le tour de l'axe  $Oz : \varphi \in [0; 2\pi]$ .
  - 1.a) Déterminer le rayon de la spire, sa section et la surface du disque qu'elle délimite.
  - 1.b) En déduire la résistance de la spire.
  - 1.c) Exprimer la fem dans cette spire. En déduire l'intensité qui y circule.

2) Quelle est la puissance dissipée par effet Joule

- 2.a) dans cette spire ?
- 2.b) dans la sphère ?
- 2.c) Exprimer la puissance moyenne dissipée  $\langle P_d \rangle$  dans la sphère en fonction de son volume  $V$ .

?  
exercice  
de colle

**Exercice 18.29**  
**Poêle sur une plaque à induction**



On place, dans un champ magnétique uniforme et dépendant du temps  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$ , une poêle cylindrique d'axe  $(Oz)$  de rayon  $a$ , d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\gamma$ .

- 1) Exprimer la puissance moyenne dissipée  $\langle P_d \rangle$  dans la poêle en fonction de son volume  $V$ .