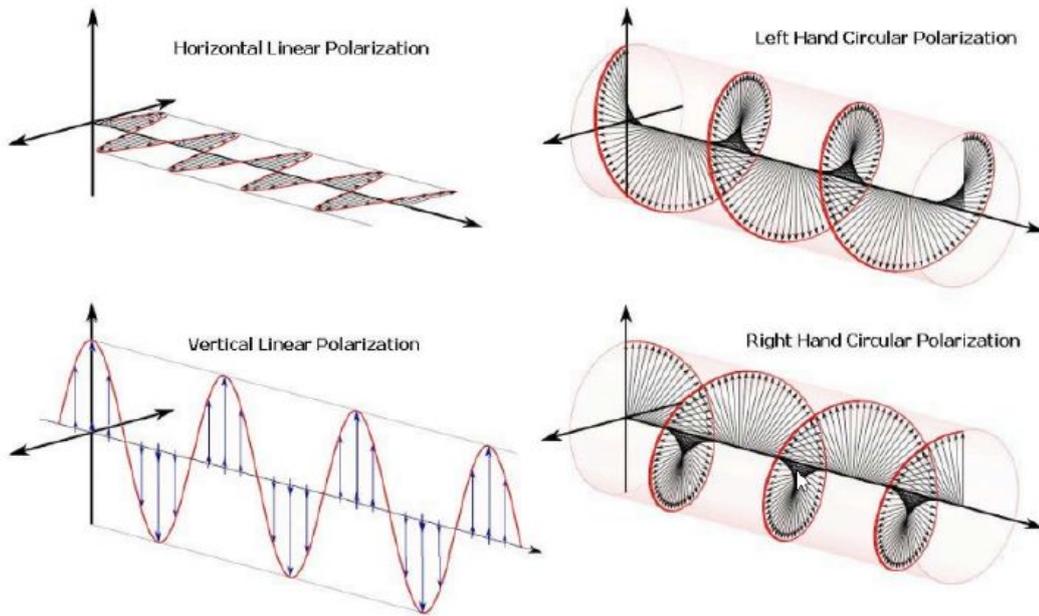


Pourquoi l'arc-en-ciel est-il coloré et la mer bleue?



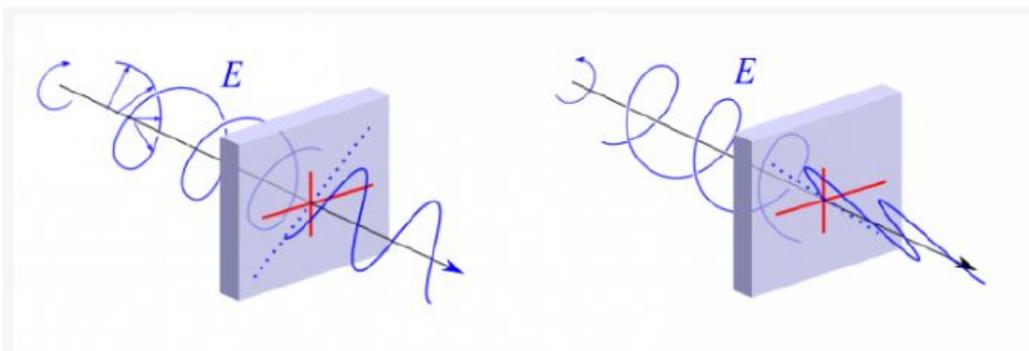
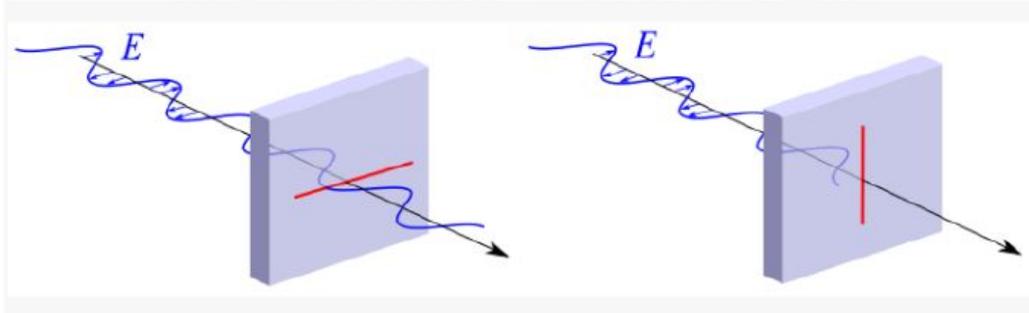
► déterminer les caractéristiques d'une OPPM



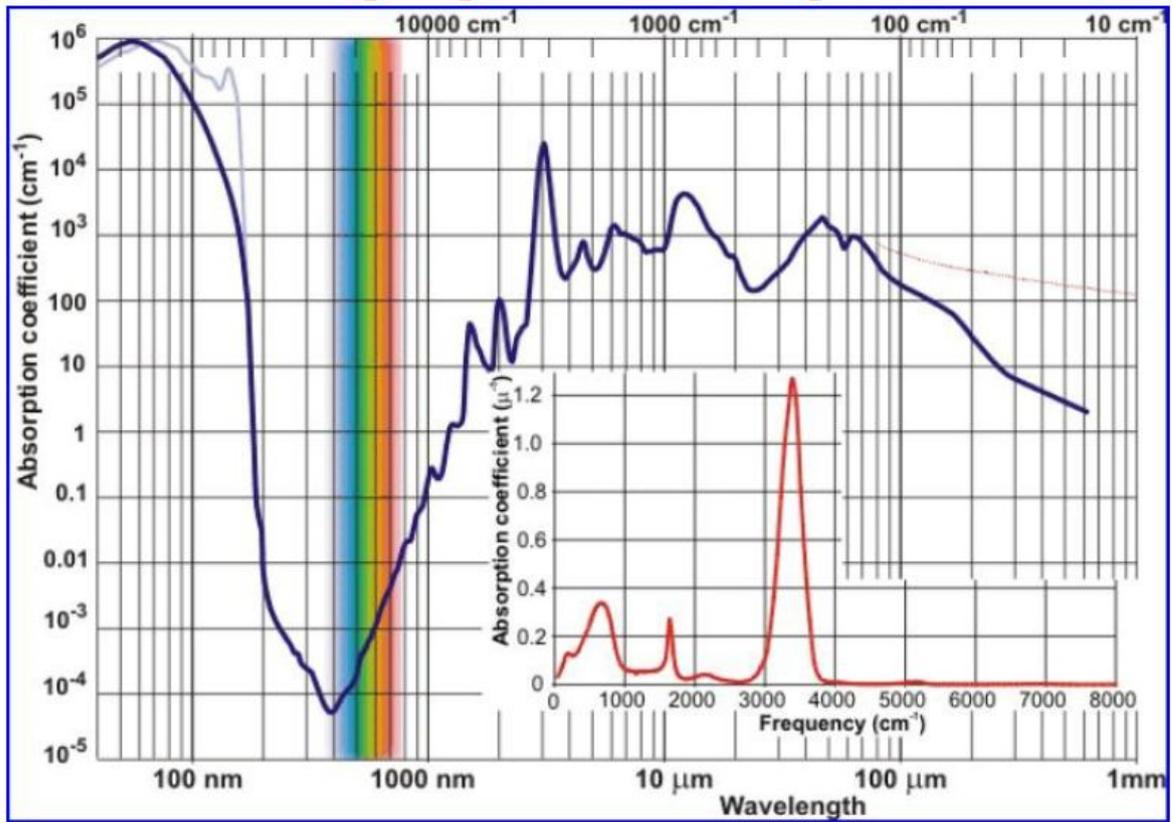
lumière polarisée linéairement

circulairement

► **expliquer l'effet d'un polariseur et d'une lame anisotrope**



► expliquer l'absorption



Ondes électromagnétiques

Les points du cours à connaître

I- Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Structure des ondes électromagnétiques

1 Equation de d'Alembert suivie par les champs électromagnétiques dans le vide *théorème*

▷ Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

d'après Maxwell Gauss car dans le vide $\rho = 0$.

$$\Delta \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Faraday. Puisque dans le vide il n'y a pas de courants ($\vec{j} = \vec{0}$), l'équation de Maxwell Ampère donne :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

▷ Le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell flux.

$$\Delta \vec{B} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Ampère puisque dans le vide il n'y a pas de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$$\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Faraday. Donc

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

⇒

dans le vide illimité, les équations de Maxwell entraînent

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

avec : $\psi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

Dans le vide, la vitesse (de phase et de groupe) de propagation des ondes électromagnétique est la vitesse de la lumière,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2 Structure d'une onde électromagnétique plane dans le vide *théorème*

en effet, Maxwell flux impose $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. Or, pour une onde plane se propageant suivant \vec{u}_z , $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, aussi $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, qui a pour solution $B_z = 0$ (on ne retient pas les solutions constantes).

De même, Maxwell Gauss impose $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. Donc $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$.

\vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation : on dit que l'onde est transverse. D'autre part, en cartésien, puisque $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, on peut écrire $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$. Aussi,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'après Maxwell Faraday.

Or, pour une onde se propageant suivant \vec{u}_z (vers les z croissants), $(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0$, ce qui nous permet de déduire

$$\vec{u}_z \wedge \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E} - \vec{B} \right) = 0$$

Comme on exclue les solutions constantes, pour une onde se propageant suivant \vec{u}_z (vers les z croissants),

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

On voit donc que \vec{B} est orthogonal à \vec{E} . \Rightarrow

L'onde électromagnétique dans le vide est transverse : \vec{B} et \vec{E} sont orthogonaux à la direction de propagation.

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre orthogonal direct.

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|.$$

Tout ce qui précède peut se résumer par

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$



Structure d'une onde plane progressive qui se propage suivant z croissant. *schéma*

La figure 1 représente la structure d'une onde plane progressive qui se propage suivant z croissant.

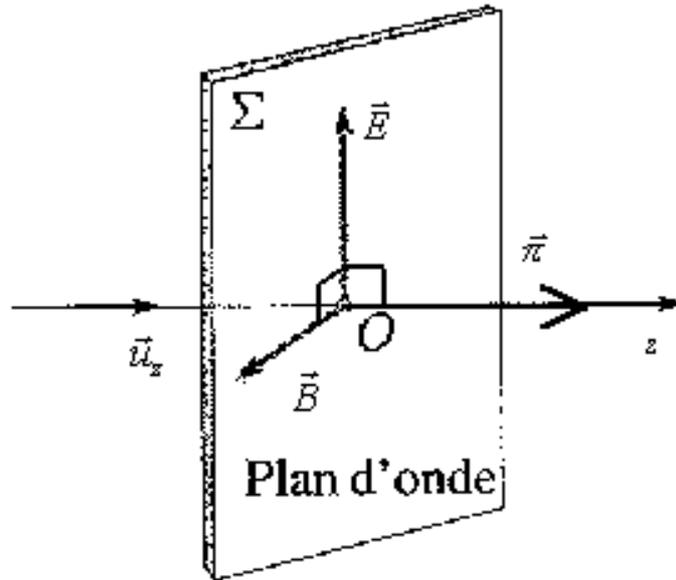


FIGURE 1 – Structure d'une onde plane progressive qui se propage suivant z croissant.

- ☞ **Caractère vectoriel des ondes électromagnétiques** *s'y retrouver*
 | Les ondes électromagnétiques sont vectorielles, transverses.

2. Divers domaines des ondes électromagnétiques

👁️ Tous les domaines des ondes électromagnétiques : schéma

La figure 2 représente les divers domaines des ondes électromagnétiques. On discerne :

- l'ARQS, approximation des régimes quasistationnaires, où les phénomènes ondulatoires ne se font pas sentir ($\lambda \gg$ taille du système) ;
- les ondes hertziennes, pour lesquelles on dispose de détecteurs qui suivent les variations de l'amplitude de l'onde (si $\nu < 10$ GHz) ;
- les ondes lumineuses (infra rouge, visible et ultra violet), pour lesquelles les détecteurs sont quadratiques ;
- les rayonnements ionisants (rayons X et γ), pour $\lambda < 1$ nm $\Leftrightarrow \nu > 3 \times 10^{18}$ Hz.

👁️ Les ondes hertziennes schéma

La figure 3 représente les subdivisions du domaine des ondes hertziennes. On voit que les longueurs d'ondes sont de tailles "humaines".

👁️ Les ondes lumineuses : schéma

La figure 4 représente le domaine des ondes lumineuses. Le visible n'est qu'une petite partie du spectre.

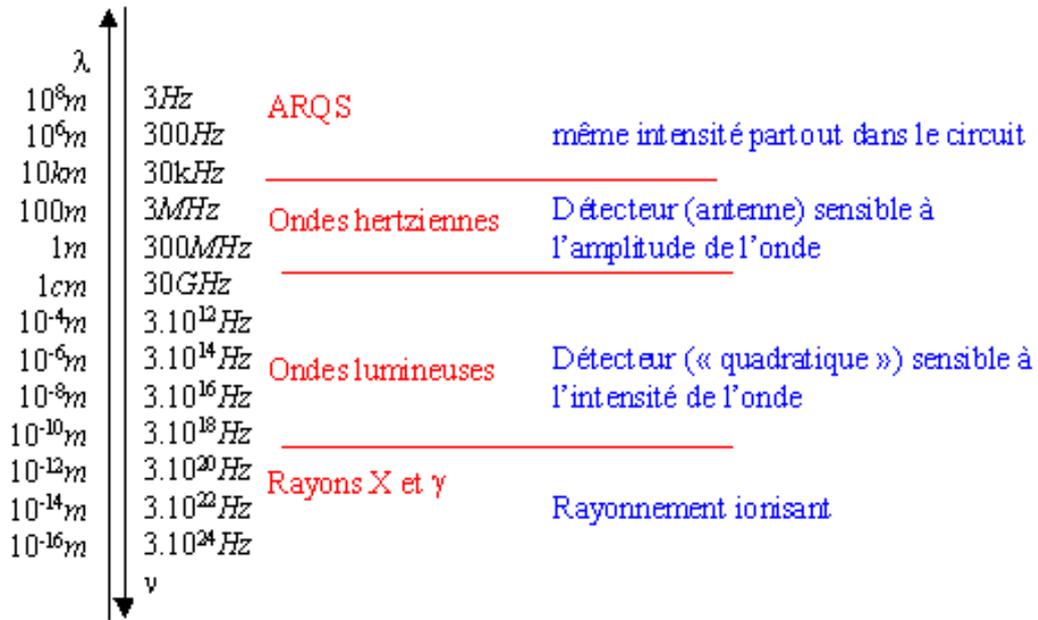


FIGURE 2 – Tous les domaines des ondes électromagnétiques :

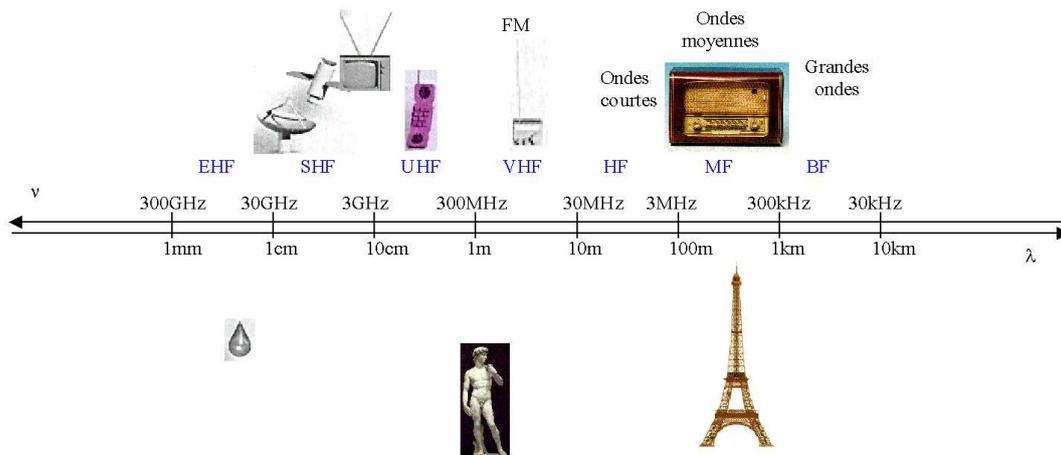


FIGURE 3 – Les ondes hertziennes

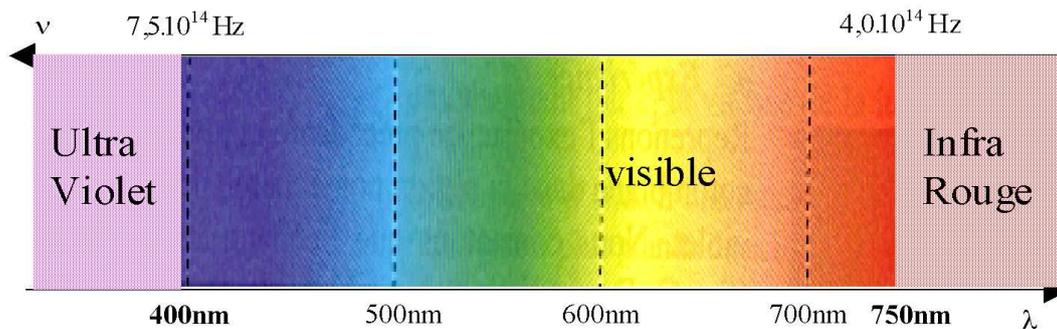


FIGURE 4 – Les ondes lumineuses :

3. Ondes monochromatiques



OPPH/OPPM et OPPHH *définition*

Une onde harmonique (ou monochromatique) est qualifiée de « plane » et progressive quand les surfaces équiphasés sont des plans :

$$\text{OPPH} : E = E(r) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Si en outre l'amplitude est uniforme l'onde est qualifiée de « plane et homogène » :

$$\text{OPPHH} : E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$



Notation complexe *s'y retrouver*

On peut associer à l'OPPM réelle

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_m \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$$

l'OPPM complexe :

$$\tilde{\psi} = \psi_m \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{+i\varphi}$$

NB : on aurait pu choisir une autre convention en changeant le signe dans l'exponentielle complexe. Aussi, il est très important de bien déclarer sa convention !

On passe du complexe au réel par

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}(\tilde{\psi}) = \frac{\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^*}{2}$$

On peut remplacer ψ par $\tilde{\psi}$ ($\tilde{\psi} = \vec{E}, \vec{B}$) dans toutes les équations linéaires, en particulier, les équations de Maxwell.

4. Photon



L'effet photo-électrique *vidéo*

L'effet photoélectrique n'a lieu qu'en présence de lumière ultraviolette.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



Le photon associé à une OPPM *définition*

à toute OPPM qui se propage dans le vide illimité,

de fréquence ν et de pulsation $\omega = 2\pi\nu$

de vecteur d'onde \vec{k} ,

on peut associer une particule, le photon, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une masse nulle} \\ \text{une vitesse } c \\ \text{une énergie : } E_\varphi = \hbar\omega = h\nu \\ \text{une quantité de mouvement : } \vec{p}_\varphi = \hbar\vec{k} \end{array} \right.$$

où $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$ J · s est la constante de Planck réduite ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$).

5. Etude énergétique

3 Energie d'une onde électromagnétique plane dans le vide *théorème*

$$B = \frac{E}{c} \Rightarrow \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2 \cdot c^2 \cdot \mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2} \Rightarrow$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique $e_{em} = e_e + e_m$ d'une onde électromagnétique plane est équipartie entre terme électrique (e_e) et terme magnétique (e_m)

$$e_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 = e_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} = \frac{e_{em}}{2}$$

Direction de propagation et vecteur de Poynting *s'y retrouver*

Dans le vide, l'énergie électromagnétique d'une onde plane se propage dans la même direction que l'onde (\vec{u}_z), suivant le vecteur de Poynting.

Grandeurs énergétiques et complexes *s'y retrouver*

On ne peut pas remplacer les grandeurs réelles par les grandeurs complexes associées dans des expressions non linéaires (comme celles relatives à l'énergie). Cependant, la valeur moyenne (dans le temps) du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left(\vec{\tilde{E}} \wedge \frac{\vec{\tilde{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

et la valeur moyenne (dans le temps) de la densité d'énergie électromagnétique est

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \text{Re} \left(\vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\tilde{E}}^* \right) + \frac{1}{4 \cdot \mu_0} \text{Re} \left(\vec{\tilde{B}} \cdot \vec{\tilde{B}}^* \right)$$

II- Phénomènes de polarisation (TP cours)

1. Polarisation des ondes planes progressives monochromatiques

Projections du champ électrique dans un plan orthogonal à la direction de propagation de l'onde *s'y retrouver*

On s'intéresse à une OPPM (de pulsation ω) qui se propage suivant les z croissants. On fixe z et on regarde au cours du temps t l'évolution du champ électrique dans un plan perpendiculaire à \vec{u}_z (avec \vec{u}_z qui vient vers nous).

On peut écrire, sans perdre en généralité, les projections E_x (suivant \vec{u}_x) et E_y (suivant \vec{u}_y) sous la forme

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \end{cases}$$

4 Différentes polarisations d'une OPPM *théorème*

- en règle générale (si $\varphi \neq 0 [\pi]$), le vecteur \vec{E} décrit une ellipse :
- si $\varphi = 0 [\pi]$, le vecteur \vec{E} décrit un segment de droite :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos \psi \cdot \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin \psi \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

- si $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, le vecteur \vec{E} décrit un cercle de rayon E_0 .
 \Rightarrow

La polarisation d'une OPPM qui se propage vers les z croissants avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

avec E_{0x} et E_{0y} positifs, est :

- elliptique en règle générale (si $\varphi \neq 0 [\pi]$),
- rectiligne si $\varphi = 0 [\pi]$ ou si $E_{0x} E_{0y} = 0$,
- circulaire si $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$.

5 Hélicité *théorème*

\Rightarrow

Dans le cas d'une OPPM qui se propage vers les z croissants avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

avec E_{0x} et E_{0y} strictement positifs,

- si $\varphi \in]0, \pi[$, l'hélicité est positive (on parle de polarisation elliptique gauche) ;
- si $\varphi \in]-\pi, 0[$, l'hélicité est négative (on parle de polarisation elliptique droite).

Vade mecum sur la polarisation des ondes électromagnétiques *schéma*

- | La figure 5 représente les diverses polarisations possibles en fonction de φ .

2. Polariseurs

Effet d'un polariseur *s'y retrouver*

Le polariseur projette le champ électrique suivant son axe $\vec{u}_{x'}$, et éteint la composante perpendiculaire (suivant $\vec{u}_{y'}$).

Le champ électrique précédent le polariseur a pour composantes suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\begin{cases} E_x(t) \\ E_y(t) \end{cases}$$

Si l'axe $\vec{u}_{x'}$ du polariseur fait un angle θ avec \vec{u}_x , le champ électrique de l'onde après

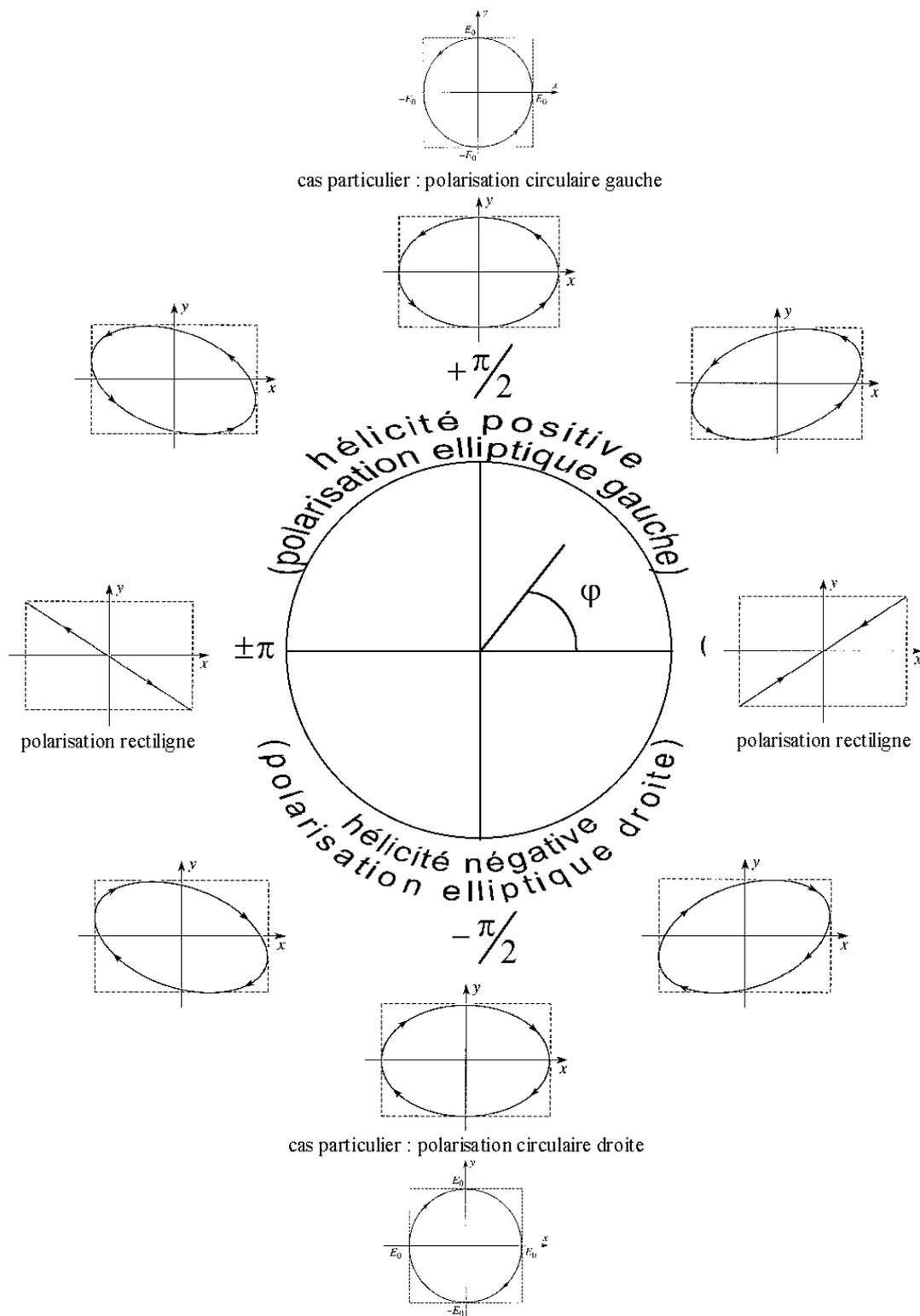


FIGURE 5 – Vade mecum sur la polarisation des ondes électromagnétiques

passage à travers le polariseur a pour composantes suivant $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$

$$\begin{cases} E_{x'} = E_x(t) \cdot \cos \theta + E_y(t) \cdot \sin \theta \\ E_{y'} = 0 \end{cases}$$

6 Loi de Malus *théorème*

$I_1 = \langle E_{x'}^2 \rangle$ est l'intensité lumineuse après un polariseur d'axe $\vec{u}_{x'}$, car $E_{y'} = 0$. L'analyseur est un polariseur dont l'axe $\vec{u}_{x''}$ fait un angle θ avec $\vec{u}_{x'}$. $I_2 = \langle E_{x''}^2 \rangle$ est l'intensité lumineuse après l'analyseur, avec $E_{x''} = E_{x'} \cdot \cos(\theta)$. Ainsi : \Rightarrow

Après un analyseur qui fait un angle θ avec une polarisation rectiligne, l'intensité est multipliée par $\cos^2 \theta$:

$$I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1$$

3. Lames à retard

Lames anisotropes *s'y retrouver*

les milieux anisotropes biréfringents sont caractérisés par deux axes orthogonaux à chacun desquels on associe un indice différent. A ces deux indices correspondent évidemment des vitesses de phase différentes.

L'axe de plus grand indice (noté n_L), donc de plus faible vitesse, est appelé axe lent (c'est Ox dans la suite) et l'autre axe rapide (Oy d'indice noté n_R).

Axes neutres d'une lame à retard *s'y retrouver*

Une onde pénétrant en incidence normale dans un tel milieu, et polarisée suivant l'axe lent ou l'axe rapide, ressortira du milieu avec la même polarisation. C'est pour cela qu'on parle d'axes neutres.

lame à retard (ou anisotrope) : *s'y retrouver*

Une OPPM qui se propage vers les z croissants qui pénètre dans une lame anisotrope avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

(avec E_{0x} et E_{0y} positifs), ressort de la lame anisotrope telle que

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi')$$

avec

- pour une lame demi-onde (ou " $\frac{\lambda}{2}$ ") : $\varphi' = \varphi \pm \pi$,
- pour une lame quart d'onde (ou " $\frac{\lambda}{4}$ ") : $\varphi' = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$.

✳ **Effet d'une lame demi onde** *s'y retrouver*

Une onde rentrante rectiligne donne une onde sortante rectiligne, les deux directions de polarisation entrante et sortante étant symétriques par rapport aux axes de la lame.

Une onde entrante elliptique gauche ressort elliptique droite et réciproquement, les axes des ellipses initiale et finale étant symétriques par rapport aux axes neutres de la lame.

✳ **Effet d'une lame quart d'onde** *s'y retrouver*

Une onde entrante, polarisée rectilignement donne une onde sortante elliptique, les axes de la lame étant les axes de l'ellipse.

En outre, si la direction de polarisation d'une onde entrante rectiligne coïncide avec une bissectrice des axes de la lame, l'onde sortante est circulaire.

Réciproquement, une onde entrante elliptique dont les axes de l'ellipse coïncident avec les axes de la lame donne une onde sortante rectiligne.

Une onde entrante circulaire donne une onde sortante rectiligne dont la direction de polarisation coïncide avec une des bissectrices de la lame.

4. Applications de la polarisation

👁 **Polarisation de la lumière naturelle** *vidéo*

La lumière naturelle n'est pas polarisée. En effet, les sources classiques de lumière (mais aussi la plupart des lasers) délivrent une lumière qui n'est pas polarisée. Aucune direction privilégiée n'est détectable avec un analyseur. On peut partiellement polariser la lumière naturelle par diffusion, comme on peut le vérifier si on analyse la lumière diffusée par de l'eau savonneuse (ou du lait) ; ou encore par réflexion, sur un dioptre séparant le milieu d'indice n_1 du milieu d'indice n_2 .

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

✳ **Angle de Brewster** *s'y retrouver*

La polarisation est totale pour un angle de réflexion particulier, appelé angle de Brewster

$$i_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Avec le verre (dans ce cas, $n_1 = 1$ et $n_2 = 1,5$), $i_B = 56^\circ$.

✳ **Molécules optiquement actives :** *s'y retrouver*

une molécule chirale n'est pas superposable à son image dans un miroir. Une telle molécule est optiquement active : elle fait tourner le plan de polarisation de la lumière.

✳ **Loi de Biot** *s'y retrouver*

on s'intéresse à un faisceau de lumière traversant sur une distance ℓ une solution de concentration C d'une molécule optiquement active. La polarisation de la lumière tourne alors d'un angle

$$\alpha = \theta_0 \cdot C \cdot \ell$$

où θ_0 est l'activité optique, caractéristique de la molécule.

✳ **Application de la loi de Biot** *s'y retrouver*

on peut, grâce à la loi de Biot, en déterminant expérimentalement l'angle α dont a tourné la polarisation dans un milieu de longueur ℓ contenant des molécules optiquement actives, d'en déduire leur concentration. Ceci est utilisé en particulier pour mesurer la teneur en sucre d'un vin, par exemple.

5. Détermination d'une polarisation inconnue

✳ **Etude de la lumière naturelle** *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière naturelle, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

Si on place une lame quart d'onde puis un analyseur après une source de lumière naturelle, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

✳ **Etude de la lumière polarisée circulairement** : *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée circulairement, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

Si on place une lame quart d'onde puis un analyseur après une source de lumière polarisée circulairement, on observe par rotation de l'analyseur une intensité nulle et une seule.

Pour déterminer le sens de rotation de l'onde polarisée circulairement :

- placer une lame quart d'onde (en sortie de la lame, l'onde est polarisée rectilignement), puis un analyseur dont la direction d'analyse est parallèle à l'axe lent de la lame,
- tourner l'analyseur pour obtenir l'extinction : l'angle dont on le tourne est $\pm \frac{\pi}{4}$, le sens de rotation de l'analyseur étant l'opposé du sens de la vibration (étant convenu que l'on regarde l'analyseur, la lumière venant vers nous).

✳ **Etude de la lumière polarisée rectilignement** *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée rectilignement, on observe par rotation de l'analyseur une intensité nulle et une seule (dans ce cas la direction d'analyse est orthogonale à la polarisation rectiligne).

Etude de la lumière polarisée elliptiquement *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée elliptiquement, on observe par rotation de l'analyseur un minimum d'intensité lumineuse (dans ce cas la direction d'analyse est parallèle au petit axe de l'ellipse) et un maximum d'intensité lumineuse (dans ce cas la direction d'analyse est parallèle au grand axe de l'ellipse).

Pour déterminer le sens de rotation et l'ellipticité :

- on place l'analyseur sur un minimum d'intensité,
- on place une lame quart d'onde de telle sorte que son axe lent coïncide avec la direction d'analyse (après la lame quart d'onde, l'onde est donc polarisée rectilignement),
- on tourne l'analyseur d'un angle β (avec $|\beta| < \frac{\pi}{2}$) jusqu'à l'extinction du signal.

La vibration elliptique est alors parfaitement déterminée :

- les axes de l'ellipse coïncident avec la direction initiale de l'axe de l'analyseur et la direction orthogonale,
- l'ellipticité de l'onde définie par $\frac{E_{\text{petit axe}}}{E_{\text{grand axe}}}$ (c'est-à-dire la longueur du demi petit axe sur celle du demi grand axe) est $\tan \beta$,
- le sens de rotation de la vibration est opposé au sens de rotation de l'analyseur (lorsque que nous le regardons de sorte que la lumière vienne vers nous).

Comment caractériser une polarisation ? *schéma*

La figure 6 représente la marche à suivre pour déterminer une polarisation inconnue.

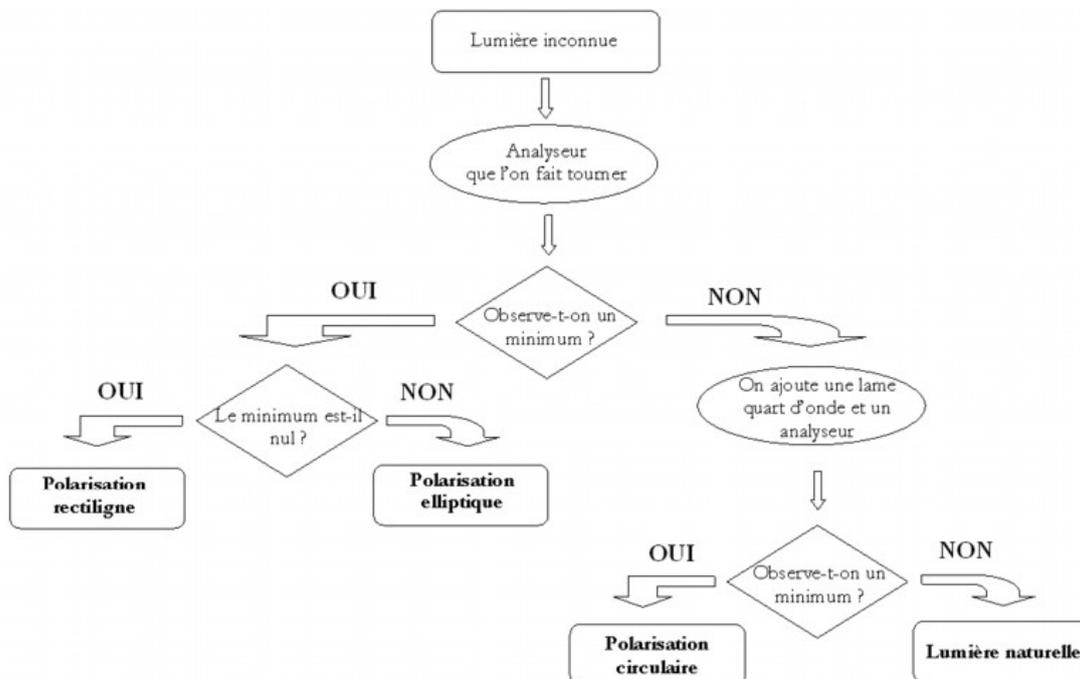


FIGURE 6 – Comment caractériser une polarisation ?

Différentes polarisations *vidéo*

L'effet d'un analyseur et de lames à retard sur différentes polarisations permet de caractériser celles-ci.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

III- Propagation d'une onde électromagnétique

1. Propagation dans les conducteurs

Conductivité d'un métal réel *s'y retrouver*

Pour un métal, la conductivité est complexe :

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j\tau\omega} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\frac{1}{\tau} - j\omega}$$

Pulsations caractéristiques : *s'y retrouver*

Il existe trois pulsations caractéristiques $\frac{1}{\tau} < \omega_p < \frac{1}{\theta}$ car la pulsation plasma est définie comme la moyenne arithmétique des deux précédentes

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{1}{\theta}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau \cdot \epsilon_0}}$$

Exemple d'ordres de grandeur pour ces trois pulsations caractéristiques dans le cas de l'aluminium. *tableau*

Le tableau 1 présente un exemple d'ordres de grandeur pour ces trois pulsations caractéristiques.

$\frac{1}{\tau}$	ω_p	$\frac{1}{\theta}$
$10^{14} Hz$	$2 \cdot 10^{16} Hz$	$10^{18} Hz$

TABLE 1 – Ordres de grandeur pour les trois pulsations caractéristiques dans le cas de l'aluminium.

Comportements du conducteur réel vis à vis de l'onde *s'y retrouver*

- si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes hertziennes), l'onde est **amortie** avec l'épaisseur de peau $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}}$,
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes visibles), l'onde ne se propage pas et est amortie : il s'agit d'une **onde évanescente**. Le corollaire est une réflexion totale de l'onde incidente sur le métal,
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ (c'est le cas à partir du domaine UV), il y a **propagation avec dispersion, mais sans absorption**,

- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ (c'est le cas pour les rayonnements X), il y a **propagation sans dispersion ni absorption**, comme dans le vide.

 **le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence.** *schéma*

La figure 7 représente le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence. Dans le cas de la ionosphère (partie supérieure de l'atmosphère), un plasma assimilable à un métal, avec une pulsation plasma $\omega_p \sim 10MHz$, on distinguera

- les grandes ondes (pour lesquelles $\omega \ll \omega_p$) qui se réfléchissent sur la ionosphère
- les ondes courtes, FM TV ou satellite (pour lesquelles $\omega \gg \omega_p$) pour qui la ionosphère est transparente.

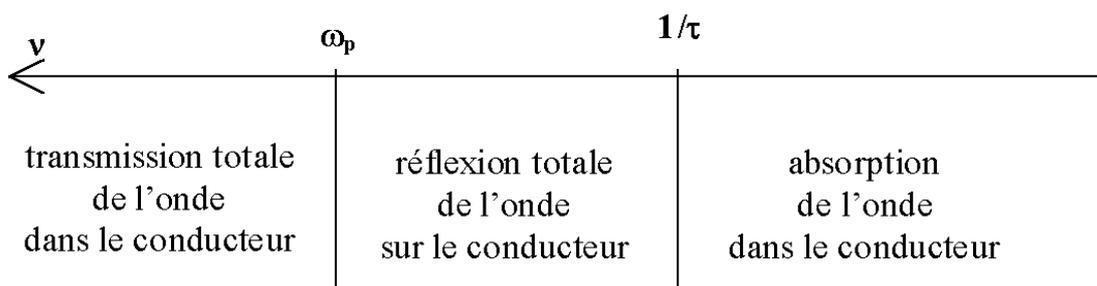


FIGURE 7 – le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence.

2. Propagation dans un diélectrique

 **Milieu DLHI** *s'y retrouver*

Le milieu est DLHI, c'est à dire

- diélectrique : non conducteur, sans charges ;
- linéaire : l'effet (\vec{p}) est proportionnel à la cause (\vec{E}) ;
- homogène : le facteur de proportionnalité ne dépend pas de l'endroit où l'on se trouve dans le milieu ;
- isotrope : ce facteur de proportionnalité est le même dans toutes les directions.

 **Indice complexe du milieu : définition**

La relation de dispersion peut se simplifier en

$$\tilde{k} = \pm \tilde{n} \frac{\omega}{c}$$

\tilde{n} (sans dimension) est appelé indice du milieu diélectrique. Il est complexe, on peut écrire : $\text{Re}(\tilde{n}) = n_r$ et $\text{Im}(\tilde{n}) = -n_i$.



Structure de l'onde dans un milieu diélectrique à retenir

L'onde plane progressive monochromatique qui se propage avec un vecteur d'onde $\vec{k} = \tilde{k} \cdot \vec{u}_z = \tilde{n} \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$ est telle que

$$\vec{B} = \frac{\tilde{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \tilde{n} \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$



Forme des ondes : s'y retrouver

$$\vec{E} = \left[E_+ \cdot e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} e^{-j \cdot (\omega \cdot (t - n_r \frac{z}{c}) - \varphi_+)} + E_- \cdot e^{+n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} e^{-j \cdot (\omega \cdot (t + n_r \frac{z}{c}) - \varphi_-)} \right] \cdot \vec{u}$$

L'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement est de la forme $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot z - \varphi)} \vec{u}$, soit pour le champ réel

$$\vec{E} = \left[\begin{array}{l} E_+ \cdot e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} \cos \left(\omega \cdot \left(t - n_r \frac{z}{c} \right) - \varphi_+ \right) \\ + E_- \cdot e^{+n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} \cos \left(\omega \cdot \left(t + n_r \frac{z}{c} \right) - \varphi_- \right) \end{array} \right] \cdot \vec{u}$$



la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde. schéma

La figure 8 représente la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde (données : K.F. Palmer and D. Williams, Optical Properties of water in the near infrared, Journal of the Optical Society of America, V.64, pp. 1107-1110, August, 1974.)

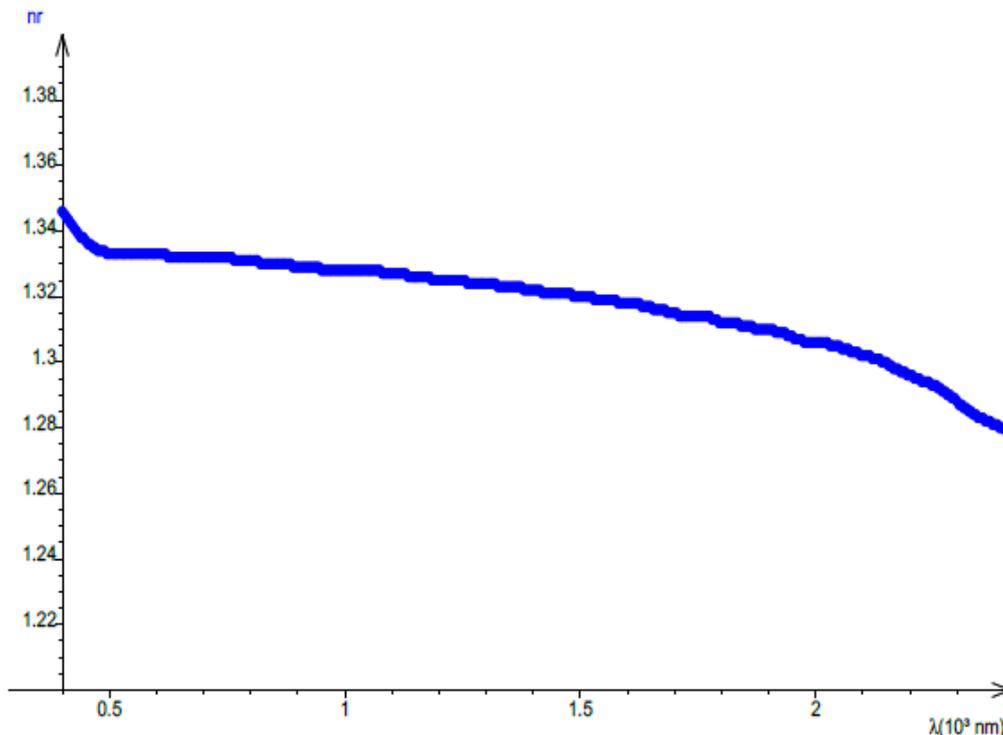


FIGURE 8 – la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde.

✳ Variation de l'indice avec la longueur d'onde - formule de Cauchy *s'y retrouver*

On remarque que n_r est une fonction croissante de la fréquence ν . Ceci est pris en compte par exemple dans la formule de Cauchy en optique :

$$n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Puisque $n_r = f(\nu)$, la vitesse de phase de l'onde dépend de la fréquence : on est en présence d'un *milieu dispersif*.

✳ Absorption *s'y retrouver*

Si $n_i \neq 0 \Rightarrow \tilde{n} \in C$, l'onde qui se propage est une *onde amortie* : l'amplitude de l'onde est atténuée par le terme $e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}}$. Il y a absorption de l'onde par le milieu de propagation.

👁 l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde. *schéma*

La figure 9 représente l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde (données : K.F. Palmer and D. Williams, Optical Properties of water in the near infrared, Journal of the Optical Society of America, V.64, pp. 1107-1110, August, 1974.)

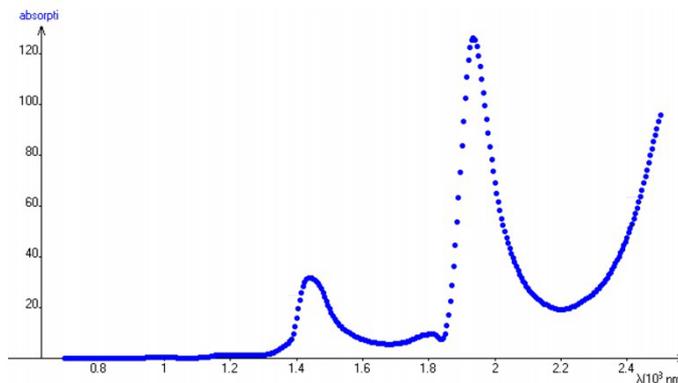


FIGURE 9 – l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde.

3. Interface entre deux milieux

✳ Incidence normale *s'y retrouver*

On s'intéresse à une interface en $z = 0$.

Dans le milieu $z < 0$ d'indice \tilde{n}_1 se propagent :

- l'onde incidente : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_i = \tilde{n}_1 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$;
- l'onde réfléchie : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \tilde{n}_1 (-\vec{u}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = -\frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$.

Dans le milieu $z > 0$ d'indice \tilde{n}_2 se propage :

- l'onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_t = \tilde{n}_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_t}{c} = \frac{\tilde{n}_2}{c} \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_y$.

✳ **Relation de passage sur un dioptre** *s'y retrouver*

On admet qu'à l'interface ($z = 0$), le champ électromagnétique est continu :

$$\begin{cases} \forall t \vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t) = \vec{E}_t(z=0, t) \\ \forall t \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) = \vec{B}_t(z=0, t) \end{cases}$$

✳ **Coefficients de réflexion et transmission** *s'y retrouver*

Les coefficients en amplitude sont :

- coefficients de réflexion tels que :

$$\vec{E}_r(z=0, t) = \tilde{r}_E \vec{E}_i(z=0, t)$$

$$\text{et } \vec{B}_r(z=0, t) = \tilde{r}_B \vec{B}_i(z=0, t);$$

- coefficients de transmission tels que :

$$\vec{E}_t(z=0, t) = \tilde{t}_E \vec{E}_i(z=0, t)$$

$$\text{et } \vec{B}_t(z=0, t) = \tilde{t}_B \vec{B}_i(z=0, t).$$

Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2$
- coefficient de transmission : $T = 1 - R$.

✳ **Coefficients de réflexion dans le cas d'une interface vide/métal** *s'y retrouver*

On peut montrer que dans le domaine optique, dans le cas d'une interface vide/métal $\tilde{r}_E = -1$, ce qui est à relier à un déphasage de π supplémentaire (cf. optique ondulatoire) ;
 $R = 1 \Rightarrow T = 0$, le métal se comporte comme un miroir.



Valeurs numériques (compléments) Ondes électromagnétiques

Divers domaines des ondes électromagnétiques

- l'ARQS, approximation des régimes quasistationnaires, où les phénomènes ondulatoires ne se font pas sentir ($\lambda \gg$ taille du système) ;
- les ondes hertziennes, pour lesquelles on dispose de détecteurs qui suivent les variations de l'amplitude de l'onde (si $\nu < 10$ GHz) ;
- les ondes lumineuses (infra rouge, visible et ultra violet), pour lesquelles les détecteurs sont quadratiques ;
- les rayonnements ionisants (rayons X et γ), pour $\lambda < 1$ nm $\Leftrightarrow \nu > 3 \times 10^{18}$ Hz.

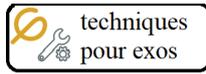
Ordres de grandeur de flux énergétiques

- dans le cas d'un laser hélium-néon dont le rayon est de diamètre 1 mm et la puissance 1 mW : $\Pi \approx 10^3$ W \cdot m $^{-2}$ et $E \approx 10^3$ V \cdot m $^{-1}$;
- dans le cas du flux solaire sur Terre (1,36 kW \cdot m $^{-2}$) : $\Pi \approx 10^3$ W \cdot m $^{-2}$ et $E \approx 10^3$ V \cdot m $^{-1}$;
- dans le cas où l'on est contre un téléphone portable qui émet une puissance 100 μ W à une distance 10 $^{-2}$ m, $\Pi \approx 1$ W \cdot m $^{-2}$ et $E \approx 30$ V \cdot m $^{-1}$.

Ordres de grandeur des trois pulsations caractéristiques

dans le cas de l'aluminium :

$\frac{1}{T}$	ω_p	$\frac{1}{\theta}$
10^{14} Hz	$2 \cdot 10^{16}$ Hz	10^{18} Hz



Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

Propagation d'ondes électromagnétiques dans les isolants

Équation d'onde

- écrire les équations de Maxwell en complexe en remplaçant ε_0 par $\underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0$, les charges et courants étant nuls ;
- les découpler grâce à

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$$

pour aboutir à l'équation d'onde (de d'Alembert) suivie par \underline{E} .

Équation de dispersion

- injecter dans l'équation d'onde une OPPM :

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \exp[-j(\omega t - \underline{k}z)]$$

- puis poser

$$\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c} \text{ avec l'indice } \underline{n} = n_r + j n_i$$

Détermination de l'onde dans le diélectrique

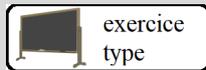
- réinjecter dans la forme de l'onde complexe, s'il y a deux possibilités on somme les solutions (superposition).
- repasser aux réels.
- Les conditions aux limites donnent les constantes.

Comportements du diélectrique vis à vis de l'onde

- si $n_i \simeq 0 \Rightarrow n \simeq n_r \in \mathbb{R}$: l'onde qui se propage est non amortie. La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{c}{n_r}$$

- si $n_i \neq 0 \Rightarrow \underline{n} \in \mathbb{C}$, l'onde qui se propage est amortie. Il y a absorption de l'onde par le milieu de propagation.



Exercice 19.1 (le prof fait cet exercice type jeudi)

Propagation dans un conducteur

1) On s'intéresse à un milieu diélectrique.

1.a) Réécrire les équations de Maxwell pour les champs complexes associés dans le milieu diélectrique, en remplaçant ε_0 par $\underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0$, les charges et courants étant nuls.

1.b) Démontrer l'équation de d'Alembert pour le champ électrique et pour le champ magnétique.

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

$$\underline{E} = E_0 e^{-j(\omega t - \underline{k}z - \varphi)} \vec{u}$$

1.c) Trouver la relation de dispersion.

2) Données relatives à l'eau

La partie réelle n_r de l'indice de l'eau varie de 1,329 à 1,343 d'un bout à l'autre du spectre visible, entre le rouge et le bleu. L'absorption de l'eau est donnée par le graphique suivant :

2.a) L'eau est-elle un milieu dispersif dans le visible? Modéliser les variations de la partie réelle de l'indice de l'eau grâce à la formule de Cauchy : $n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$.

2.b) L'indice de l'eau a-t-il une partie imaginaire non nulle n_i dans le visible? Justifier.

3) Application à la couleur de la mer

3.a) Dans quelle partie du spectre visible l'absorption de l'eau est-elle la plus faible?

3.b) Proposer une interprétation à la couleur de la mer.

4) Vitesses de phase et de groupe

4.a) L'indice optique correspond-il à une vitesse de phase ou à une vitesse de groupe?

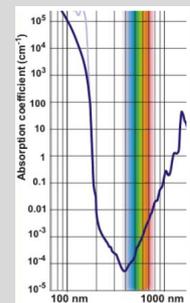
4.b) Démontrer la relation de Rayleigh entre vitesses de phase et de groupe :

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$$

4.c) Exprimer la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de phase, de n , de B et de λ .

4.d) Comparer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

4.e) Que se passe-t-il si le milieu est non dispersif?



1)

1.a) Maxwell flux : $\text{div} \vec{\tilde{B}} = 0$;Maxwell Faraday : $\text{rot} \vec{\tilde{E}} = -\frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t}$;Maxwell Ampère : $\text{rot} \vec{\tilde{B}} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t}$;Maxwell Gauss : $\text{div} \left(\vec{\tilde{E}} \right) = 0$.

1.b) le laplacien vectoriel du champ électrique complexe est

$$\Delta \vec{\tilde{E}} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{\tilde{E}} \right) - \overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{E}} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{E}} \right) \text{ d'après Maxwell Gauss}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\tilde{E}} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{E}} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \vec{\tilde{B}} \right) \text{ d'après Maxwell Faraday}$$

$$\text{Maxwell Ampère} \Rightarrow \Delta \vec{\tilde{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \vec{\tilde{B}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\epsilon}_r \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta \vec{\tilde{E}} = \frac{\tilde{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\tilde{E}}}{\partial t^2}$$

Le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \vec{\tilde{B}} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{\tilde{B}} \right) - \overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{B}} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{B}} \right) \text{ d'après Maxwell flux}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\tilde{B}} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\text{rot} \vec{\tilde{B}} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial t} \right) \text{ d'après Maxwell Ampère}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\tilde{B}} = -\frac{\tilde{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \vec{\tilde{E}} \right) = -\frac{\tilde{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t} \right) \text{ d'après Maxwell Faraday}$$

Donc

$$\Delta \vec{\tilde{B}} = \frac{\tilde{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\tilde{B}}}{\partial t^2}$$

1.c) En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\tilde{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_r \Rightarrow \tilde{k}^2 = \tilde{\epsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

2) Données relatives à l'eau

2.a) L'eau est un milieu dispersif dans le visible car n_r varie avec λ . On a donc

$$\begin{cases} n_r(\lambda_1 = 400nm) = n_1 = 1,343 \\ n_r(\lambda_2 = 750nm) = n_2 = 1,329 \end{cases}$$

Si on modélise les variations de la partie réelle de l'indice de l'eau grâce à la formule de Cauchy : $n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$,

$$\begin{cases} n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \\ n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{n_1 - n_2}{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}} = \frac{1,343 - 1,329}{\frac{1}{(400 \times 10^{-9})^2} - \frac{1}{(750 \times 10^{-9})^2}} = 3,13 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2}$$

et $A = 1,34$.2.b) L'eau est un milieu absorbant, aussi, l'indice de l'eau a une partie imaginaire non nulle n_i dans le visible.

3) Application à la couleur de la mer

3.a) L'absorption de l'eau est la plus faible pour les longueurs d'onde les plus faibles, c'est-à-dire pour le bleu.

3.b) Après avoir traversé une épaisseur suffisante dans la mer, la lumière initialement blanche est bleue : les autres longueurs d'onde ont été absorbées. C'est ce que l'on voit en plongée. A la surface de l'eau, la réflexion au fond (sur le sable), renvoie une lumière principalement bleue.

4)

4.a) L'indice optique est relatif à une longueur d'onde : il correspond à la vitesse de phase.

4.b)

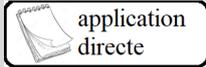
$$4.c) \quad v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + \frac{B}{\lambda^2}}$$

$$\text{D'où : } \frac{dv_\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \cdot c \cdot \frac{B}{\lambda^3}}{n^2} = \frac{2 \cdot v_\varphi \cdot \frac{B}{\lambda^3}}{n}$$

$$v_g = v_\varphi \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot B}{n \cdot \lambda^2}\right)$$

4.d) $v_g < v_\varphi$.

4.e) Si le milieu est non dispersif, $B = 0 \Rightarrow v_g = v_\varphi$.



application
directe

Exercice 19.2 pour s'entraîner

Détection de lumière au voisinage de l'extinction

Un polariseur et un analyseur sont réglés à l'extinction. On fait tourner l'analyseur d'un angle α .

1) Exprimer l'intensité I_2 après l'analyseur en fonction de I_1 , l'intensité entre le polariseur et l'analyseur, et de α .

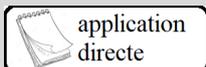
2) Pour détecter de la lumière après le polariseur, il faut que l'intensité soit supérieure au bruit, qui vaut $5\% \cdot I_1$. Déterminer numériquement en secondes d'angle, l'angle minimum α_{min} dont il faut tourner l'analyseur pour détecter de la lumière.

1) Loi de Malus : $I_2 = \cos^2(\beta) \cdot I_1$ avec $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$I_2 = \sin^2(\alpha) \cdot I_1$$

2) $I_2 = \sin^2(\alpha) \cdot I_1 > 5\% \cdot I_1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) \cdot I_1 > 5\%$ soit $\alpha^2 > 5\% \Leftrightarrow$

$$\alpha > \alpha_{min} = \sqrt{5\%} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 46''$$



application
directe

Exercice 19.3 pour s'entraîner

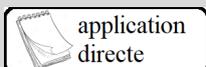
Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée rectilignement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère $(Oxyz)$ du champ électrique $\vec{\tilde{E}}$ de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation ω , de norme de vecteur d'onde k), polarisée rectilignement suivant l'axe (Oy) se propageant suivant une direction faisant, dans le plan (xOz) , un angle de 45° avec l'axe (Oz) .

On notera E_0 l'amplitude réelle du champ électrique.

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = 0 \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{-j \cdot \left(\omega \cdot t - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot x - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot z + \varphi\right)} \\ \tilde{E}_z = 0 \end{cases}$$



application
directe

Exercice 19.4 pour s'entraîner

Décomposition d'une OPPM polarisée rectilignement

Soit une onde plane progressive monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$, polarisée rectilignement selon un axe qui fait l'angle α avec (Ox) .

1) Donner l'expression des composantes E_x et E_y du champ électrique. On prendra E_0 comme amplitude

de ce champ.

- 2) Montrer que la superposition de deux OPPM de mêmes caractéristiques polarisées circulairement :

$$\begin{cases} E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z + \alpha) \\ E_y = E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z + \alpha) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z - \alpha) \\ E_y = -E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z - \alpha) \end{cases}$$

redonne l'OPPM polarisée rectilignement. On exprimera E'_0 en fonction de E_0 .

- 1) L'expression des composantes E_x et E_y du champ électrique est :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos \alpha \cos(\omega.t - k.z) \\ E_y = E_0 \cdot \sin \alpha \cos(\omega.t - k.z) \end{cases}$$

- 2) On calcule :

$$E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z + \alpha) + E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z - \alpha) = 2 \cdot E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Puis } E_y = E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z + \alpha) - E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z - \alpha) = 2 \cdot E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z) \cdot \sin(\alpha)$$

Cela redonne bien l'OPPM polarisée rectilignement si on prend :

$$E'_0 = \frac{E_0}{2}$$



application
directe

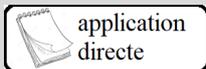
Exercice 19.5 pour s'entraîner Polariseur circulaire

On s'intéresse à un filtre suivi d'un polariseur, lui-même suivi d'une lame quart d'onde avec ses lignes neutres à 45° de la direction du polariseur.

- 1) On envoie de la lumière naturelle dans le dispositif. Quelle est la polarisation de la lumière ainsi produite ? On retourne le dispositif donc la lumière naturelle rencontre d'abord la lame quart d'onde puis le polariseur.
- 2) La polarisation de la lumière produite a-t-elle changé ?

1) La lumière naturelle, après passage dans le polariseur, est polarisée rectilignement. Après passage dans la lame quart d'onde, elle devient polarisée circulairement.

2) En sens inverse, la lumière naturelle, après passage dans la lame, est toujours non polarisée. Le passage dans le polariseur la polarise rectilignement.



application
directe

Exercice 19.6 pour s'entraîner Détection de l'hélicité d'une polarisation circulaire

On s'intéresse à un filtre suivi d'une lame quart d'onde (qui ajoute un déphasage $+\frac{\pi}{2}$ sur l'axe vertical), lui-même suivi d'un polariseur, qui peut librement tourner dans son plan. On envoie de la lumière polarisée circulairement dans le dispositif.

- 1) Pour quelle direction du polariseur obtient-on l'extinction si :
 - 1.a) la polarisation est circulaire gauche ?
 - 1.b) la polarisation est circulaire droite ?

- 1) 1.a) Pour une lumière polarisée circulairement gauche :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega.t) \end{cases}$$

le passage dans une lame quart d'onde donne une onde

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

polarisée rectilignement selon la première bissectrice. On obtient donc un minimum nul pour une direction du polariseur perpendiculaire à cette direction, c'est à dire selon la seconde bissectrice.

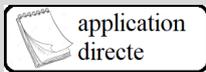
1.b) Pour une lumière polarisée circulairement droite :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = -E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

le passage dans une lame quart d'onde donne une onde

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = -E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = -E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

polarisée rectilignement selon la seconde bissectrice. On obtient un minimum nul pour une direction du polariseur perpendiculaire à cette direction, c'est à dire selon la première bissectrice.



Exercice 19.7 pour s'entraîner

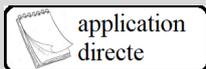
Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée rectilignement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère $(Oxyz)$ du champ électrique \vec{E} de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation ω , de norme de vecteur d'onde k), se propageant suivant l'axe (Ox) , polarisée rectilignement, le champ électrique faisant un angle de 60° avec l'axe (Oy) .

On notera E_0 l'amplitude réelle du champ électrique.

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = 0 \\ \tilde{E}_y = \frac{1}{2} E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)} \\ \tilde{E}_z = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)} \end{cases}$$



Exercice 19.8 pour s'entraîner

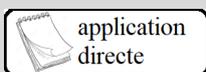
Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée elliptiquement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère $(Oxyz)$ du champ électrique \vec{E} de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation ω , de norme de vecteur d'onde k), se propageant suivant l'axe (Oy) , polarisée elliptiquement à droite.

Le demi grand axe de l'ellipse, étant suivant (Oz) , est trois fois plus grand que le demi petit axe (noté E_0). Le déphasage entre les deux axes de l'ellipse est $\frac{\pi}{2}$.

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot y + \varphi + \frac{\pi}{2})} \\ \tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_z = 3 \cdot E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot y + \varphi)} \end{cases}$$



Exercice 19.9 pour s'entraîner

Variation de l'intensité lumineuse avec la loi de Malus

Un faisceau parallèle de lumière traverse un polariseur fixe. Son intensité est notée I_0 après ce polariseur. Le faisceau lumineux traverse ensuite un second polariseur dont l'axe fait un angle θ avec l'axe du premier

polariseur.

1) Déterminer l'intensité lumineuse I sortant du second polariseur (loi de Malus).

2) Initialement, $\theta = \theta_i$, et l'intensité lumineuse sortant du second polariseur est I_i . On fait varier θ de $d\theta \ll \pi$.

2.a) Exprimer la variation relative $\frac{dI}{I_i}$ de l'intensité lumineuse sortant du second polariseur, en fonction de θ_i et $d\theta$.

Application : $d\theta = 1^\circ$, que vaut $\frac{dI}{I_i}$

2.b) si $\theta_i = 10^\circ$?

2.c) si $\theta_i = 80^\circ$?

1) $I = I_0 \cdot \cos^2(\theta)$.

2)

2.a) $\frac{dI}{I_i} = -2 \cdot \tan(\theta_i) \cdot d\theta$.

2.b) si $\theta_i = 10^\circ$, $\frac{dI}{I_i} = -0,61\%$.

2.c) si $\theta_i = 80^\circ$, $\frac{dI}{I_i} = -20\%$.



application
directe

Exercice 19.10 pour s'entraîner

Caractéristiques d'une OPPM

On se place dans un repère cartésien $(Oxyz)$.

Un faisceau laser émet une onde plane progressive (suivant \vec{u}), monochromatique (de longueur d'onde λ), polarisée rectilignement suivant (Oz) .

On pose $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u})$.

1) Ecrire, en fonction de E_0 (l'amplitude du champ électrique) et de λ , les composantes dans le repère cartésien $(Oxyz)$

1.a) du vecteur d'onde \vec{k} ,

1.b) du champ électrique \vec{E} ,

1.c) du champ magnétique \vec{B} ,

1.d) et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

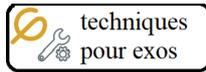
1) Composantes dans le repère cartésien $(Oxyz)$:

1.a) $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$,

1.b) $\vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta) \cdot x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta) \cdot y\right) \cdot (0, 0, 1)$,

1.c) $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta) \cdot x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta) \cdot y\right) \cdot (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$,

1.d) $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c} \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta) \cdot x - \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta) \cdot y\right) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$.



Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Modélisation du conducteur

Etudier un électron de charge q , de masse m supposé ponctuel qui ressent :

- une force de frottement fluide $-f \dot{r} \vec{u}_r$ (due à l'interaction avec les ions du réseau métallique, éventuellement nulle s'il s'agit d'un plasma dilué) ;
- la force de Lorentz due au champ électrique extérieur variable $q \vec{E}_{ext}(z, t)$ (la partie magnétique est négligeable pour des électrons non relativistes).

On trouve que $\rho \approx 0$ et que la conductivité est complexe :

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j\tau\omega} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\frac{1}{\tau} - j\omega}$$

Équation d'onde

- écrire les équations de Maxwell en complexe
- les découpler grâce à

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$$

pour aboutir à une équation d'onde suivie par \vec{E} .

Équation de dispersion

- injecter dans l'équation d'onde une OPPM :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-j(\omega t - \underline{k}z)]$$

- puis simplifier la relation de dispersion trouvée suivant le domaine où l'on se trouve :

$$\frac{1}{\tau} < \omega_p = \sqrt{\frac{1}{\tau\theta}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau\epsilon_0}} < \frac{1}{\theta}$$

Détermination de l'onde dans le conducteur

- Trouver la solution de la relation de dispersion en utilisant

$$\underline{k} = k_r + j k_i$$

(avec k_r et k_i deux réels) qui donne deux équations réelles.

- réinjecter dans la forme de l'onde complexe, s'il y a deux possibilités pour k_r et k_i , on somme les solutions (superposition).
- repasser aux réels.
- Les conditions aux limites donnent les constantes.

Comportements du conducteur vis à vis de l'onde

- si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$, l'onde est **amortie**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k_i z) \cos(\omega t - k_r z)$$

avec l'épaisseur de peau $\delta = 1/k_i$,

- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$, l'onde ne se propage pas et est amortie : il s'agit d'une **onde évanescente**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k_i z) \cos(\omega t)$$

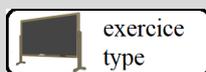
(réflexion totale de l'onde incidente sur le métal).

- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$, il y a **propagation avec dispersion** ($v_\varphi \neq \text{cste}$), **mais sans absorption** :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r z)$$

- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$, il y a **propagation sans dispersion** ($v_\varphi = \text{cste}$) **ni absorption**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r z)$$



Exercice 19.11 (le prof fait cet exercice type jeudi)
Propagation dans un conducteur

1) Montrer que les charges dans un conducteur relaxent avec un temps caractéristique θ et que que la densité volumique de courant complexe \vec{j} est de la forme $\vec{j} = \underline{\gamma}(\omega) \vec{E}$ avec $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j\tau\omega}$.

2) On s'intéresse à l'aluminium : $\frac{1}{\tau} = 10^{14}$ Hz et $\frac{1}{\theta} = 10^{18}$ Hz. Que vaut $\omega_p = \sqrt{\frac{1}{\tau\theta}}$?

3) Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le métal. En déduire la relation de dispersion.

4) Déterminer le comportement du conducteur vis à vis de l'onde dans les cas suivants (on déterminera les domaines relatifs des ondes électromagnétiques) :

- si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$;
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$;
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$;
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$.

1) L'équation locale de conservation de la charge est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Si la loi d'Ohm s'applique (c'est à dire pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$), $\vec{j} = \gamma_0 \cdot \vec{E}$ et la conservation de la charge devient

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \cdot \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

d'après l'équation de Maxwell Gauss. L'équation de conservation de la charge donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Aussi, on peut poser le temps caractéristique

$$\theta = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0}$$

On peut donc voir que les charges relaxent ($\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$) sur un temps caractéristique θ .

On s'intéresse à un électron de charge q , de masse m supposé ponctuel qui ressent :

- une force de frottement fluide $-f \cdot \vec{v}$ (très faible, due à l'interaction avec les ions du réseau métallique) ;
- la force de Lorentz due au champ électrique extérieur variable $q \cdot \vec{E}_{ext}(z, t)$.

En effet, une onde électromagnétique polarisée rectilignement impose

$$\vec{E}_{ext}(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) \vec{u}_x$$

▷ En posant le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{f}$ montrer que la densité volumique de courant complexe \vec{j} est de la forme

$$\vec{j} = \tilde{\gamma}(\omega) \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j \cdot \tau \cdot \omega}$$

Le principe fondamental de la dynamique donne, projeté suivant \vec{u}_x :

$$m \cdot \ddot{x} = -f \cdot \dot{x} + q \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$$

Pour résoudre cette équation, on cherche les solutions sous forme complexe : $x = \text{Re}(\tilde{x})$ avec $\tilde{x} = x_0 \cdot e^{j(kz - \omega \cdot t + \varphi)}$:

$$m \cdot (-j \cdot \omega)^2 \cdot \tilde{x} + f \cdot (-j \cdot \omega) \cdot \tilde{x} = q \cdot E_0 e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot z)}$$

On trouve donc comme vitesse complexe de la particule chargée

$$\vec{v} = -j \cdot \omega \cdot \tilde{x} \vec{u}_x = \frac{q \cdot E_0 e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot z)}}{-j \cdot m \cdot \omega + f} \vec{u}_x$$

On en déduit la densité volumique de courant :

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v} = \frac{n \cdot q^2}{-j \cdot m \cdot \omega + f} \vec{E} = \frac{\frac{n \cdot q^2}{f}}{1 - j \cdot \frac{m}{f} \omega} \vec{E}$$

où n est la densité volumique des électrons. En posant le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{f}$ et la conductivité en basse fréquence $\gamma_0 = \frac{n \cdot q^2}{f}$, on arrive à

$$\vec{j} = \tilde{\gamma}(\omega) \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j \cdot \tau \cdot \omega}$$

2) La pulsation plasma est définie comme la moyenne arithmétique des deux précédentes

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{1}{\theta}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau \cdot \epsilon_0}} = 10^{16} \text{ Hz}$$

3) Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \tilde{\vec{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right)$$

qui devient d'après la loi d'Ohm :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}$$

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$. En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\tilde{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} - j\omega \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2 \cdot \tau}{1 - j \cdot \omega \cdot \tau} \Rightarrow$$

On trouve la relation de dispersion :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

4)

4.a) si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes hertziennes), l'onde est **amortie** avec l'épaisseur de peau $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}}$,

4.b) si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes visibles), l'onde ne se propage pas et est amortie : il s'agit d'une **onde évanescente**. Le corollaire est une réflexion totale de l'onde incidente sur le métal,

4.c) si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ (c'est le cas à partir du domaine UV), il y a **propagation avec dispersion, mais sans absorption**,

4.d) si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ (c'est le cas pour les rayonnements X), il y a **propagation sans dispersion ni absorption**, comme dans le vide.



Exercice 19.12 pour s'entraîner Propagation dans un plasma

On peut montrer que dans un plasma, la relation de dispersion est de la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On se place dans le cas d'une onde de pulsation $\omega > \omega_p$, la pulsation plasma.

- 1) Indice du milieu :
 - 1.a) Pourquoi a-t-on le droit de parler d'indice ?
 - 1.b) Quel est l'indice $n(\omega)$ du milieu ?
- 2) Exprimer les vitesses :
 - 2.a) v_φ de phase ;
 - 2.b) v_g de groupe ;
 - 2.c) et les comparer à c .

- 1) Indice du milieu :
 - 1.a) Puisque k est réel, le milieu est transparent : il n'y a pas d'absorption.
 - 1.b) L'indice est tel que $k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$, or $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$. Donc :

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

- 2) Vitesses :
 - 2.a) de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, donc

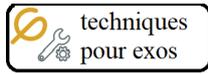
$$v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

2.b) de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ avec $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$, d'où

$$v_g = n.c = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

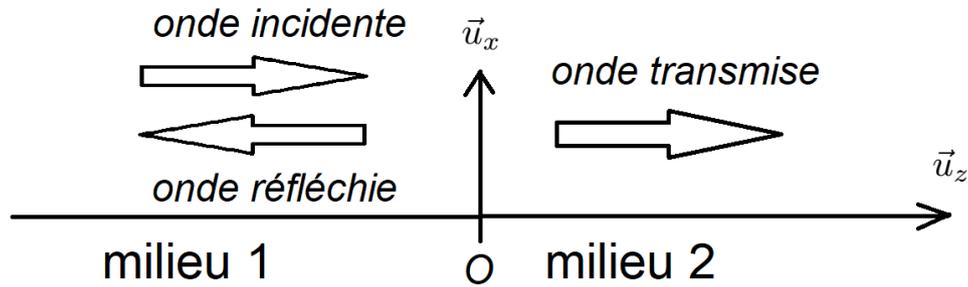
2.c) Comme $n(\omega) < 1$,

$$v_\varphi > c \quad \text{et} \quad v_g < c$$



Techniques pour passer du cours aux exercices
(à maîtriser)

Interface entre deux diélectriques



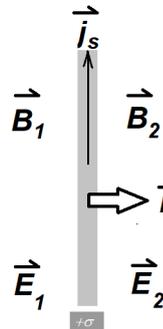
- l'onde incidente : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$
 $\vec{B}_i = n_1 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c}$
 $\Rightarrow \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_y$
 - l'onde réfléchie : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x$
 $\vec{B}_r = n_1 (-\vec{u}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c}$
 $\Rightarrow \vec{B}_r = -\frac{n_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_y$
 - l'onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_x$
 $\vec{B}_t = n_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_t}{c}$
 $\Rightarrow \vec{B}_t = \frac{n_2}{c} \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_y$
- Conditions de continuité à l'interface**
- Dans le cas d'une interface entre deux diélectriques, il y a continuité de \vec{E} et \vec{B} .
- coeff. de réflexion en amplitude : $\vec{E}_r(z=0, t) = r_E \vec{E}_i(z=0, t)$
 $\vec{B}_r(z=0, t) = r_B \vec{B}_i(z=0, t)$
 - coeff. de transmission en amplitude : $\vec{E}_t(z=0, t) = t_E \vec{E}_i(z=0, t)$
 $\vec{B}_t(z=0, t) = t_B \vec{B}_i(z=0, t)$
- coefficients en énergie :**
- coefficient de réflexion : $R = |r_E|^2 = |r_B|^2$
 - coefficient de transmission : $T = 1 - R$

Interface avec un miroir métallique

Conditions de continuité à l'interface

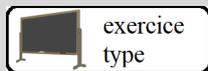
Il peut y avoir une discontinuité de \vec{E} et \vec{B} dans l'espace en présence d'une charge surfacique (σ) et d'un courant surfacique (\vec{j}_s) :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$



Coefficients de réflexion dans le cas d'une interface vide/métal

$r_E = -1$ (déphasage de π supplémentaire)
 $R = 1 \Rightarrow T = 0$, le métal se comporte comme un miroir.



Exercice 19.13 (le prof fait cet exercice type jeudi)
Dioptre entre deux milieux diélectriques

1) Interface entre deux diélectriques

1.a) Montrer que les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} à l'interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , en incidence normale, sont :

$$r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -r_B \quad t_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_2} t_B$$

1.b) Montrer qu'un déphasage de π apparaît lors de la réflexion sur un milieu d'indice supérieur.

1.c) En déduire les coefficients énergétiques.

1.d) Le diamant est transparent. Son indice de réfraction est particulièrement élevé : $n \approx 2,4$. Qu'est-ce qui donne au diamant son éclat caractéristique, dit « adamantin » ?



2) Cas d'une interface vide/métal :

2.a) Montrer que $r_E = -1$. Quel est donc le déphasage supplémentaire introduit par la réflexion ?

2.b) En déduire que : $R = 1$ et $T = 0$.

1) Dans le milieu $z < 0$ d'indice \tilde{n}_1 se propagent :

- l'onde incidente : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_i = \tilde{n}_1 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$;
- l'onde réfléchie : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \tilde{n}_1 (-\vec{u}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = -\frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$.

Dans le milieu $z > 0$ d'indice \tilde{n}_2 se propage :

- l'onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_t = \tilde{n}_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_t}{c} = \frac{\tilde{n}_2}{c} \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_y$.

2) Les coefficients en amplitude pour \vec{E} sont

- en réflexion r_E tel que $\vec{E}_{0r} = r_E \cdot \vec{E}_{0i}$,
- en transmission t_E tel que $\vec{E}_{0t} = t_E \cdot \vec{E}_{0i}$.

Les coefficients en amplitude pour \vec{B} sont

- en réflexion r_B tel que $\vec{B}_{0r} = r_B \cdot \vec{B}_{0i}$,
- en transmission t_B tel que $\vec{B}_{0t} = t_B \cdot \vec{B}_{0i}$.

A l'interface ($z = 0$), le champ électromagnétique est continu :

$$\begin{cases} \forall t \vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t) = \vec{E}_t(z=0, t) \\ \forall t \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) = \vec{B}_t(z=0, t) \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

3) Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2$
- coefficient de transmission : $T = 1 - R$.

4) En incidence normale, $r_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}$. Donc, si $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2$, r_E est réel négatif : on doit introduire π comme déphasage dans le champ électrique. On peut généraliser à n'importe quelle incidence.

5) Pour l'interface air (ou vide) / diamant Aussi,

$$\tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{-1,4}{3,4}$$

Le coefficient de réflexion en énergie est :

$$R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = \left(\frac{-1,4}{3,4} \right)^2 = 0,17$$

Donc l'onde est bien réfléchie.



application
directe

Exercice 19.14 pour s'entraîner

Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre deux diélectriques

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 . Une OPPH incidente de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane.

On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

On admet que les coefficients de réflexion en amplitude du champ électrique sont, pour une onde incidente polarisée rectilignement :

- dans le plan d'incidence $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

De même, les coefficients de transmission en amplitude du champ électrique sont :

- dans le plan d'incidence $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$;
 - perpendiculairement au plan d'incidence $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.
- 1) En incidence normale, déterminer les coefficients de réflexion
 - 1.a) $r_{//}$,
 - 1.b) r_{\perp} ,
 - 1.c) et conclure.
 - 2) En incidence normale, déterminer les coefficients de transmission
 - 2.a) $t_{//}$,
 - 2.b) t_{\perp} ,
 - 2.c) et conclure.

$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$ devient aux petits angles $n_1 \theta_1 = n_2 \cdot \theta_2$.

1) Coefficients de réflexion en incidence normale :

1.a) $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$, or $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, donc : $r_{//} = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2}$ qui devient aux

petits angles : $r_{//} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $r_{//} =$

$$\frac{\frac{\theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{1 - \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}}{\frac{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{1 + \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 - \theta_1^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}} \frac{1 + \theta_1^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}, \text{ qui tend vers } r_{//} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}, \text{ soit :}$$

$$r_{//} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

1.b) $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$, or $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$, donc : $r_{\perp} = \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}$, qui devient aux petits angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits

angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}$, donc :

$$r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

1.c) Conclusion :

$$r_{//} = r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

Il n'y a pas de différence entre les deux polarisations.

2) Coefficients de transmission en incidence normale :

2.a) $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$ devient aux petits angles : $t_{//} = \frac{4 \cdot \theta_2}{2 \cdot \theta_1 + 2 \cdot \theta_2}$ soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $t_{//} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}$, donc

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

2.b) $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$ devient aux petits angles : $t_{\perp} = \frac{2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$ soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}$, donc

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

2.c) Conclusion :

$$t_{//} = t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

Il n'y a pas de différence entre les deux polarisations.



Exercice 19.15 pour s'entraîner

Coefficients de Fresnel pour une onde polarisée dans le plan d'incidence

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 .

Une OPPH incidente polarisée rectilignement dans le plan d'incidence de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane. On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

1) Ecrire les conditions aux limites :

1.a) sur le champ électrique,

1.b) et sur le champ magnétique.

2) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

$$\mathbf{2.a)} \quad r_{//} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1} \quad \text{ou} \quad r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\mathbf{2.b)} \quad \text{et} \quad t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1} \quad \text{ou} \quad t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}.$$

1) Conditions aux limites :

1.a) La partie tangentielle du champ électrique est continue, soit

$$E_{0i} \cdot \cos \theta_1 - \cos \theta_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t}$$

1.b) La partie normale du champ magnétique est continue, soit le champ magnétique lui-même :

$$n_1 \cdot E_{0i} + n_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = n_2 \cdot \tilde{E}_{0t}$$

2) Coefficients de Fresnel :

2.a) On peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} n_2 \cdot \cos \theta_1 (E_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \\ n_1 \cdot \cos \theta_2 (E_{0i} + \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

soit $(n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2) E_{0i} = (n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1) \cdot \tilde{E}_{0t}$ ce qui nous donne :

$$r_{//} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$$

qu'on peut transformer en

$$r_{//} = \frac{n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$r_{//} = \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1} = \frac{\sin(2\theta_1) - \sin(2\theta_2)}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$$

d'après $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$, ou bien encore :

$$r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

d'après $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

2.b) $n_2 \cdot \tilde{E}_{0t} = n_1 \cdot E_{0i} + n_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = n_1 \cdot E_{0i} \cdot (1 + r_{//})$, aussi :

$$t_{//} = \frac{n_1}{n_2} (1 + r_{//}) = \frac{n_1}{n_2} \left(1 + \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}\right)$$

soit :

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$$

qu'on peut transformer en

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$t_{//} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$$

d'après $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$.



Exercice 19.16 pour s'entraîner

Coefficients de Fresnel pour une onde polarisée orthogonalement au plan d'incidence

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 .

Une OPPH incidente polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane. On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

1) Ecrire les conditions aux limites :

- 1.a) sur le champ électrique,
1.b) et sur le champ magnétique.

2) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

- 2.a) $r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$ ou $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$,
2.b) et $t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$ ou $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

1) Conditions aux limites :

1.a) La partie tangentielle du champ électrique est continue, soit le champ électrique lui-même :

$$E_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$$

1.b) La partie normale du champ magnétique est continue, soit

$$n_1 \cdot E_{0i} \cdot \cos \theta_1 - \cos \theta_1 \cdot n_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = \cos \theta_2 \cdot n_2 \cdot \tilde{E}_{0t}$$

2) Coefficients de Fresnel :

2.a) On peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} n_2 \cdot \cos \theta_2 (E_{0i} + \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \\ n_1 \cdot \cos \theta_1 (E_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

soit $(n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2) E_{0i} = (n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \tilde{E}_{0t}$ ce qui nous donne :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

qu'on peut transformer en

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, donne :

$$r_{\perp} = \frac{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2} = \frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{\sin (\theta_2 + \theta_1)}$$

d'après $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$.

2.b) $E_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$, aussi :

$$t_{\perp} = 1 + r_{\perp} = 1 + \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

soit :

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

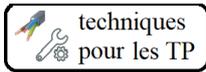
qu'on peut transformer en

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, donne :

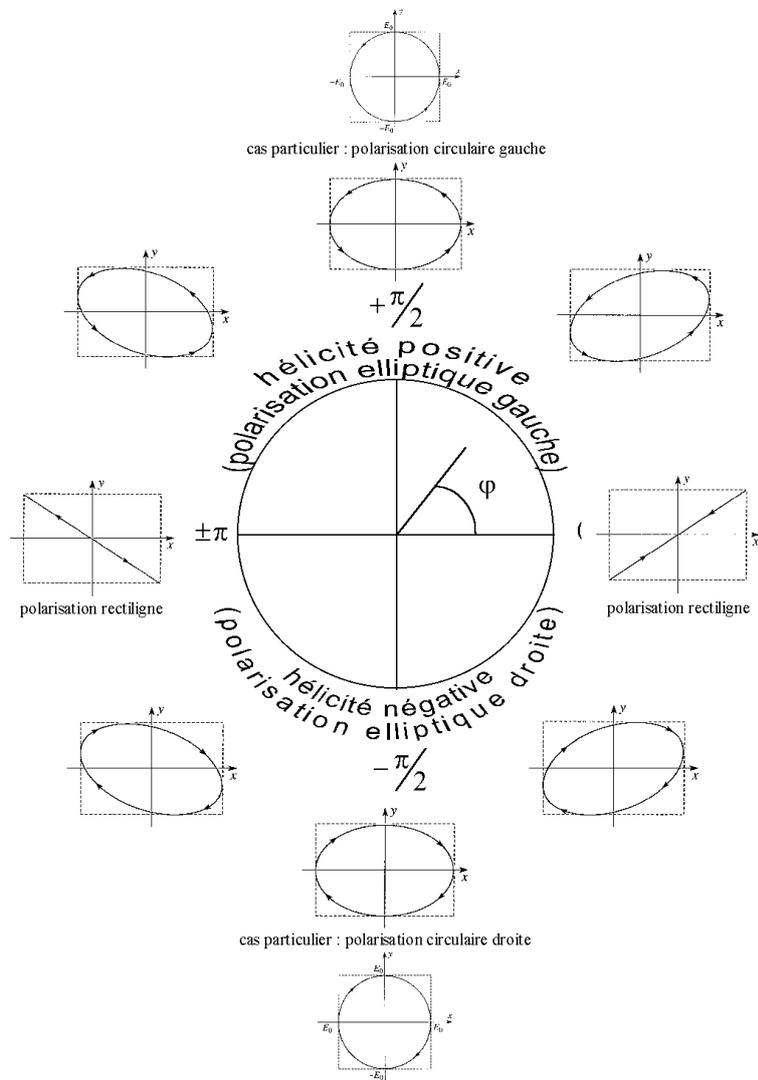
$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}$$

d'après $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$.



Techniques pour les travaux pratiques (à maîtriser)

Polarisation d'une OPPM qui se propage vers les z croissants



Polariseur

- avant le polariseur : $E_x(t)$ et $E_y(t)$
- après le polariseur d'axe \vec{u}_x : $E_x(t)$ et $E_y = 0$

Lames à retard

- avant la lame :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$
- après la lame d'axes neutres \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi - \Delta\varphi) \end{cases}$$

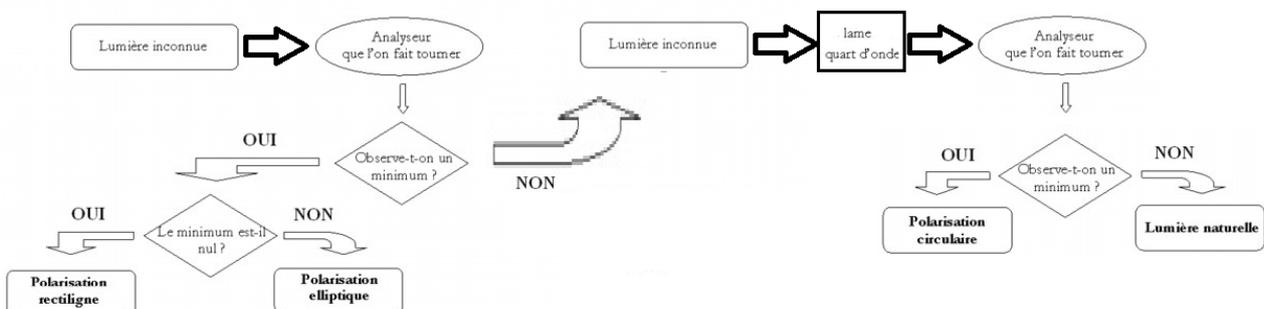
lame demi-onde (ou " $\frac{\lambda}{2}$ ") : $\Delta\varphi = \pm\pi$

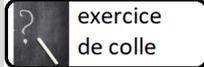
- rectiligne \leftrightarrow rectiligne symétrique par rapport aux axes de la lame.
- elliptique gauche \leftrightarrow elliptique droite d'axes symétriques par rapport aux axes neutres de la lame.

lame quart d'onde (ou " $\frac{\lambda}{4}$ ") : $\Delta\varphi = \pm\pi/2$

- rectiligne \leftrightarrow elliptique d'axes = les axes de la lame.
- circulaire \leftrightarrow rectiligne à 45° avec les axes de la lame.

Détermination d'une polarisation inconnue



exercice
de colle**Exercice 19.18**
Polariseur tournant

1) Un faisceau parallèle de lumière traverse un polariseur fixe. Son intensité est notée I_0 après ce polariseur. Le faisceau lumineux traverse ensuite un second polariseur dont l'axe fait un angle θ avec l'axe du premier polariseur.

1.a) Déterminer l'intensité lumineuse I sortant du second polariseur (loi de Malus).

Initialement, $\theta = \theta_i$, et l'intensité lumineuse sortant du second polariseur est I_i . On fait varier θ de $d\theta \ll \pi$.

1.b) Exprimer la variation relative $\frac{dI}{I_i}$ de l'intensité lumineuse sortant du second polariseur, en fonction de θ_i et $d\theta$.

Application : $d\theta = 1^\circ$, que vaut $\frac{dI}{I_i}$ si $\theta_i = 10^\circ$? si $\theta_i = 80^\circ$?

2) Pour détecter de la lumière après le polariseur, il faut que l'intensité soit supérieure au bruit, qui vaut $5\% \cdot I_1$. Déterminer numériquement en secondes d'angle, l'angle minimum α_{min} dont il faut tourner l'analyseur pour détecter de la lumière.

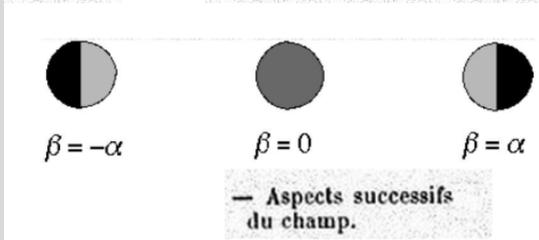
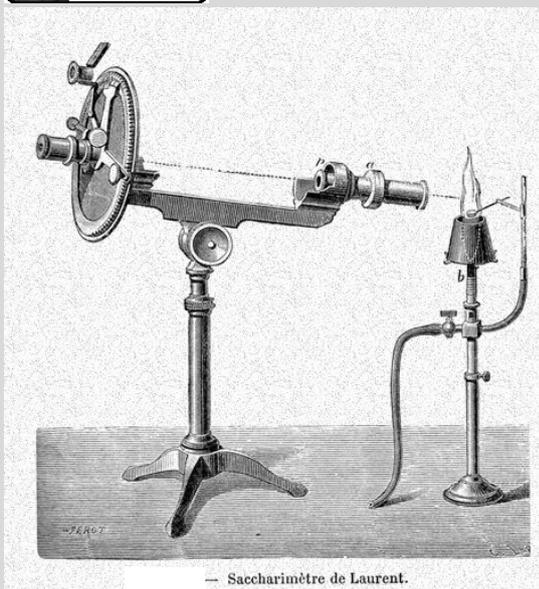
Le faisceau lumineux traverse ensuite un second polariseur qui tourne autour de l'axe optique avec une vitesse angulaire ω .

On supposera que le second polariseur tourne lentement devant le temps de réponse du détecteur.

3) Montrer que l'on a modulé l'intensité à la pulsation 2ω .

exercice de colle

Exercice 19.19
Saccharimètre de Laurent



Le polarimètre de Laurent, très précis, est utilisé en chimie pour mesurer des concentrations, en particulier de sucre.

Cet appareil fonctionne à la lumière jaune. Il se compose des pièces suivantes :

- 1° Un polariseur biréfringent *a* (l'une des images est rejetée sur le côté) ;
 - 2° Un diaphragme circulaire *p* dont la moitié seulement est recouverte par une lame mince de quartz ou de gypse parallèle à l'axe. dite demi-onde pour la lumière jaune (raies D) ;
 - 3° Un analyseur *c* que l'on peut faire tourner au moyen d'une alidade mobile sur un large cercle divisé ;
 - 4° Une petite lunette de Galilée *df* servant d'oculaire.
- Une onde monochromatique se propage selon *Ox* et traverse successivement :

- un polariseur dont l'axe privilégié fait un petit angle $\alpha \approx 1^\circ$ avec *Oy*.
- une lame demi-onde dont les axes lent et rapide sont *Oy* et *Oz* et qui ne couvre que la moitié du faisceau (la partie gauche) et donc l'autre moitié du faisceau ne traverse rien à cet endroit.
- un analyseur dont l'axe privilégié fait un angle β avec *Oz*, qui peut varier de $-\pi$ à $+\pi$.

1) Eclairage du polarimètre.

1.a) Pourquoi le polarimètre de Laurent est-il utilisé en lumière monochromatique, historiquement celle du doublet jaune du sodium ?

2) Fonctionnement du polarimètre.

2.a) Calculer, en fonction de β les deux intensités du faisceau sortant du dispositif, selon qu'il a ou non traversé la demi-onde.

2.b) Pour quelles valeurs de β ces intensités sont-elles égales ?

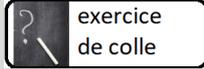
3) Précision du polarimètre.

Pour régler l'égalité des éclairagements, on choisit la solution $\beta = 0$ (ou $\beta = \pm\pi$) et non $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, car alors, les éclairagements sont maximums, l'œil est ébloui et sature, ce qui ne permet pas une estimation correcte de l'égalité des éclairagements. Au contraire au voisinage de $\beta = 0$ (ou $\beta = \pm\pi$), en tournant l'analyseur de $2.\alpha$ (environ deux degrés) on passe de la plage gauche obscure et la plage droite grise ($\beta = -\alpha$) à l'inverse ($\beta = \alpha$), l'égalité des éclairagements se remarquant par la disparition du diamètre séparant les deux plages.

Remarque : vu son mode de fonctionnement, on appelle aussi le polarimètre de Laurent "analyseur à pénombre".

3.a) On se place dans la région où $|\beta| < \alpha$, donner une valeur approchée du contraste γ entre les deux intensités.

3.b) Sachant que l'œil ne distingue plus rien en dessous d'un contraste 0,01, à quelle précision peut-on régler l'appareil sur $\beta = 0$? Commenter.



Exercice 19.20 Le ciné 3D

Extraits des articles "Image stéréoscopique" et "Lunettes stéréoscopiques" :

Une image stéréoscopique est réalisée par deux capteurs optiques prenant une même scène à partir de deux points de vue légèrement distants. Ces deux vues peuvent alors être présentées au spectateur de manière à ce que l'image de la caméra gauche soit vue uniquement par l'oeil gauche, et l'image de la caméra droite par l'oeil droit pour donner un effet de relief. Les lunettes 3D servent essentiellement à l'observation des images stéréoscopiques projetées en lumière polarisée sur un écran métallisé. Chaque oeil reçoit l'image qui lui est destinée grâce à un système stéréoscopique. La lumière destinée à l'autre oeil ne traverse pas le filtre polarisant des lunettes, car son orientation ne la laisse pas passer.



Lors du tournage d'un film en 3D, une caméra double, constituée de deux caméras proches (comme deux yeux!) enregistre deux films. Le cinéma 3D permet la stéréovision, c'est-à-dire que l'oeil gauche du spectateur voit la projection du film pris par la caméra gauche et l'oeil droit du spectateur voit la projection du film pris par la caméra droite.

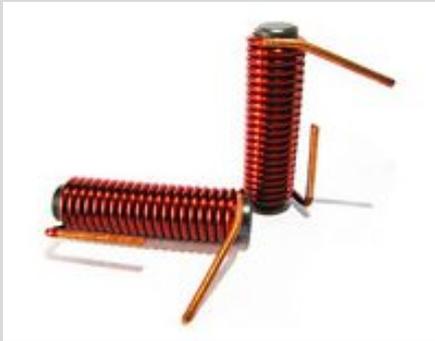
- 1) On suppose que la projection du film enregistré par la caméra gauche est polarisée horizontalement, tandis que la projection du film enregistré par la caméra droite est polarisée verticalement.
 - 1.a) Comment doivent être les lunettes du spectateur ?
 - 1.b) Quel problème apparaît si le spectateur penche la tête ?
- 2) On suppose que la projection du film enregistré par la caméra gauche est polarisée circulairement gauche, tandis que la projection du film enregistré par la caméra droite est polarisée circulairement droite.
 - 2.a) Le problème précédent existe-t-il toujours si le spectateur penche la tête ?
 - 2.b) Comment doivent être les lunettes du spectateur ?

exercice
de colle

Exercice 19.21

De l'effet de la forme de l'antenne sur la puissance rayonnée

Dans tout l'exercice, on sera dans le cadre du rayonnement à grande distance, c'est-à-dire qu'on se placera à une distance r de l'antenne de taille L qui émet un rayonnement de longueur d'onde λ tels que $r \gg \lambda \gg L$ et on se placera dans un repère sphérique de centre O , d'axe polaire (Oz).



1) On s'intéresse à une antenne "fouet" parcourue par le courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ qui a la forme d'un fil rectiligne de longueur L , d'axe (Oz).

On admet que $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$, avec :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} i_0 L \cos(\omega t - kr) \vec{e}_z$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Exprimer :

- 1.a) le champ magnétique rayonné ;
- 1.b) le champ électrique rayonné ;
- 1.c) la puissance moyenne P_l rayonnée.

2) On s'intéresse maintenant à une antenne "bobine" qui a la forme d'un fil circulaire de longueur $L = 2\pi a$, d'axe (Oz), parcourue par le même courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$.

On admet que $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$, avec :

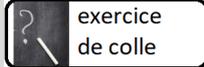
$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi r c} i_0 \pi a^2 \sin(\omega t - kr) \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Exprimer :

- 2.a) le champ magnétique rayonné ;
- 2.b) le champ électrique rayonné ;
- 2.c) la puissance moyenne P_c rayonnée.

3) Comparer P_l et P_c . Commenter.



exercice
de colle

Exercice 19.22

Etude des caractéristiques d'ondes émises par diverses sources

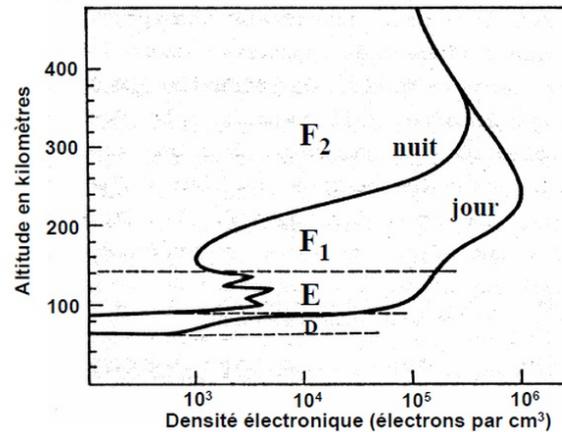
- 1) Déterminer la longueur d'onde λ , le nombre d'onde σ en cm^{-1} et la norme du vecteur d'onde k pour :
 - 1.a) une station grande onde (de fréquence $\nu = 250kHz$);
 - 1.b) une station FM (de fréquence $\nu = 100MHz$);
 - 1.c) un téléphone portable (de fréquence $\nu = 1,8GHz$).
- 2) Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $R = 1,0mm$ d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8nm$. La puissance moyenne émise est $P_e = 1,0mW$.
On donne : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}H.m^{-1}$.
 - 2.a) Calculer les amplitudes E_{max} du champ électrique; et B_{max} du champ magnétique.
 - 2.b) Déterminer le nombre de photons n par unité de volume dans le faisceau; N de photons émis par seconde par le laser.
- 3) Le flux solaire sur Terre est $1,36 kW \cdot m^{-2}$.
 - 3.a) En déduire la puissance totale rayonnée par le Soleil, situé à 8 min lumière de la Terre.
 - 3.b) Estimer l'ordre de grandeur du nombre de photons arrivant par seconde sur $1 m^2$, sur la Terre.
 - 3.c) A quelle distance du Soleil faudrait-il se placer pour recevoir 1 photon par seconde sur $1 m^2$?

? \ exercice
de colle

Exercice 19.23 Ondes dans un plasma

LA B.B.C.	
HEURES DES EMISSIONS (Heure française)	LONGUEURS D'ONDES (en mètres)
00.30	1.500, 261, 49, 41 et 31
01.30	1.500, 373, 285, 261, 49, 41 et 31
03.30 (en morse)	261, 49, 41
06.30	1.500, 373, 49, 41 et 31
07.30	1.500, 373, 49, 41 et 31
08.30, 09.30	1.500, 373, 49, 41 et 31
12.30	1.500, 373, 41, 31, 25, 19 et 16
13.30, 15.30	1.500, 373, 41, 31, 25 et 16
19.30	373, 49, 41, 31 et 25
21.15	1.500, 373, 49, 41, 31 et 25
L'AMERIQUE S'ADRESSE AU PEUPLE DE FRANCE	
14.30	1.500, 373, 41, 31, 25 et 16
23.30	49, 41 et 31

Répartition de l'ionisation dans la haute atmosphère



Un plasma (comme la ionosphère) est un milieu ionisé, constitué :

- d'ions positifs quasi-fixes ;
- d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e , de vitesse \vec{v}_e .

Le plasma est peu dense, de sorte qu'on pourra négliger les interactions entre les particules chargées.

1) Étude des électrons du plasma

Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ existe dans le plasma.

1.a) Montrer que la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .

1.b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la vitesse complexe d'un électron.

1.c) En déduire la conductivité complexe du plasma.

1.d) Montrer qu'il n'y a pas d'effet Joule dans le plasma.

2) Propagation dans un plasma

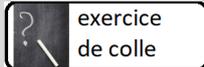
2.a) Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le plasma.

2.b) En déduire la relation de dispersion.

2.c) Déterminer le comportement du plasma vis-à-vis de l'onde.

2.d) Comment se comportent les ondes électromagnétiques vis à vis de l'ionosphère qui peut être considérée comme un plasma ?

3) En se servant des documents, expliquer pourquoi on pouvait recevoir en France Radio Londres pendant la guerre alors qu'il est aujourd'hui impossible d'écouter les chaînes de la FM londonienne à Paris.



exercice
de colle

Exercice 19.24 Propagation dans un métal

Le métal a un comportement très différent vis-à-vis des ondes électromagnétiques suivant les longueurs d'ondes impliquées.



On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

$$\vec{\tilde{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k}z - \varphi)} \vec{u}$$

qui se propage dans un métal réel.

1) Démontrer que la relation de dispersion est :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

2) En déduire le comportement du métal dans le cas :

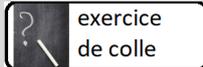
2.a) $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes hertziennes) ;

2.b) $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes visibles) ;

2.c) $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ (c'est le cas à partir du domaine UV) ;

2.d) $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ (c'est le cas pour les rayonnements X).

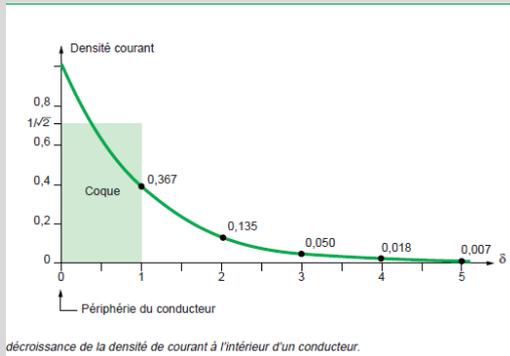
3) Justifier qu'il existe un déphasage de π pour une réflexion sur un miroir.



Exercice 19.25 Effet de peau dans un conducteur

Extrait du Cahier Technique Schneider Electric n° 83 » CT 83(e) édition janvier 1977 :

Cherchant à faciliter l'interprétation de l'effet de peau, Boucherot proposa en 1905 la notion de « coque fictive » dénommée aussi « épaisseur de peau » ou « profondeur de pénétration ». Sur le plan de l'effet Joule, tout se passe dans le conducteur comme si la totalité du courant véhiculé l'était dans une couche périphérique ou coque, d'épaisseur δ , la densité de courant étant uniforme dans cette coque et nulle à l'intérieur : $\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10\rho}{\mu f}}$ avec δ l'épaisseur de la coque en m, ρ la résistivité en $\Omega \cdot m$, μ la perméabilité valant $4\pi 10^{-7}$ pour le vide, f la fréquence exprimée en Hz.



En réalité, la densité décroît suivant une loi exponentielle depuis la périphérie jusqu'au centre du conducteur. A la profondeur δ , la densité est encore de $1/e = 0,367$ comme le montre la figure.

La notion de coque fictive suppose que la densité moyenne dans la coque est égale à $1/\sqrt{2}$ fois la densité périphérique. Les pertes réelles par effet Joule sont donc plus élevées, ce qu'on exprime en considérant que la résistance effective en courant alternatif R_a est plus grande que la résistance vraie en courant continu R_c d'où ces pertes supplémentaires. En pratique, le taux d'effet de peau ou coefficient d'augmentation de résistance ou de pertes supplémentaires s'exprime par le rapport : $K = R_a/R_c > 1$.

Plusieurs formules empiriques ont été proposées, celle de Levasseur est particulièrement simple et conduit à des erreurs inférieures à 2 % : $K = \left(\left(\frac{3}{4} \right)^6 + \left(\frac{S}{p\delta} \right)^6 \right)^{\frac{1}{6}} + 0,25$ avec S la section du conducteur, p son périmètre, δ l'épaisseur de peau.

1) Étude théorique de l'effet de peau

On considère un conducteur ohmique de conductivité γ , immobile et parallélépipédique. On se place en régime sinusoïdal, à la pulsation ω , dans l'ARQS. Le courant circule suivant \vec{u}_x , mais la densité de courant varie *a priori* avec la profondeur z dans le conducteur (qui est le demi espace $z > 0$) :

$$\vec{j} = j_x(z, t) \cdot \vec{u}_x = J_m(z) \cdot \cos(\omega \cdot t - \Phi(z)) \cdot \vec{u}_x$$

1.a) Rappeler les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS.

1.b) Montrer, grâce aux équations de Maxwell, que j_x vérifie une équation de diffusion.

1.c) Pourquoi peut-on utiliser le complexe associé $\tilde{j}_x(z, t) = \tilde{J}_m(z) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$ pour résoudre l'équation différentielle ?

1.d) En exprimant δ' et $\phi(z)$, montrer que : $j_x = J_{max} \cdot e^{-\frac{z}{\delta'}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi(z))$.

1.e) Caractériser la densité de courant dans le conducteur, à l'aide des graphes :

$j_x(z, t = 0)$ (et le comparer au graphique du texte),

et $j_x(z = 0, t)$, $j_x(z = \delta, t)$, $j_x(z = 3 \cdot \delta, t)$ sur un même graphique.

2) Notion de coque fictive

2.a) Montrer que la notion de coque fictive développée dans le document impose $P_d = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{|\tilde{J}(0)|}{\sqrt{2}} \right)^2 \delta$.

2.b) Comparer δ' à l'épaisseur de la coque donnée dans le document.

2.c) On considère un conducteur de cuivre ($\gamma = 58 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$). Que vaut δ' à 50 Hz ? La comparer à la valeur donnée par le document.

3) Interprétation dans le cas d'un conducteur cylindrique :

On se place maintenant dans le cas d'un conducteur cylindrique de conductivité γ , de longueur ℓ et de rayon a .

3.a) Exprimer la résistance en continu R_c .

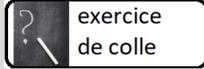
3.b) Dans le cas où $\delta \gg a$, que vaut R_a ? Même question pour $\delta \ll a$.

3.c) Comparer les résultats asymptotiques trouvés dans la question précédente à ceux induits par la formule de Levasseur donnée dans le document.

3.d) Proposer une modélisation du rapport $K = R_a/R_c$ défini dans le document.

3.e) Quand peut-on négliger l'effet de peau ?

3.f) Quelle est la forme de conducteur la plus adaptée aux hautes fréquences ?



exercice
de colle

Exercice 19.26
Faisceau laser incident sur du cuivre

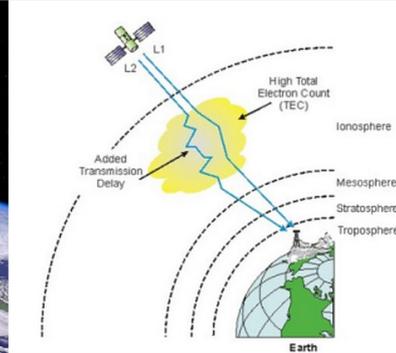


Une onde lumineuse progressive plane, en provenance d'un laser hélium-néon, se propage dans le vide et se réfléchit sur un bloc de cuivre, sous incidence normale. Établissez l'expression du coefficient de réflexion complexe à l'interface et interprétez physiquement le résultat. Vous justifierez brièvement les hypothèses faites à chaque étape du calcul.

(exercice tombé à l'écrit de l'X en 2018).

?
exercice
de colle

Exercice 19.27 Précision du GPS



Le principe de détermination de position par GPS est assez simple, en connaissant la position des satellites et la distance entre le récepteur et 3 des satellites (« pseudorange ») alors les coordonnées du récepteur sont entièrement déterminées. Chaque satellite envoie deux signaux radio :

- L1 : le premier « porteur » est ajusté à 1575,42 MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 19 cm ;
- L2 : le second est à 1227,6 MHz, d'où une longueur d'onde de 24,4 cm.

De nombreuses particules chargées sont présentes dans la ionosphère (partie supérieure de l'atmosphère), elles ralentissent la propagation du message radio. Par conséquent la valeur du pseudorange est surestimée. Les récepteurs capables d'acquérir les deux signaux peuvent effectuer une correction en comparant les pseudoranges déduits des messages de L1 et L2.

1) Principe de la mesure

On suppose que l'espace entre le récepteur sur Terre et le satellite est assimilable au vide où la valeur de la vitesse de la lumière est : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.a) Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.

1.b) Montrer que les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} vérifient la même équation de propagation.

1.c) Pour le champ électrique, on cherche une solution sous forme d'onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x , se propageant suivant \vec{u}_z , d'amplitude E_m , de pulsation ω et de vecteur d'onde de norme k .

1.d) Exprimer la durée τ que met le signal pour aller du satellite au récepteur, distants de d , et montrer que la mesure de cette durée permet d'accéder à d .

2) Propagation dans la ionosphère

On assimile l'ionosphère à un plasma, c'est-à-dire un milieu ionisé, constitué d'ions positifs quasi-fixes et d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e , de vitesse \vec{v}_e (non relativistes). Le plasma est peu dense, de sorte qu'on pourra négliger les interactions entre les particules chargées.

Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ existe dans l'ionosphère.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la conductivité complexe du plasma est $\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$. On donnera l'expression de ω_p .

2.b) Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le plasma. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $\tilde{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

2.c) Quel est donc le comportement de l'ionosphère vis-à-vis de l'onde ? On mènera la discussion suivant le signe de $\omega - \omega_p$. Que doivent vérifier les fréquences des signaux L1 et L2 ?

2.d) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de c , ω_p et ω . Vérifier que la ionosphère est un milieu dispersif.

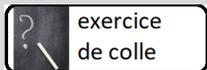
2.e) Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de c , ω_p et ω . Vérifier que la ionosphère ralentit la propagation du message radio.

On suppose que le signal GPS traverse une épaisseur ℓ d'ionosphère avec la densité électronique n_e , la distance totale entre le satellite et le récepteur étant d .

2.f) Montrer que la durée de propagation du signal pour aller du satellite au récepteur est $\tau' = \tau + \Delta t$ avec le « délai ionosphérique » Δt qu'on exprimera.

2.g) Dans la limite où $\omega \gg \omega_p$, montrer que Δt est proportionnel à la quantité d'électrons libres rencontrés sur le chemin.

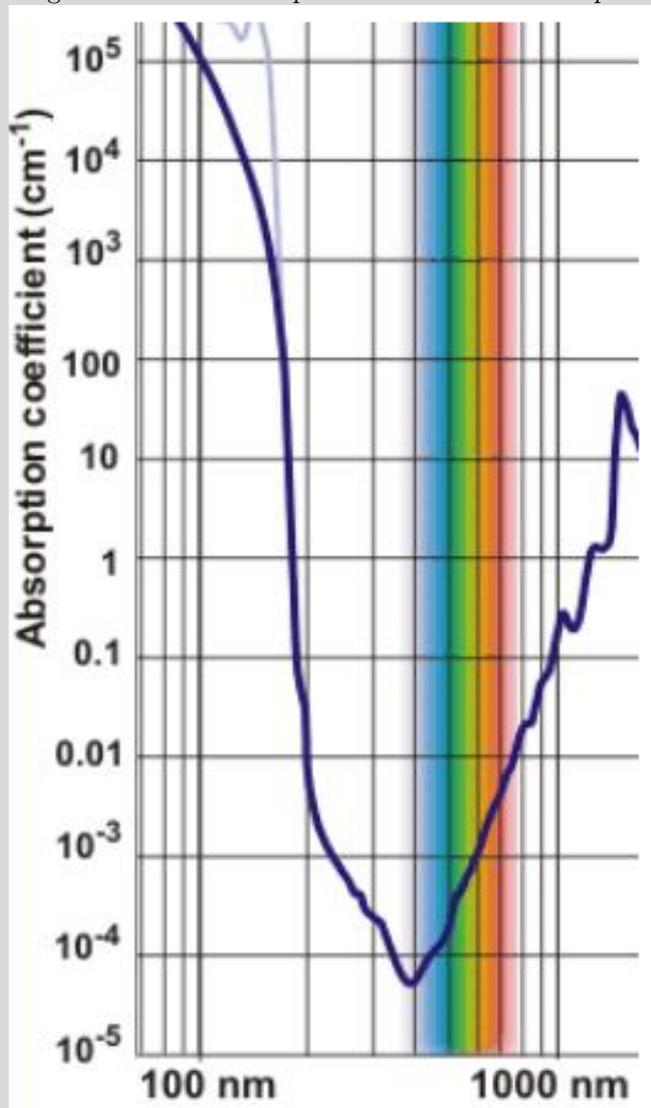
2.h) Expliquer comment les récepteurs capables d'acquérir les deux signaux peuvent effectuer une correction en comparant les pseudoranges déduits des messages de L1 et L2.



Exercice 19.28
Modélisation de l'absorption et de la dispersion dans l'eau

1) Données relatives à l'eau

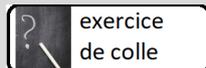
La partie réelle n_r de l'indice de l'eau varie de 1,329 à 1,343 d'un bout à l'autre du spectre visible, entre le rouge et le bleu. L'absorption de l'eau est donnée par le graphique suivant :



- 1.a) L'eau est-elle un milieu dispersif dans le visible? Modéliser les variations de la partie réelle de l'indice de l'eau grâce à la formule de Cauchy : $n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$.
- 1.b) L'indice de l'eau a-t-il une partie imaginaire non nulle n_i dans le visible? Justifier.
- 2) Application à la couleur de la mer
 - 2.a) Dans quelle partie du spectre visible l'absorption de l'eau est-elle la plus faible?
 - 2.b) Proposer une interprétation à la couleur de la mer.
- 3) Arc en ciel

Un rayon de lumière monochromatique pénètre dans une goutte d'eau assimilée à une sphère homogène d'indice n sous une incidence i , il subit une réflexion à l'intérieur de la sphère avant de sortir.

 - 3.a) Faire un schéma.
 - 3.b) Calculer la déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident en fonction de i et r , l'angle du premier rayon réfracté.
 - 3.c) Montrer que cette déviation D passe par un extremum lorsque $\sin^2 i = \frac{4-n^2}{3}$.
 D est extrémale lorsqu'il y a accumulation de lumière : c'est l'arc en ciel (la symétrie de révolution donne un arc).
 - 3.d) Applications numériques pour l'arc-en-ciel : calculer la déviation D lorsqu'elle est extrémale, pour le bleu et pour le rouge. Expliquez pourquoi l'arc en ciel est coloré.



Exercice 19.29 Diffusion atmosphérique (D'après Centrale 2007)

L'atmosphère, milieu peu dense, possède les mêmes propriétés électromagnétiques (ε_0, μ_0) que le vide. Elle contient des atomes dont les électrons sont correctement décrits par le modèle de l'électron élastiquement lié. Le soleil émet une onde lumineuse de pulsation ω visible. On suppose ici ω_0 très supérieure à γ et l'expression du moment dipolaire de l'atome est :

$$\tilde{\vec{p}} = \frac{e^2}{m \cdot \omega_0^2} \tilde{\vec{E}} \text{ où } \tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot \vec{u}_x$$

est le champ électrique de l'onde émise par le soleil. Ce dipôle, situé au point O , rayonne.

1) On admet les expressions suivantes pour les champs rayonnés par le dipôle au point M (repéré par des coordonnées sphériques de centre O et d'axe Ox) :

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(M, t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot OM^3} \left(\left(\frac{d^2 \tilde{\vec{p}}(t - \frac{OM}{c})}{dt^2} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\ \tilde{\vec{B}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot OM^2} \left(\frac{d^2 \tilde{\vec{p}}(t - \frac{OM}{c})}{dt^2} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \end{cases}$$

1.a) Rappeler les trois approximations nécessaires pour obtenir ces expressions et préciser la signification physique de ces approximations.

1.b) Déterminer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle (r, \theta)$ du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée par le dipôle en fonction de $|\tilde{\vec{E}}_0|$, μ_0 , c , ω , m , e , ω_0 , θ , r et des vecteurs de base associés aux coordonnées sphériques.

1.c) Tracer la courbe $\langle \Pi(\theta) \rangle$ pour une valeur de r fixée. Que représente cette courbe ?

On fournit le résultat suivant : $\int_0^\pi \sin^3(\xi) \cdot d\xi = \frac{4}{3}$.

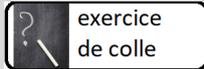
1.d) Déterminer la valeur moyenne temporelle de la puissance totale rayonnée en fonction de $|\tilde{\vec{E}}_0|$, μ_0 , c , ω , m , e et ω_0 .

2) L'atmosphère est un milieu inhomogène où la densité de particules fluctue à l'échelle de la longueur d'onde de sorte que les caractéristiques de la lumière qu'elle rayonne sont, à un facteur multiplicatif près, les mêmes que celles de la lumière rayonnée par un dipôle unique.

2.a) En déduire une explication de la couleur d'un ciel sans nuage.

2.b) Pourquoi les couchers de soleils sont-ils rouges par temps clair ?

2.c) La fumée s'élevant d'une cigarette qui se consume par elle-même est bleue. En revanche, la fumée exhalée par un fumeur est blanche, tout comme le brouillard ou le lait. Interpréter, sachant qu'un paramètre caractéristique du milieu joue un rôle déterminant.



exercice
de colle

Exercice 19.30

Résonance vibrationnelle d'une molécule diatomique

1) Modèle élastique de la molécule diatomique.

On supposera que la direction de la molécule M_1M_2 est fixe et parallèle à un vecteur normé \vec{u}_x . Les interactions entre M_1 (la particule la plus lourde, supposée fixe) et M_2 (la particule la plus légère, de masse μ), qui comprennent les forces électriques de Coulomb, mais aussi des effets quantiques, sont complexes. Cependant, on acceptera qu'elles dérivent d'une énergie potentielle $E_p(r)$, et qu'il existe un équilibre stable à la distance $M_1M_2 = r_0$. Dans le cas de HCl , $r_0 = 1,36 \cdot 10^{-10} m$.

1.a) Développer au deuxième ordre l'énergie potentielle au voisinage de r_0 : $E_p(r \approx r_0)$. Que peut-on dire des signes des trois termes de ce polynôme en $x = (r - r_0)$? Pourquoi peut-on choisir $E_p(r = r_0) = 0$?

1.b) En déduire que la force ressentie par M_2 est : $\vec{f}_2 = -k \cdot (r - r_0) \cdot \vec{u}_x$, où k est une constante positive, pour peu que r soit suffisamment proche de r_0 .

On justifiera ultérieurement l'existence d'une force de frottement fluide $\vec{f}_f = -\frac{\mu}{\tau} \vec{v}$, où $\tau > 0$.

1.c) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le système suit l'équation différentielle d'un oscillateur : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, si $x = r - r_0$, avec $|x| \ll r_0$. Que valent la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q ?

2) Émission lumineuse dipolaire lors de la relaxation de la molécule.

Dans la suite on supposera $Q \gg 1$. On se trouve en fait face à trois temps caractéristiques : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$ et Δt , le temps sur lequel se fait la moyenne; dont les ordres de grandeurs sont très différents : $\tau \gg \Delta t \gg T$.

2.a) Montrer que la relaxation du système est : $x(t) \approx x_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Tracer l'allure d'une telle fonction.

L'énergie mécanique du système est : $E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$, pour $|x| \ll r_0$.

2.b) Montrer d'abord que $\left\langle e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \right\rangle \approx \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2}$. Montrer ensuite que $E_m(t) \approx \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. En déduire que : $\frac{d\langle E_m \rangle}{dt} = -\frac{\langle E_m \rangle}{\tau}$.

On supposera que l'atome en M_1 est plus électronégatif que celui en M_2 . Aussi, la molécule présente un moment dipolaire électrique $\vec{p}(t) = \delta \cdot e \cdot r(t) \cdot \vec{u}_x$, où e est la charge électronique et δ un coefficient positif sans dimension. A l'équilibre (en $r = r_0$), HCl présente un moment dipolaire $|\vec{p}| = 1,07D$, où un debye vaut, dans le système international : $1D = 3,33 \cdot 10^{-30} C \cdot m$. Lors d'une relaxation, la molécule HCl émet un photon de longueur d'onde autour de $3\mu m$ (dans l'infra rouge proche).

2.c) Que vaut alors δ pour HCl ? En déduire un ordre de grandeur de k pour HCl .

On rappelle que la puissance moyenne qu'un dipôle électrique perd en rayonnant une onde électromagnétique est : $\langle P \rangle = -\frac{\langle \dot{\vec{p}}^2 \rangle}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3}$. On suppose que c'est justement la puissance de la force de frottement fluide (non conservative) introduite précédemment : $\frac{d\langle E_m \rangle}{dt} = \langle P \rangle$.

2.d) Exprimer τ en fonction de ϵ_0 , c , k , δ , e et ω_0 . Que valent ω_0 , τ et Q pour HCl ? A-t-on bien $Q \gg 1$?

3) Vibration de la molécule dans un champ électrique oscillant.

On impose un champ électrique extérieur homogène $\vec{E} = E_x \cdot \vec{u}_x$.

3.a) Pourquoi l'énergie potentielle de la molécule est-elle augmentée du terme $-\vec{p} \cdot \vec{E}$?

3.b) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que, si $|x| \ll r_0$, le système est régi par l'équation suivante : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \beta \cdot E_x$.

On excite l'atome grâce à une onde électromagnétique monochromatique : le champ électrique est $E_x(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t) = E_0 \cdot \text{Re}(e^{j \cdot \omega \cdot t})$. On se place en régime sinusoïdal forcé, à la pulsation ω . On pose le complexe $\tilde{x} = X_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$ (où X_0 est un réel positif) associé à x : $x = \text{Re}(\tilde{x})$.

3.c) Pourquoi a-t-on le droit de remplacer les grandeurs réelles par leurs grandeurs complexes associées dans l'équation de l'oscillateur vue précédemment? Donner alors la valeur de l'amplitude de la vibration $X_0(\omega)$ en fonction de la pulsation de l'onde excitatrice ω , de β , E_0 , Q et ω_0 .

4) Spectre vibrationnel de la molécule.

4.a) Montrer que la vibration de la molécule avec l'amplitude $X_0(\omega)$ induit une puissance rayonnée moyenne qui peut se mettre sous la forme : $I(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \cdot \omega_0^2}{Q^2}} I_0$, où I_0 est une constante positive.

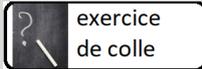
Ainsi, $I(\omega)$ est l'intensité lumineuse incidente qui est absorbée par la molécule, puis ré-émise dans toutes les directions : on parle de diffusion.

4.b) Étudier la diffusion Rayleigh, c'est à dire $I(\omega)$ pour $\omega \ll \omega_0$.

4.c) Étudier la diffusion Thomson, c'est à dire $I(\omega)$ pour $\omega \gg \omega_0$.

4.d) Étudier la diffusion résonnante : montrer que pour ω proche de ω_0 , l'intensité diffusée prend une forme lorentzienne, c'est à dire que $I(\omega \approx \omega_0) \approx \frac{I'_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}$. On donnera les constantes I'_0 et Γ en fonction de ω_0 , Q et I_0 . Montrer alors que $I(\omega)$ présente un pic maximum en $\omega = \omega_0$, de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$.

4.e) Tracer l'allure de $I(\omega)$. Quelle serait la différence entre le spectre d'émission et le spectre d'absorption de la molécule HCl ?



exercice
de colle

Exercice 19.31 Le bleu du ciel



La diffusion est la propriété de la matière finement divisée de disperser la lumière dans toutes les directions. Le champ électromagnétique associé à l'onde lumineuse incidente met en mouvement les électrons de la matière. La particule éclairée se comporte alors comme un dipôle placé dans un champ électrique qui re-émet une onde lumineuse de même longueur d'onde dont l'énergie se répartit dans toutes les directions.

Lorsque la taille des particules est petite devant les longueurs d'onde du visible, typiquement inférieure à quelques dizaines de nanomètres, on parle de diffusion de Rayleigh. L'intensité diffusée est alors inversement proportionnelle à la puissance 4 de la longueur d'onde. Pour une lumière incidente blanche, le bleu sera donc beaucoup plus intensément diffusé que le rouge. C'est ainsi que s'explique le bleu du ciel, où les centres diffuseurs sont les molécules d'oxygène et d'azote (diamètre de l'ordre de 0,1 nm) éclairées par la lumière solaire.

Cependant, lorsque des molécules d'eau viennent s'ajouter en grand nombre, ce bleu disparaît pour laisser place à une lumière diffusée blanche, comme dans le cas d'un brouillard ou de nuages. La taille des centres diffuseurs devient égale ou supérieure à la longueur d'onde. C'est le domaine de la diffusion de Mie.

https://www.cnrs.fr/cw/dossiers/doschim/decouv/couleurs/loupe_diff_lumiere.html

1) Modélisation de l'atome par un oscillateur : un atome est composé d'un ion, supposé fixe (en O), et d'un électron de masse m , et de charge $q = -e$. On soumet l'atome à une onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , plane polarisée suivant \vec{u}_x , de pulsation ω . On associe à $E_x = E_0 \cos(\omega t)$ le complexe $\tilde{E}_x = E_0 e^{j\omega t}$. On admet que l'équation suivie par l'électron est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_x(t)$$

1.a) Pourquoi a-t-on le droit d'utiliser $\tilde{x} = X_0 e^{j(\omega t + \Phi)}$ pour résoudre cette équation ?

1.b) Donner X_0 en fonction de E_0 , e , m , ω_0 , ω et Q .

1.c) Montrer que l'atome se comporte comme un dipôle électrique oscillant dont on donnera le moment dipolaire \vec{p} en fonction de e , ω , Q , X_0 et Φ .

2) Rayonnement de l'atome : on admet qu'un dipôle rayonne, dans une direction faisant un angle θ (compté dans les coordonnées sphériques à partir de l'axe défini par \vec{p}), une onde :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \sin \theta \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

2.a) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ du rayonnement de l'atome.

2.b) Montrer que la puissance totale moyenne rayonnée par l'atome (diffusée) est de la forme :

$$I(\omega) = \frac{I_0 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}$$

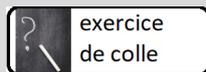
3) Etude de l'intensité diffusée

3.a) Donner un équivalent de $I(\omega)$ à basses fréquences. Grâce au document, dire quels phénomènes naturels cela induit.

3.b) Donner un équivalent de $I(\omega)$ à hautes fréquences.

3.c) Montrer que la raie atomique, proche de la résonance, est lorentzienne : $I(\omega) = \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2} I'_0$. Expliciter la largeur de la raie Γ . Quelle est la largeur à mi-hauteur ?

3.d) Tracer $I(\omega)$.



exercice
de colle

Exercice 19.32

Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre deux diélectriques

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 . Une OPPH incidente de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane.

On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

On admet que les coefficients de réflexion en amplitude du champ électrique sont, pour une onde incidente polarisée rectilignement :

- dans le plan d'incidence $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

De même, les coefficients de transmission en amplitude du champ électrique sont :

- dans le plan d'incidence $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

1) En incidence normale, déterminer les coefficients de réflexion

1.a) $r_{//}$,

1.b) r_{\perp} ,

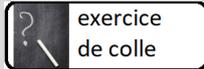
1.c) et conclure.

2) En incidence normale, déterminer les coefficients de transmission

2.a) $t_{//}$,

2.b) t_{\perp} ,

2.c) et conclure.



exercice
de colle

Exercice 19.33 Calcul des coefficients de Fresnel

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 .

On s'intéresse à une OPPH incidente polarisée rectilignement de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane. On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

On admet que, à l'interface, sont continues la partie tangentielle du champ électrique et la partie normale du champ magnétique.

1) L'OPPH incidente est polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

1.a) Ecrire les conditions aux limites : sur le champ électrique et sur le champ magnétique.

1.b) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

$$r_{//} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{et} \quad t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$$

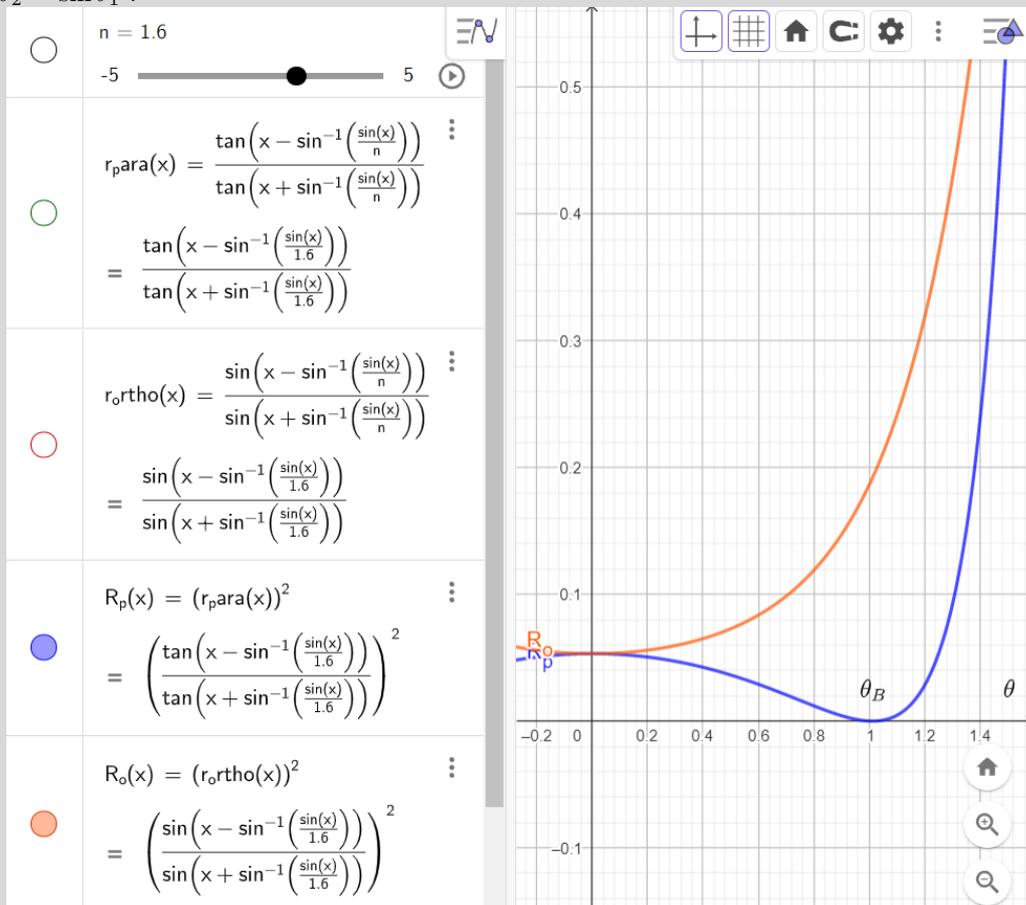
2) L'OPPH incidente est polarisée rectilignement orthogonalement au plan d'incidence.

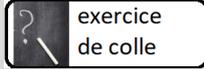
2.a) Ecrire les conditions aux limites : sur le champ électrique et sur le champ magnétique.

2.b) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{et} \quad t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Tracé de r_{\perp}^2 et $r_{//}^2$ en fonction de l'angle d'incidence $\theta = \theta_1$ à l'interface air ($n_1 = 1$) / verre ($n_2 = n = 1,6$), avec $n \sin \theta_2 = \sin \theta_1$:





exercice
de colle

Exercice 19.34 Polarisation d'une onde avec sa réflexion

Nos lunettes 3D sont faites d'une lame quart d'onde, à l'avant des lunettes, et d'un filtre polarisant, côté œil. Le projecteur polarise la lumière des images droite et gauche circulairement et avec des sens de rotation de \vec{E} opposés. La lame quart d'onde de chaque verre transforme les deux images en ondes linéairement polarisées, à 90° l'une de l'autre, puis les filtres polarisants ne laissent passer qu'une seule des deux images.

Il est rigolo de se regarder dans un miroir en portant des lunettes 3D et en clignant des yeux.

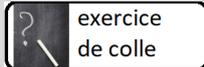


<http://blog.guillaume-loubet.fr/polarisation-circulaire-et-cinema-3d>.

Cet exercice (d'après X-ESPCI 2018) s'intéresse justement à ce dernier point...

Soit une onde se propageant dans le sens croissant des x , polarisée circulairement droite, ainsi qu'une onde se propageant dans le sens des x décroissants, polarisée circulaire gauche.

- 1) Expliciter la polarisation de l'onde résultante.
- 2) L'onde résultante est-elle stationnaire ? Quelle est la périodicité de l'onde résultante ?
- 3) On dispose d'un laser, d'une lentille convergente, ainsi que d'une lame quart d'onde. Trouver un protocole pour réaliser cette onde résultante.



exercice
de colle

Exercice 19.35 Etude d'une cavité résonnante

On notera la vitesse de la lumière $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$. On s'intéresse à une cavité parallélépipédique vide délimitée par des plans infiniment conducteurs :

$$\begin{cases} x \in [0; a] \\ y \in [0; b] \\ z \in [0; c] \end{cases}$$

On se propose de montrer que le champ électrique complexe suivant peut y exister :

$$\vec{E} = E_{max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot \vec{u}_z$$

1) Champ électromagnétique :

1.a) En déduire le champ électrique \vec{E} .

1.b) Que vaut le champ magnétique complexe \vec{B} ?

1.c) En déduire le champ magnétique \vec{B} .

1.d) Exprimer les équations de Maxwell dans le vide intérieur de la cavité.

2) Equation de propagation de l'onde :

2.a) Démontrer l'équation de propagation de l'onde.

2.b) Quelle relation doivent vérifier la pulsation ω et les dimensions de la cavité (a , b et c) pour que le champ électromagnétique puisse exister dans la cavité ?

3) Conditions aux limites :

3.a) Quelles sont les relations de discontinuité suivies par le champ électrique \vec{E} ?

3.b) Le champ électrique étant nul dans le conducteur, les conditions aux limites sont-elles vérifiées par le champ électrique proposé ?

3.c) Déterminer les charges surfaciques portées par les plans conducteurs.

3.d) En déduire les charges portées par les plans conducteurs.

3.e) Quelles sont les relations de discontinuité suivies par le champ magnétique \vec{B} ?

3.f) Le champ magnétique étant nul dans le conducteur, les conditions aux limites sont-elles vérifiées par le champ magnétique proposé ?

3.g) Déterminer les courants surfaciques qui circulent dans les plans conducteurs.

3.h) En déduire que le courant qui circule entre les plans chargés est

$$I = \frac{4 \cdot E_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\mu_0 \cdot \omega} \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

4) Energie :

4.a) Montrer que l'énergie électrique E_e dans la cavité est

$$E_e = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)}{8}$$

4.b) En déduire la capacité C que présente la cavité en fonction de a , b et c et de constantes universelles.

4.c) Montrer que l'énergie magnétique E_m dans la cavité est

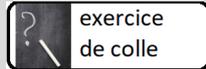
$$E_m = \left(\frac{E_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)}{c_0}\right)^2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{8 \cdot \mu_0}$$

4.d) En déduire l'inductance L que présente la cavité en fonction de a , b et c et de constantes universelles.

5) Interprétation :

5.a) En déduire une relation entre L , C et ω .

5.b) Que vous rappelle cette relation ?



exercice
de colle

Exercice 19.36 Couche anti-reflet

Traitements anti - reflets : une couche qui annule la réflexion de la lumière.

Il s'agit d'une ou plusieurs couches extrêmement fines (environ 10 millièmes de millimètre) qui annulent la réflexion de la lumière sur les verres correcteurs. L'image n'est plus perturbée par les reflets. On estime qu'un traitement antireflet améliore la qualité de l'image d'environ 10%.

Esthétiquement, ce traitement permet de ne plus "avoir 2 phares de voitures" à la place des yeux sur les photos prises avec un flash, ce qui n'est pas négligeable.

Mais le véritable plus de ce traitement est de gommer toute réflexion dans la vie de tous les jours : vos interlocuteurs verront vos yeux, et vous n'aurez pas le reflet de votre pupille dans vos verres (phénomène qui peut être très gênant pour certains porteurs de lunettes).



D'après

<http://www.verres-progressifs.info/verre-progressif-presbytie/public/traitements-surface-verres-progressifs>.

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement se propage dans l'air (indice 1) dans la direction des z croissants et atteint sous incidence normale une plaque de verre d'indice n , recouverte d'une couche d'épaisseur e , transparente, d'indice n_0 (on choisira l'origine de l'axe des z au milieu de la couche d'indice n_0). L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air, une onde réfléchie et une onde transmise dans la couche intermédiaire et une onde transmise dans le verre d'indice n .

1) Écrire les champs électriques et magnétiques de chacune de ces ondes (en notation complexe).

On admet qu'à l'interface, le champ magnétique est continu ainsi que la composante tangentielle du champ électrique. En déduire les relations de continuité en $z = -\frac{e}{2}$ et en $z = +\frac{e}{2}$.

2) Comment faut-il choisir n_0 et e pour annuler l'onde réfléchie dans l'air ?

La condition précédente étant vérifiée, le champ électrique de l'onde transmise dans le milieu d'indice n a une amplitude réelle égale à $\frac{n_0 + 1}{n_0 + n}$ fois celle du champ électrique de l'onde incidente.

3) Quelle est alors la puissance moyenne transmise dans le milieu d'indice n ?