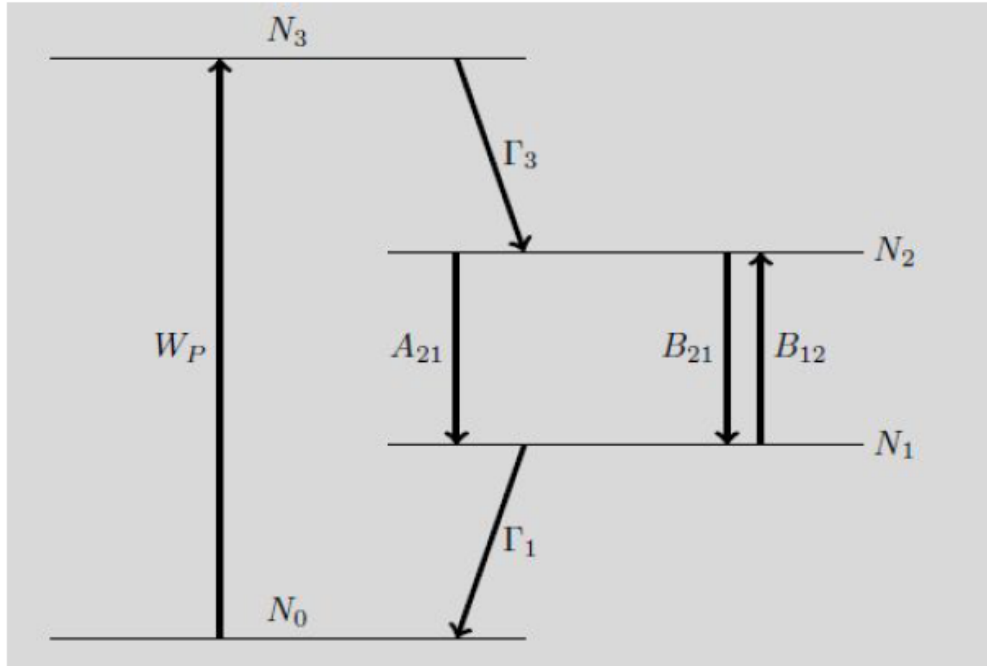


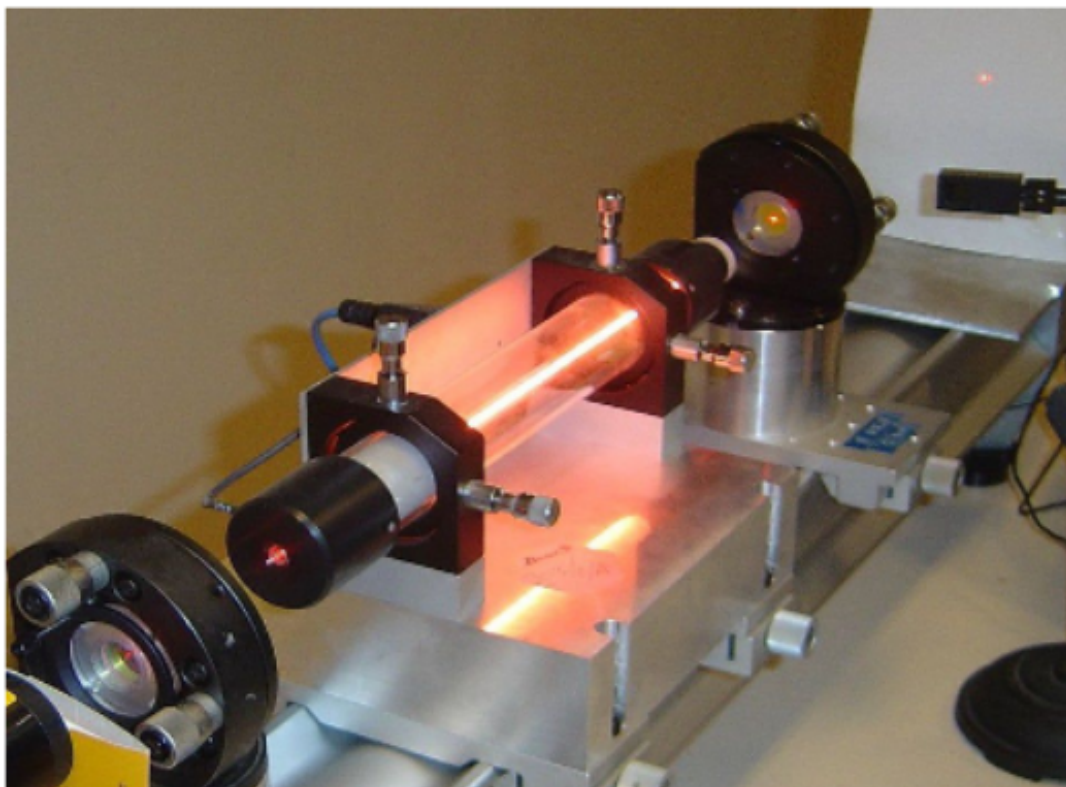
Quelle est la dangerosité d'un faisceau laser ?



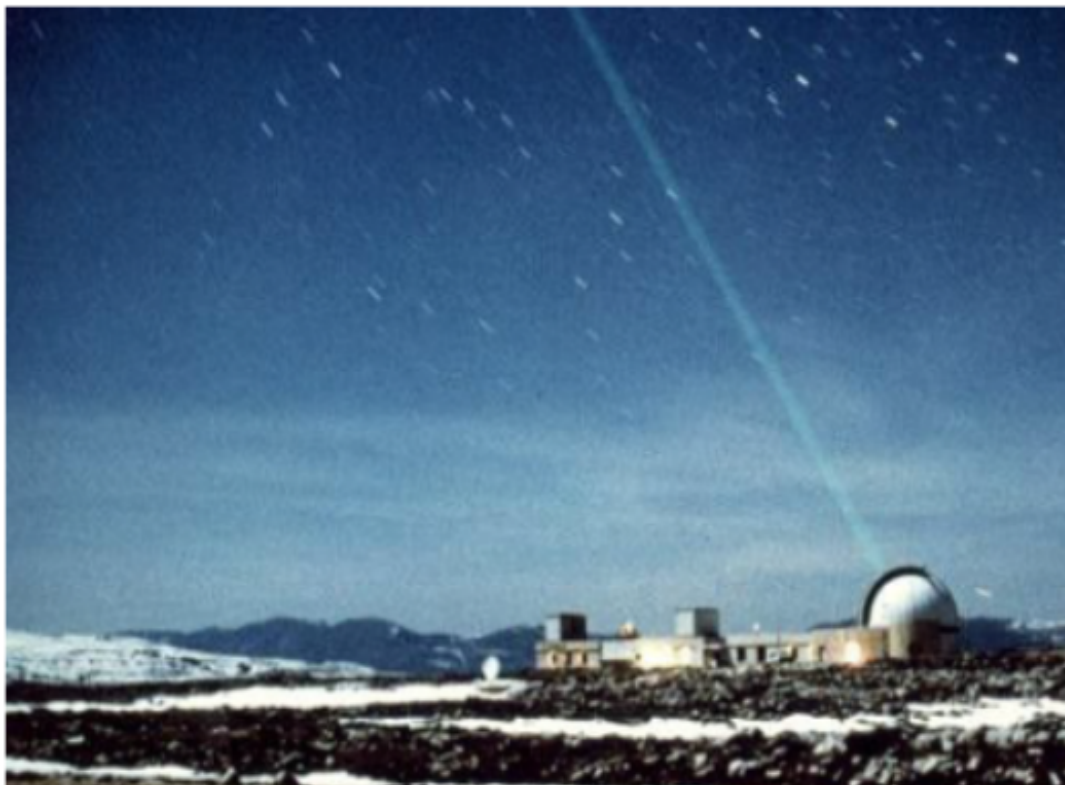
## 1) modéliser les interactions entre la lumière et la matière



## 2) Comment fonctionne un LASER



### 3) Modéliser le faisceau d'un LASER



# Le LASER

## Les points du cours à connaître

### I- Les interactions entre la lumière et la matière

#### 1. Position du problème

##### ✳️ **Système à deux niveaux** *s'y retrouver*

On s'intéressera à un système à deux niveaux d'énergie ( $E_1$  et  $E_2 > E_1$ ), non dégénérés (c'est-à-dire que le système est dans un seul état possible pour chacun de ces deux niveaux).

On notera  $N_1$  la population du niveau d'énergie  $E_1$  et  $N_2$  la population de celui d'énergie  $E_2$ .

La population totale  $N = N_1 + N_2$  est constante.

##### ✳️ **Facteur de Boltzmann** *s'y retrouver*

À l'équilibre thermique à la température  $T$  (en kelvin), le rapport des populations des deux niveaux est donné par le facteur de Boltzmann :

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{\frac{\hbar \omega_0}{k_B T}} = e^{\frac{h \nu_0}{k_B T}}$$

avec donc  $E_2 - E_1 = \hbar \omega_0 = h \nu_0$  et la constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck réduite.

##### ✳️ **Loi de Planck** *s'y retrouver*

L'énergie est le produit de trois termes :

- l'énergie d'un photon  $h \nu = \hbar \omega$  (en J) ;
- la densité d'états à la pulsation  $\omega$  :  $\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$  (en  $\text{m}^{-3} \cdot \text{s}$ ) ;
- le nombre moyen de photons dans un état de pulsation  $\omega$  :  $\frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}$  (sans unités).

La densité spectrale du rayonnement (des photons) est donnée par la loi de Planck du corps noir dans le cas de l'équilibre thermique :

$$u_{em}(\omega) = \frac{\frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}$$

la densité d'énergie étant  $e_{em} = \int_{\omega=0}^{\infty} u_{em}(\omega) d\omega$ .

On pourra aussi utiliser la relation

$$u_{em}(\omega) = \varphi(\omega) e_{em}$$

où  $\varphi(\omega)$  est le spectre du rayonnement :  $\int_{\omega=0}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega = 1$ .

## 2. Le processus d'émission spontanée

### Diagramme énergétique de l'émission spontanée *animation*

| La figure 1 représente le processus d'émission spontanée.

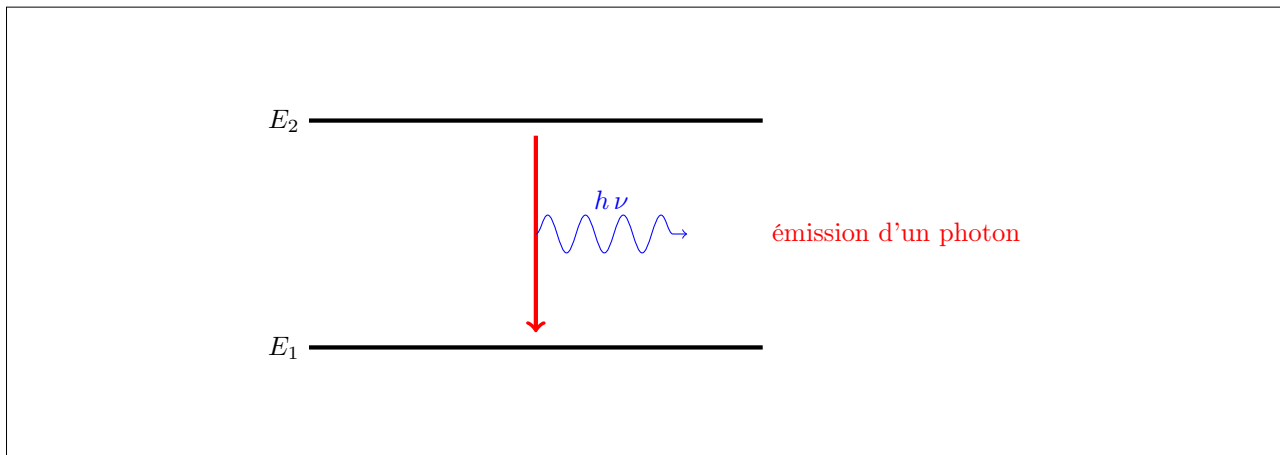


FIGURE 1 – Diagramme énergétique de l'émission spontanée

### Émission spontanée *définition*

Lors de l'émission spontanée, le système passe du niveau d'énergie supérieure ( $E_2$ ), au niveau d'énergie inférieure ( $E_1$ ) en émettant un photon d'énergie  $h\nu_0 = \hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ . La probabilité de l'émission spontanée est proportionnelle à la population du niveau d'énergie  $E_2$  :

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{spo}} = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spo}} = A_{21} N_2$$

avec  $A_{21}$ , le coefficient d'Einstein relatif à l'émission spontanée.

### Processus d'émission spontanée et cinétique d'ordre 1 *s'y retrouver*

| On retrouve le même type de cinétique dite d'ordre 1 en radioactivité ou encore en chimie.

## 3. Le processus d'absorption

### Diagramme de l'absorption de photon *animation*

| La figure 2 représente le processus d'absorption de photon.

### Absorption de photon *définition*

Lors de l'absorption d'un photon, le système passe du niveau d'énergie inférieure ( $E_1$ ) au niveau d'énergie supérieure ( $E_2$ ) en absorbant un photon d'énergie proche de  $h\nu_0 = \hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ .

La probabilité de l'absorption d'un photon est proportionnelle à la population du niveau

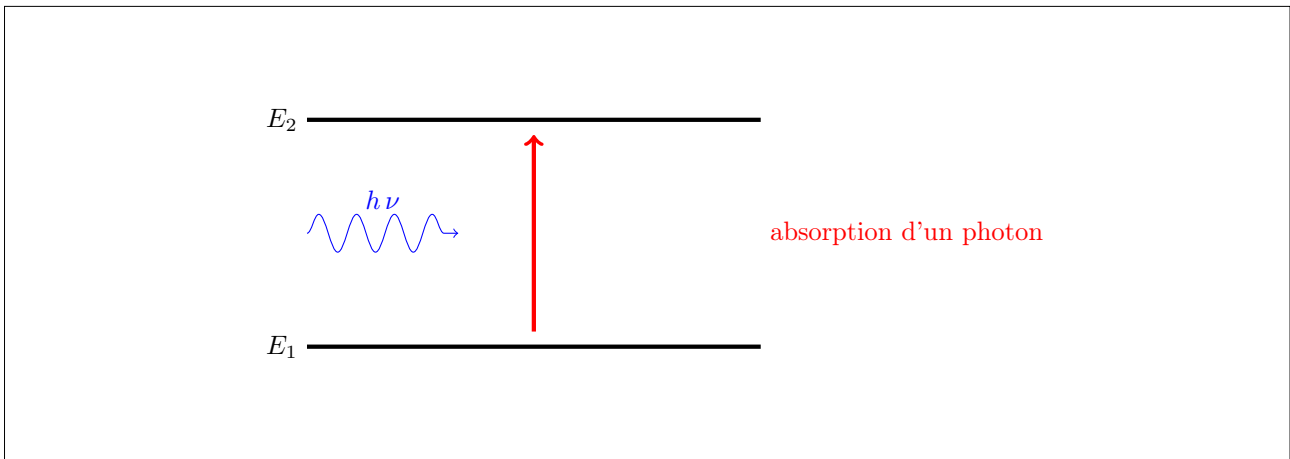


FIGURE 2 – Diagramme de l'absorption de photon

d'énergie  $E_1$ , mais aussi à la densité spectrale  $u_{em}(\omega_0)$  en  $\omega_0$  :

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{abs}} = -\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} = B_{12} u_{em}(\omega_0) N_1 = B_{12} \varphi(\omega_0) e_{em} N_1$$

avec  $B_{12}$ , le coefficient d'Einstein relatif à l'absorption.

#### 4. Le processus d'émission stimulée (ou émission induite)

##### Diagramme de l'émission stimulée *animation*

La figure 3 représente le processus d'émission stimulée, c'est-à-dire induite par un photon.

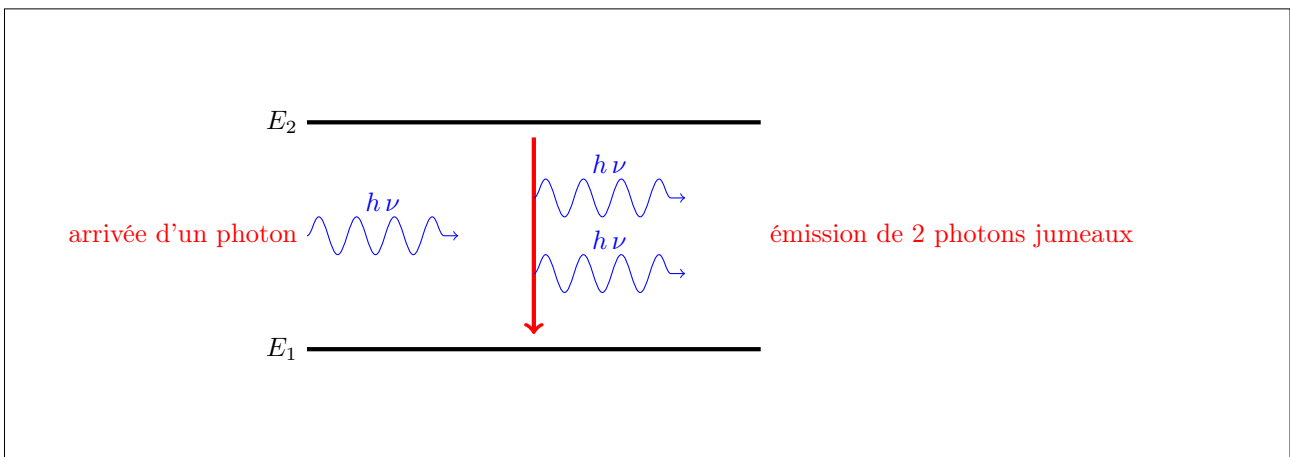


FIGURE 3 – Diagramme de l'émission stimulée

##### Émission stimulée *définition*

Lors de l'émission stimulée, le système passe du niveau d'énergie supérieure ( $E_2$ ), au niveau d'énergie inférieure ( $E_1$ ) en émettant un photon d'énergie  $h\nu = \hbar\omega$ , comme dans le cas de l'émission spontanée.

Cependant, cette émission est stimulée par l'arrivée d'un photon d'énergie proche de  $h\nu_0 = \hbar\omega_0 = E_2 - E_1$ . Aussi, au terme de l'émission stimulée existent deux photons

dit "jumeaux" car ayant les mêmes caractéristiques.

La probabilité de l'émission stimulée est proportionnelle à la population du niveau d'énergie  $E_2$ , mais aussi à la densité spectrale des photons  $u_{em}(\omega_0)$  en  $\omega_0$  :

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{sti}} = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{sti}} = B_{21} u_{em}(\omega_0) N_2 = B_{21} \varphi(\omega_0) e_{em} N_2$$

avec  $B_{21}$ , le coefficient d'Einstein relatif à l'émission stimulée.

## 5. Bilans de population

### II- Les principes du LASER

#### 1. L'amplification LASER

##### Causes d'amplification et d'absorption de la lumière *schéma*

La figure 4 représente les particules matérielles du milieu qui, lors de l'incidence d'un photon (en bleu), émettent de la lumière par émission stimulée (en vert), absorbent ou diffusent la lumière par émission spontanée (en rouge).

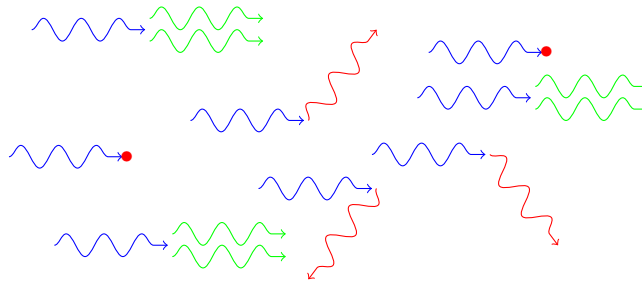


FIGURE 4 – Causes d'amplification et d'absorption de la lumière

##### Surface de contrôle pour un bilan d'énergie de l'onde électromagnétique *schéma*

La figure 5 représente le système entre  $z$  et  $z + dz$  pour le bilan d'énergie de l'onde électromagnétique.

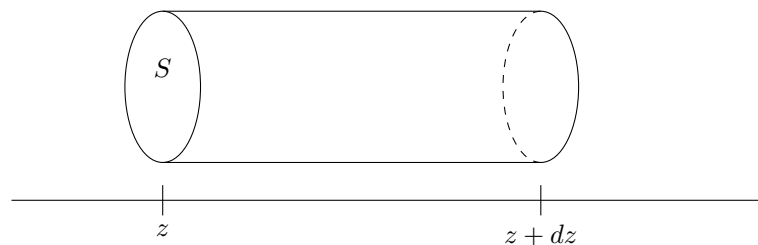


FIGURE 5 – Surface de contrôle pour un bilan d'énergie de l'onde électromagnétique

#### 2. Le pompage optique et l'inversion de population





### Nécessité de l'inversion de population pour l'amplification *à retenir*

Dans le cas de l'inversion de population, le niveau de plus haute énergie est plus peuplé que le niveau de basse énergie ( $n_2 > n_1$ ).

Il y a alors amplification de l'onde incidente qui augmente de façon exponentielle : c'est l'effet LASER.

Le milieu sera alors dit actif ou amplificateur (plutôt qu'absorbant), car l'émission stimulée devient prédominante.



### Pompage *s'y retrouver*

Le pompage permet de réaliser l'inversion de population en peuplant le niveau d'énergie  $E_2$  plus que le niveau d'énergie  $E_1$  qui doit pour cela se dépeupler très rapidement vers un état d'énergie plus basse.

Ce pompage peut être réalisé de différentes façons :

- grâce à de l'énergie apportée de façon lumineuse (par des flashes par exemple). Ce "pompage optique" a valu le prix Nobel à Alfred Kastler en 1966.
- grâce à de l'énergie apportée de façon électrique (par des décharges par exemple). Ce pompage est par exemple utilisé dans le laser hélium-néon.
- grâce à toute autre méthode (passage du courant électrique dans les diodes lasers par exemple).



### Le pompage optique dans le cas du laser hélium -néon *schéma*

La figure 6 représente les niveaux d'énergie (simplifiés) de l'hélium et du néon pour la transition à 633 nm.

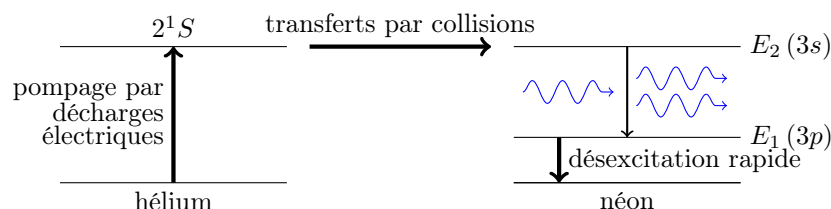


FIGURE 6 – Le pompage optique dans le cas du laser hélium -néon

## 3. La cavité LASER et le bouclage



### Intérêt de la cavité LASER *s'y retrouver*

Comme dans le domaine optique le phénomène d'émission spontanée est important, il va falloir que l'onde électromagnétique traverse le milieu amplificateur à de nombreuses reprises pour être amplifiée.



### Schéma de l'oscillateur LASER *schéma*

La figure 7 représente le schéma de principe d'un oscillateur optique.

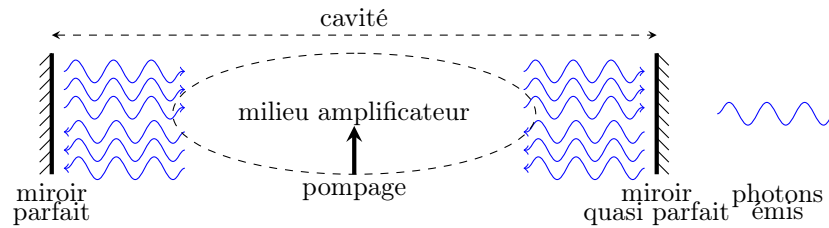


FIGURE 7 – Schéma de l'oscillateur LASER

### 1 Modes possibles de la cavité LASER *théorème*

La cavité LASER de longueur  $\ell$  impose par les conditions aux limites une résonance pour les ondes de longueur d'onde  $\lambda$  et de fréquences  $\nu$  telles que

$$\ell = n \frac{\lambda}{2} \text{ où } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \nu = n \frac{c}{2\ell} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

Les modes propres de la cavité LASER de longueur  $\ell$  ont pour fréquences

$$\nu_n = n \frac{c}{2\ell} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Deux modes sont donc éloignés de  $\Delta\nu = \frac{c}{2\ell}$  (c'est l'intervalle spectral libre de la cavité).

### Les modes oscillants du LASER *schéma*

La figure 8 représente les modes d'un laser. Seuls les modes pour lesquels le gain est supérieur aux pertes peuvent commencer à osciller (en régime permanent, les gains égalent alors les pertes pour ces modes).

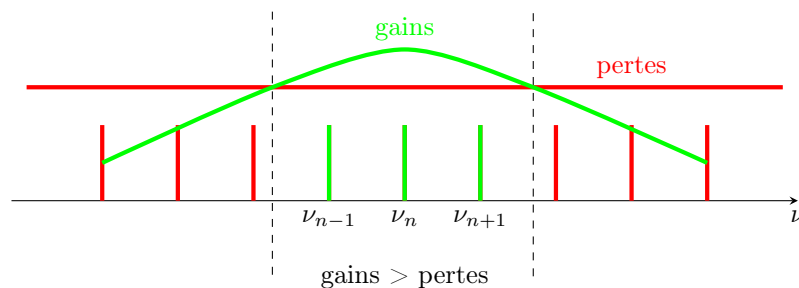


FIGURE 8 – Les modes oscillants du LASER

### Schéma de l'oscillateur de Wien en électronique *schéma*

La figure 9 représente le schéma de principe d'un oscillateur électronique, comme celui de Wien.

### Analogie avec l'oscillateur de Wien en électronique *tableau*

Le tableau 1 présente l'analogie entre les systèmes optique (LASER) et électronique (oscillateur de Wien par exemple). L'objectif d'un oscillateur autonome est de fabriquer un signal sinusoïdal stable de fréquence fixée et d'amplitude assez importante à partir d'un

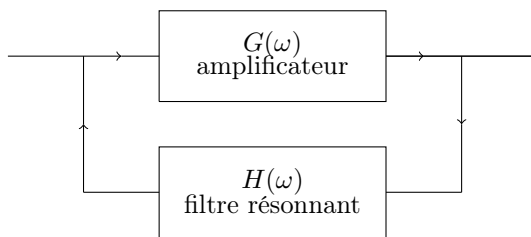


FIGURE 9 – Schéma de l'oscillateur de Wien en électronique

- signal non sinusoïdal d'amplitude très faible (bruit).

oscillateur	oscillateur électronique	LASER
amplificateur	amplificateur non inverseur à AO	milieu amplificateur (émission stimulée)
filtre	filtre passe bande (de Wien par exemple)	filtre Fabry Pèrot (cavité)
bouclage	bouclage par rétroaction	réflexion sur les miroirs
apport d'énergie	alimentation de l'AO	pompage

TABLE 1 – analogie entre les oscillateurs optique et électronique

### III- L'optique LASER

#### 1. Le faisceau du LASER



#### Amplitude de la vibration lumineuse *s'y retrouver*

On admet que, sous certaines conditions, l'amplitude scalaire de la vibration lumineuse émise par un laser est du type (dit "gaussien fondamental") :

$$\tilde{A}(r, z, t) = \tilde{A}_0 f(r, z) e^{-i(\omega t - \varphi(z))}$$

en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Il ne s'agit pas d'une onde plane progressive monochromatique mais d'une onde qui se propage principalement suivant les  $z$  croissants, et qui est limitée dans l'espace, suivant la distance  $r$  à l'axe  $Oz$ .

L'amplitude est

$$f(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$$



#### Waist et longueur de Rayleigh du faisceau gaussien *définition*

Le faisceau gaussien d'un laser est caractérisé par :

- sa taille minimale (ou "waist") notée  $w_0$ ,
- sa longueur de Rayleigh notée  $z_R$ .

La taille du faisceau à l'abscisse  $z$  est

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

### Faisceau gaussien d'un laser schéma

La figure 10 représente l'évolution de l'extension du faisceau d'un laser au cours de sa propagation.

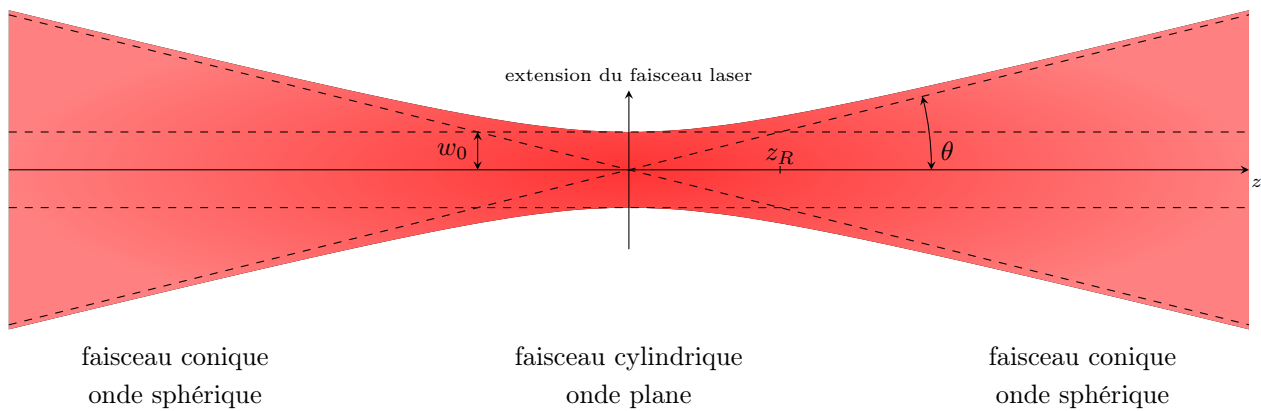


FIGURE 10 – Faisceau gaussien d'un laser

### 2 Comportements du faisceau à courte et longue distance théorème

La limite de diffraction due à l'ouverture  $w_0$  donne  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ .  
D'autre part, si  $z \gg z_R$ ,

$$w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R} \Rightarrow \theta = \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R}$$

A courte distance, au contraire,  $w(z) \approx w_0$ .  $\Rightarrow$

On retiendra que :

- pour  $|z| < z_R$ , l'onde laser est quasi plane limitée, et le faisceau cylindrique de largeur  $w_0$ ,
- pour  $|z| \gg z_R$ , l'onde laser est quasi sphérique limitée (de centre  $O$ ), et le faisceau conique d'ouverture angulaire  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_R}$ .

## 2. Transformation du faisceau d'un LASER par une lentille convergente

### Focalisation du faisceau gaussien d'un laser schéma

La figure 11 représente l'évolution de l'extension du faisceau d'un laser focalisé grâce à une lentille convergente.

### 3 Extension de la tache de focalisation d'un laser théorème

Un faisceau laser de caractéristiques  $w_0$  et  $z_R$  incident sur une lentille convergente de focale  $f'$  est transformé en faisceau laser de caractéristiques  $w'_0$  et  $z'_R$ .

Le schéma montre que  $\theta' = \frac{w_0}{f'}$ . Or d'autre part,  $\theta' = \frac{\lambda}{\pi w'_0} = \frac{w_0}{z'_R}$ . Aussi,  $\frac{w_0}{f'} = \frac{\lambda}{\pi w'_0}$ , soit  $w'_0 = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}$ . Comme l'ouverture de la lentille est  $w_0 < f'$ , on trouve  $w'_0 > \lambda$ .  $\Rightarrow$

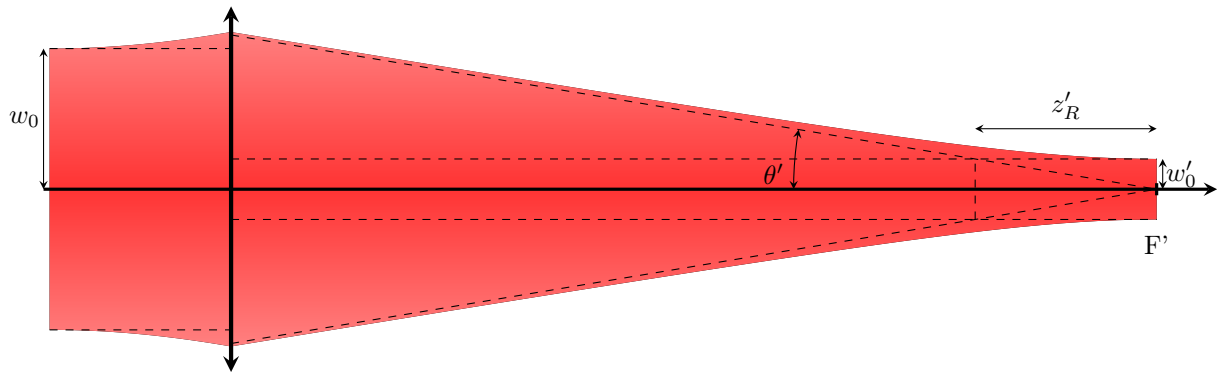


FIGURE 11 – Focalisation du faisceau gaussien d'un laser

La tache de focalisation d'un laser est au moins de l'ordre de la longueur d'onde :  $w'_0 > \lambda$ .

**Évolution des capacités de stockage des disques optiques** *tableau*

Le tableau 2 présente l'évolution des longueurs d'ondes et des capacités de stockage des disques optiques.

disque optique	année	$\lambda$	couleur	capacité
CD	1982	780 nm	IR	0,8 Go
DVD	1997	650 nm	rouge	8 Go
blu-Ray	2006	405 nm	bleu	100 Go

TABLE 2 – évolution des disques optiques

**Conjugaison et faisceau gaussien d'un laser** *schéma*

La figure 12 représente l'évolution de l'extension du faisceau d'un laser pour lequel une lentille convergente opère une conjugaison des deux "waists".

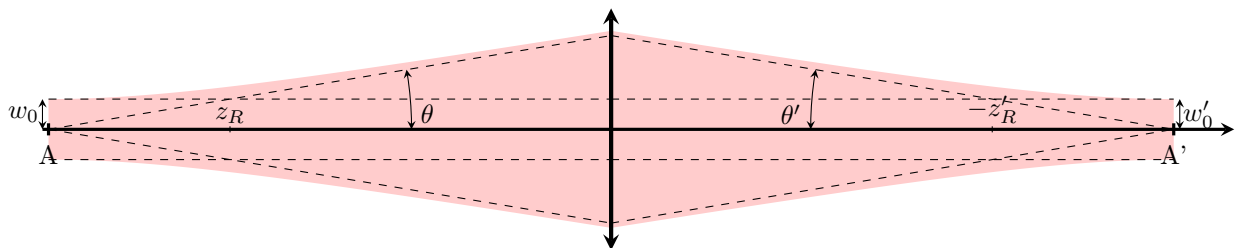


FIGURE 12 – Conjugaison et faisceau gaussien d'un laser

**Élargisseur de faisceau d'un laser** *schéma*

La figure 13 représente un télescope formé de deux lentilles convergentes permet d'élargir le faisceau d'un laser.

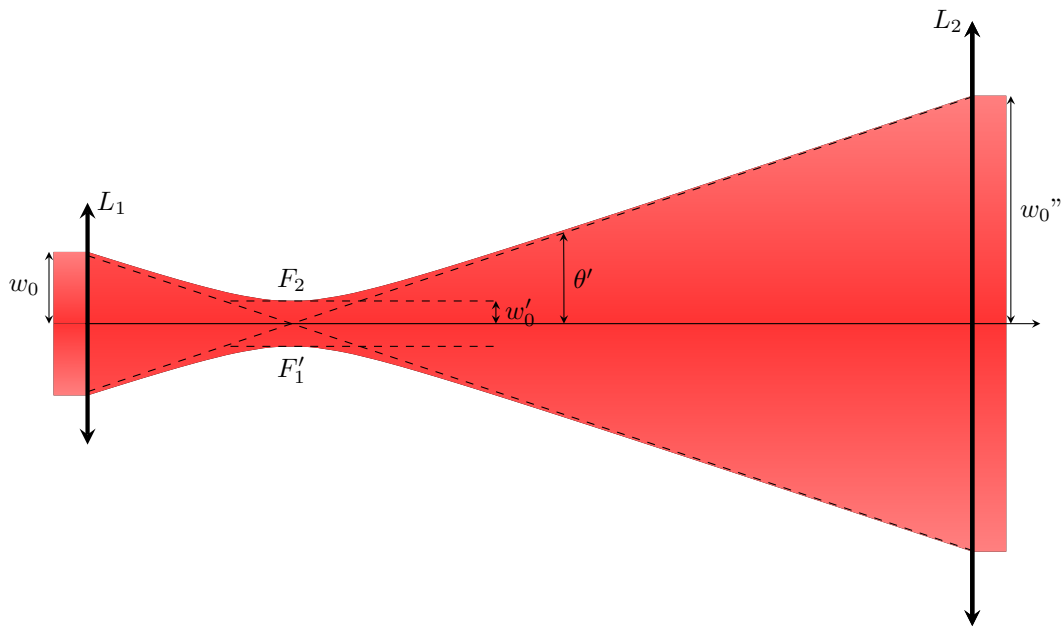


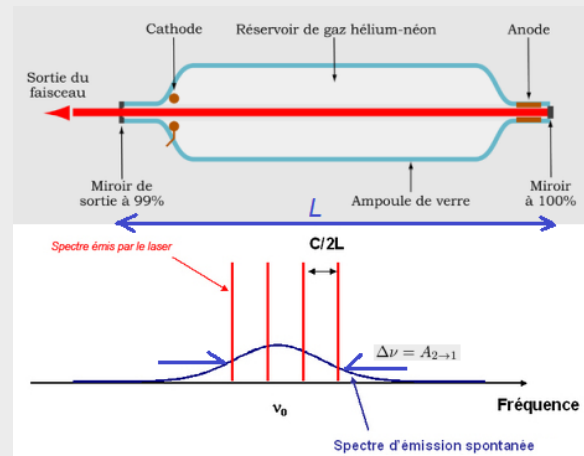
FIGURE 13 – Élargisseur de faisceau d'un laser

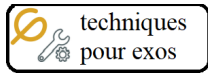


Valeurs numériques (compléments)  
Le LASER

Laser HeNe

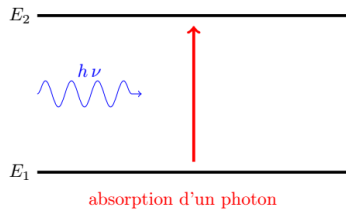
type	laser à gaz
couleur	rouge
$\lambda$	633 nm
puissance	1 - 10 mW
classe 3a (Vision directe dangereuse)	si $P > 1$ mW
classe 2 (Protection assurée par réflexe)	si $P < 1$ mW
largeur à mi-hauteur $\Delta\nu = A_{2 \rightarrow 1}$	1,5 GHz
nombre de modes	$\geq 2$
waist	0,25 mm
divergence angulaire	2 mrad





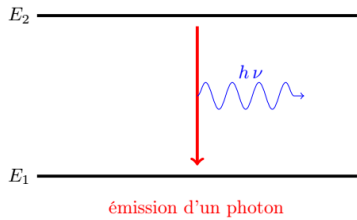
## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Interaction lumière – matière



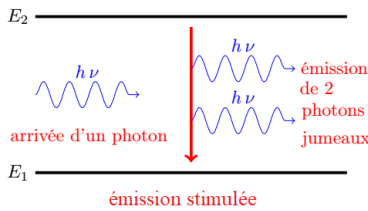
#### Absorption

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{abs}} = -\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{abs}} = B_{12} u_{em}(\omega_0) N_1 = B_{12} \varphi(\omega_0) e_{em} N_1$$



#### Emission spontanée

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{spo}} = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{spo}} = A_{21} N_2$$



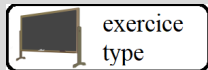
#### Emission stimulée

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{sti}} = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{sti}} = B_{21} u_{em}(\omega_0) N_2 = B_{21} \varphi(\omega_0) e_{em} N_2$$

où la densité d'énergie électromagnétique est

$$e_{em} = \int_{\omega=0}^{\infty} u_{em}(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad u_{em}(\omega) = \varphi(\omega) e_{em} \quad \text{avec} \quad \int_{\omega=0}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega = 1$$

**NB :** penser à vérifier que  $\frac{dN_{tot}}{dt} = 0$  car  $N_{tot} = \text{cste}$ .



### Exercice 20.1 (le prof fait cet exercice type jeudi) Interaction lumière-matière

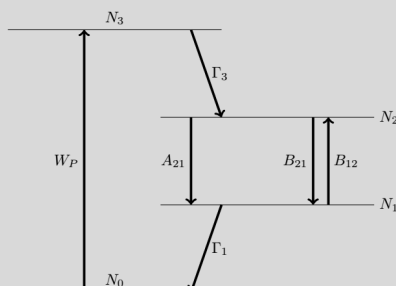
#### 1) Relations entre coefficients d'Einstein

- 1.a) Écrire les lois d'évolutions des deux populations  $N_1$  et  $N_2$ .
- 1.b) Réécrire ces relations dans le cas stationnaire et à l'équilibre thermique.
- 1.c) En déduire les relations entre les coefficients d'Einstein grâce à la loi de Planck du corps noir :

$$u_{em}(\omega) = \frac{\frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}$$

#### 2) Comparaison des probabilités de l'émission spontanée et de l'émission stimulée

- 2.a) Déterminer une condition sur  $\omega_0$  et  $T$  pour que la probabilité de l'émission spontanée soit plus grande que celle de l'émission stimulée.
- 2.b) Est-ce le cas pour le Soleil ?
- 2.c) À température ambiante, pour quel domaine de longueur d'onde la probabilité de l'émission spontanée est-elle plus grande que celle de l'émission stimulée ?



#### 3) Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 4 niveaux (comme celui du laser hélium-néon) est donné ci-contre.

$W_p$  est relatif à un processus de pompage (absorption thermique).

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  sont relatifs à des émissions spontanées.

#### 3.a) Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.

On pose  $N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = \text{cste}$  et  $N_2 = N_1 + \Delta N$ .

#### 3.b) Exprimer $\Delta N$ en fonction de $N_0$ en régime stationnaire.

#### 3.c) En déduire une condition pour l'inversion de population.

1) Relations entre coefficients d'Einstein

1.a) On trouve

$$\left(\frac{dN_1}{dt}\right) = -\left(\frac{dN_2}{dt}\right) = u_{em}(\omega_0) (B_{21} N_2 - B_{12} N_1) + A_{21} N_2$$

1.b) Dans le cas stationnaire

$$u_{em}(\omega_0) (B_{21} N_2 - B_{12} N_1) + A_{21} N_2 = 0$$

et à l'équilibre thermique

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{\frac{\hbar \omega_0}{k_B T}}$$

1.c) D'où

$$u_{em}(\omega_0) \left( B_{21} - B_{12} e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \right) + A_{21} = 0 \Rightarrow u_{em}(\omega_0) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} - 1}$$

On en déduit les relations entre les coefficients d'Einstein :

$$B_{12} = B_{21} = B = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega_0^3} A_{21}$$

2) Comparaison des la probabilités de l'émission spontanée et de l'émission stimulée

2.a) Pour que la probabilité de l'émission spontanée soit plus grande que celle de l'émission stimulée, il faut que :

$$A_{21} N_2 > B_{21} u_{em}(\omega_0) N_2 \Leftrightarrow A_{21} > \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega_0^3} A_{21} u_{em}(\omega_0) \Leftrightarrow e^{\frac{\hbar \omega_0}{k_B T}} - 1 > 1$$

soit encore  $\hbar \omega_0 > k_B T$ .

2.b) Pour le Soleil,  $\omega_0 \approx 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $T \approx 5000 \text{ K}$ , ce qui donne  $\frac{\hbar \omega_0}{k_B T} \approx \frac{10^{-18}}{10^{-20}} > 1$  : c'est l'émission spontanée qui domine.

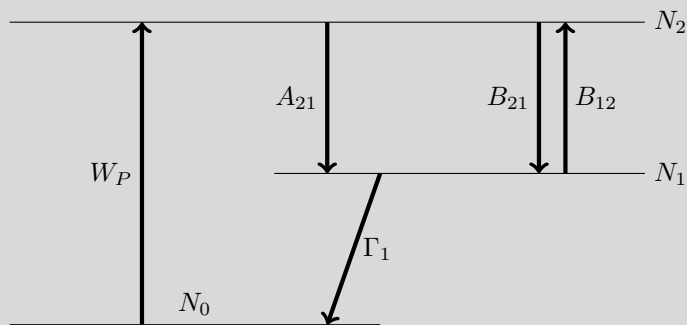
2.c) Cherchons  $\lambda$  tel que

$$\hbar \frac{2\pi c}{\lambda} > k_B T \Leftrightarrow \lambda < \frac{hc}{k_B T} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,3 \times 10^{-23} \times 300} = 13 \times 10^{-5} \text{ m}$$

soit dans l'infra rouge : dans le visible, c'est l'émission spontanée qui domine.



**Exercice 20.2** pour s'entraîner  
**Étude d'un LASER à 3 niveaux**



Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 3 niveaux est donné ci-contre.

On note  $u(\omega)$  la densité énergétique donnée par la loi de Planck.

1) Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.

On pose  $N = N_0 + N_1 + N_2 = cste$  et  $N_2 = N_1 + \Delta N$ .

2) Exprimer  $\Delta N$  en fonction de  $N_0$  en régime stationnaire.

3) En déduire une condition pour l'inversion de population.



1) Les équations d'évolution de chacun des niveaux sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = -W_p N_0 + \Gamma_1 N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} = -\Gamma_1 N_1 + A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 - B_{12} u(\omega) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = +W_p N_0 - A_{21} N_2 - B_{21} u(\omega) N_2 + B_{12} u(\omega) N_1 \end{cases}$$

2) En régime stationnaire :

$$\begin{cases} W_p N_0 = \Gamma_1 N_1 \\ \Gamma_1 N_1 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 \\ W_p N_0 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 \end{cases}$$

La seconde équation se réécrit :

$$\Gamma_1 N_1 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 + A_{21} \Delta N + B_{21} u(\omega) \Delta N$$

$\Rightarrow$

$$(A_{21} + B_{21} u(\omega)) \Delta N = (\Gamma_1 + B_{12} u(\omega) - A_{21} - B_{21} u(\omega)) N_1 = (\Gamma_1 - A_{21}) N_1$$

car  $B_{12} = B_{21}$ . D'autre part, la première relation donne :

$$W_p N_0 = \Gamma_1 N_1 \Rightarrow (A_{21} + B_{21} u(\omega)) \Delta N = (\Gamma_1 - A_{21}) N_1 = \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_1}\right) W_p N_0$$

Aussi, on a :

$$\Delta N = \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_1}\right) W_p \frac{N_0}{(A_{21} + B_{21} u(\omega))}$$

3) Une condition pour l'inversion de population est donc

$$\Delta N > 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{A_{21}}{\Gamma_1}\right) > 0$$

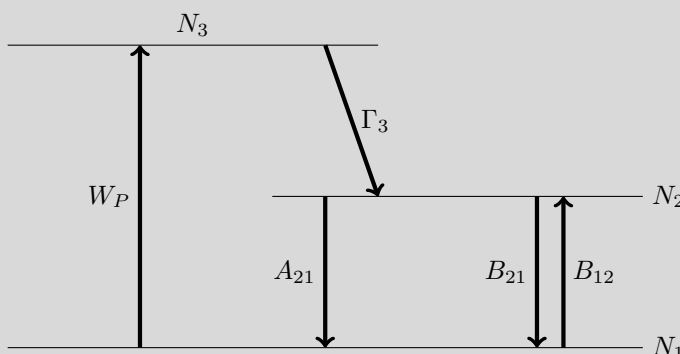
soit

$$\Gamma_1 > A_{21}$$

(la vidange du niveau 1 vers le niveau 0 doit se faire très rapidement, plus que celle du niveau 2 vers le niveau 1 : le niveau 2 est "métastable").



### Exercice 20.3 pour s'entraîner Étude d'un autre LASER à 3 niveaux



Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 3 niveaux est donné ci-contre.

On note  $u(\omega)$  la densité énergétique donnée par la loi de Planck.

1) Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.

On pose  $N = N_3 + N_1 + N_2 = cste$  et  $N_2 = N_1 + \Delta N$ .

2) Exprimer  $\Delta N$  en fonction de  $N_3$  en régime stationnaire.

3) En déduire une condition pour l'inversion de population.

1) Les équations d'évolution de chacun des niveaux sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN_3}{dt} = +W_p N_1 - \Gamma_3 N_3 \\ \frac{dN_1}{dt} = -W_p N_1 + A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 - B_{12} u(\omega) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = \Gamma_3 N_3 - A_{21} N_2 - B_{21} u(\omega) N_2 + B_{12} u(\omega) N_1 \end{cases}$$

2) En régime stationnaire :

$$\begin{cases} W_p N_1 = \Gamma_3 N_3 \\ W_p N_1 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 \\ \Gamma_3 N_3 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} u(\omega) N_2 \end{cases}$$

La seconde équation se réécrit :

$$W_p N_1 + B_{12} u(\omega) N_1 = A_{21} N_1 + B_{21} u(\omega) N_1 + A_{21} \Delta N + B_{21} u(\omega) \Delta N$$

$\Rightarrow$

$$(A_{21} + B_{21} u(\omega)) \Delta N = (W_p + B_{12} u(\omega) - A_{21} - B_{21} u(\omega)) N_1 = (W_p - A_{21}) N_1$$

car  $B_{12} = B_{21}$ . D'autre part, la première relation donne :

$$W_p N_1 = \Gamma_3 N_3 \Rightarrow (A_{21} + B_{21} u(\omega)) \Delta N = (W_p - A_{21}) N_1 = \left(1 - \frac{A_{21}}{W_p}\right) \Gamma_3 N_3$$

Aussi, on a :

$$\Delta N = \left(1 - \frac{A_{21}}{W_p}\right) \Gamma_3 \frac{N_3}{(A_{21} + B_{21} u(\omega))}$$

3) Une condition pour l'inversion de population est donc

$$\Delta N > 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{A_{21}}{W_p}\right) > 0$$

soit

$$W_p > A_{21}$$

(la pompe doit être plus rapide que l'émission spontanée).



**Exercice 20.4** pour s'entraîner

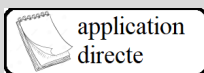
### Pompage du LASER à ytterbium

Un cristal d'ytterbium (Yb :YAG) est inséré dans une cavité laser. Il subit un pompage optique à 940 nm de puissance 1 W. La longueur d'onde d'émission de l'ytterbium est de 1030 nm.

1) Quelle est la puissance lumineuse maximale de ce laser ?

1) En supposant que tous les photons de pompe sont absorbés par le cristal, et utilisés pour l'effet laser, le nombre de photons émis par unité de temps  $N_e$  est égal au nombre de photons absorbés par unité de temps par pompage optique  $N_a$  :

$$N_e = N_a = \frac{P_a}{h\nu} = \frac{P_a}{hc} \lambda_a = \frac{P_e}{hc} \lambda_e \Rightarrow P_e = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} P_a = \frac{940}{1030} \times 1 = 0,91 \text{ W}$$



**Exercice 20.5** pour s'entraîner

### Caractéristiques ondulatoires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $R = 1,0 \text{ mm}$  d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . La puissance moyenne émise est  $P_e = 1,0 \text{ mW}$ .

On donne :  $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

1) Calculer les amplitudes

1.a)  $E_{max}$  du champ électrique ;

1.b) et  $B_{max}$  du champ magnétique.

$$1) P_e = c \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \cdot E_{max}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{2 \cdot \mu_0} \right) \pi \cdot R^2, \text{ avec } B_{max} = \frac{E_{max}}{c}, \text{ donc :}$$

$$1.a) E_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_e}{\varepsilon_0 \cdot c \cdot \pi \cdot R^2}} = 4,9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1};$$

$$1.b) B_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot P_e}{c \cdot \pi \cdot R^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$



**Exercice 20.6** pour s'entraîner

### Caractéristiques corpusculaires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $R = 1,0 \text{ mm}$  d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . La puissance moyenne émise est  $P_e = 1,0 \text{ mW}$ .

On donne :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

1) Déterminer le nombre de photons

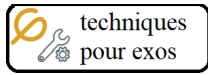
1.a)  $n$  par unité de volume dans le faisceau ;

1.b)  $N$  de photons émis par seconde par le laser.

$$1) P_e = \frac{n \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot c \cdot dt) \cdot h \frac{c}{\lambda}}{dt} \text{ donc :}$$

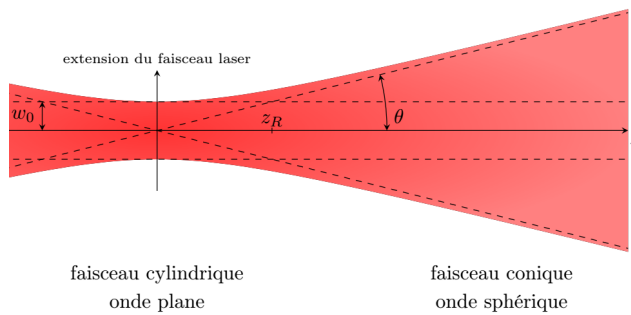
$$1.a) n = \frac{P_e \cdot \lambda}{\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot c^2} = 3,4 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3};$$

$$1.b) N = n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot c = \frac{P_e \cdot \lambda}{h \cdot c} = 3,2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$



**Techniques pour passer du cours aux exercices**  
(à maîtriser)

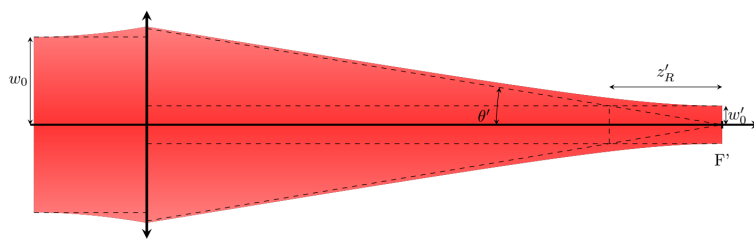
**Faisceau d'un laser**



$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_R}$$

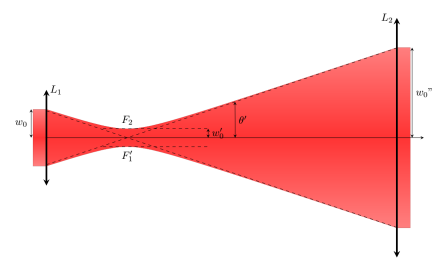
- pour  $|z| < z_R$ ,  
onde plane limitée  
faisceau cylindrique de largeur  $w_0$ ,
- pour  $|z| \gg z_R$   
onde sphérique (de centre  $O$ )  
faisceau conique d'ouverture angulaire  $\theta$ .

**Focalisation d'un laser**



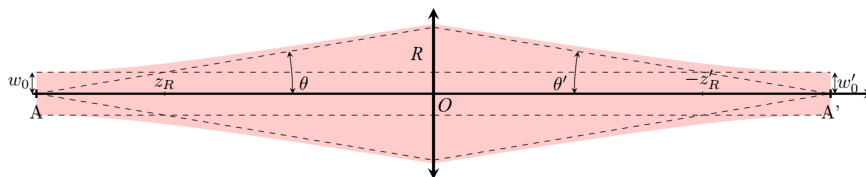
$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi w'_0} = \frac{w'_0}{z'_R} = \frac{w_0}{f'}$$

**Elargissement d'un laser**



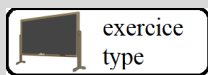
$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi w'_0} = \frac{w'_0}{z'_R} = \frac{w_0}{f'_1} = \frac{w_0''}{f'_2}$$

**Conjugaison**



$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{R}{AO}$$

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi w'_0} = \frac{w'_0}{z'_R} = \frac{R}{OA'}$$

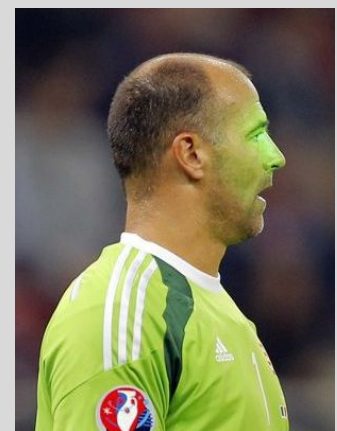


**Exercice 20.7** (le prof fait cet exercice type jeudi)  
**Faisceau gaussien du laser**

article paru dans "le figaro" le 03/12/2014, disponible à l'adresse <http://sante.lefigaro.fr/actualite/2014/12/03/23127-gare-danger-pointeurs-lasers-pour-yeux>.

"En apparence inoffensifs, les pointeurs laser, principalement utilisés notamment dans les conférences pour désigner des informations sur un tableau, peuvent causer des dommages très importants lorsqu'ils sont dirigés vers les yeux. [...]"

En France, seuls les lasers dont la puissance ne dépasse pas 1 mW (classe 1 et 2) sont autorisés à la vente. Mais il est très facile de se procurer sur Internet des modèles beaucoup plus puissants, de catégories 3 et 4, normalement réservés à un usage professionnel. Selon le Pr Renard, "les plus dangereux sont ceux qui émettent dans la couleur verte, avec une puissance pouvant aller jusqu'à 1500 mW. Projetée pendant quelques instants à courte distance sur l'œil, la lumière peut brûler la rétine et laisser des séquelles irréversibles".



1) Estimer la puissance surfacique du faisceau d'un pointeur laser reçu par un joueur sur un terrain de football.

- 1) Il faut estimer la distance  $\ell \approx 50$  m ; savoir si on est en modélisation cylindrique ou conique.



application  
directe

### Exercice 20.8 pour s'entraîner Largeur d'un faisceau laser

Un laser hélium-néon émet une onde quasiment plane et monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 633\text{nm}$ . A la sortie du laser, le faisceau est limité par un trou du diamètre du faisceau de sortie :  $D_1 = 3,0\text{mm}$ .

- 1) Déterminer l'ordre de grandeur du diamètre  $D$  du faisceau à une distance :
- $L = 15\text{m}$  ;
  - $L = 150\text{m}$ .

- 1) L'image, à l'infini, d'un trou de rayon  $R$ , éclairé par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ), a une ouverture angulaire :  $\Delta\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{R}$  (c'est la "tache d'Airy"). Ainsi, si on assimile la tangente de cet angle à l'angle lui-même

$$D = \frac{2,44 \cdot \lambda \cdot L}{D_0}$$

- $L_2 = 15\text{m} \Rightarrow D = 7,7\text{mm}$ .
- $L_3 = 150\text{m} \Rightarrow D = 77\text{mm}$ .



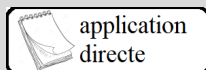
application  
directe

### Exercice 20.9 pour s'entraîner Caractéristiques du faisceau du LASER Nd :YAG

On s'intéresse au laser Nd :Yag, de longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm.

- 1) Déterminer la divergence  $\theta$  à longue distance et la longueur de Rayleigh  $z_R$  d'un tel laser
- lorsque son faisceau est focalisé «assez efficacement», avec un waist  $w_0 = 10$   $\mu\text{m}$ ,
  - lorsque son faisceau est «assez collimaté», avec un waist  $w_0 = 1$  mm.

- 1) Comme  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_R}$
- lorsque  $w_0 = 10$   $\mu\text{m}$ ,  $\theta = 1,8^\circ$  et  $z_R = 314$   $\mu\text{m}$ ,
  - lorsque  $w_0 = 1$  mm,  $\theta = 0,018^\circ$  et  $z_R = 3,14$  m.



application  
directe

### Exercice 20.10 pour s'entraîner Caractéristiques du faisceau d'une diode laser

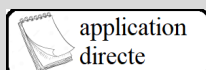
La cavité optique d'une diode laser  $GaAs$  a à peu près les dimensions suivantes :

- suivant  $Oz$  : 1 mm ;
- suivant  $Ox$  : 1  $\mu\text{m}$  ;
- suivant  $Oy$  : 100  $\mu\text{m}$ .

Elle émet un rayonnement dans l'infra-rouge à 870 nm.

- 1) Estimer la divergence de son faisceau, assimilé à un faisceau gaussien
- suivant la direction  $Ox$
  - et suivant la direction  $Oy$ .

- 1) La divergence du faisceau est due à la diffraction :  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ , soit :
- suivant la direction  $Ox$  :  $\theta_x = \frac{780 \times 10^{-9}}{\pi \times 1 \times 10^{-6}} = 248 \times 10^{-3} \text{ rad} = 14^\circ$ ,
  - et suivant la direction  $Oy$  :  $\theta_y = \frac{780 \times 10^{-9}}{\pi \times 100 \times 10^{-6}} = 248 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0,14^\circ$ .



application  
directe

### Exercice 20.11 pour s'entraîner Focalisation d'un LASER

On cherche à focaliser un faisceau laser collimaté, issu d'un laser He-Ne (longueur d'onde 633 nm), de taille 1 mm, situé à une position  $z = 0$  de telle façon que la longueur de Rayleigh du faisceau focalisé soit égale à 30 mm.

1) Quelle distance focale doit posséder la lentille qu'il faut utiliser ?

1) Les données sont :  $\lambda = 633$  nm, avant la lentille le waist est  $w_0 = 1$  mm, après la lentille, on veut que la longueur de Rayleigh soit  $z'_R = 30$  mm.

Le faisceau conique converge au foyer, avec un angle

$$\theta' = \frac{w_0}{f'} = \frac{\lambda}{\pi w'_0} = \frac{w'_0}{z'_R}$$

aussi le waist après la lentille est  $w'_0{}^2 = \frac{\lambda z'_R}{\pi}$ , d'où

$$f' = \frac{w_0}{w'_0} z'_R = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z'_R}} z'_R w_0 = \sqrt{\frac{\pi z'_R}{\lambda}} w_0 = \sqrt{\frac{\pi \times 30 \times 10^{-3}}{633 \times 10^{-9}}} \times 1 \times 10^{-3} = 39 \text{ cm}$$



### Exercice 20.12 pour s'entraîner Focalisation d'un LASER (bis)

Un faisceau laser, issu d'un laser He-Ne (de longueur d'onde 633 nm), a une taille 1 mm située à une distance  $d$  (grande devant sa longueur de Rayleigh) d'une lentille de focale  $f' = \frac{d}{3}$ .

- 1) Quelle est la distance  $d'$  entre la lentille et la taille  $w'_0$  du faisceau après la lentille ?
- 2) Quelle est la nouvelle taille  $w'_0$  du faisceau après la lentille ?

1) La distance  $d'$  entre la lentille et la taille  $w'_0$  du faisceau après la lentille est donnée par la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{d'} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'}$$

d'où

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d} = \frac{3}{d} - \frac{1}{d} = \frac{2}{d}$$

donc  $d' = \frac{d}{2}$ .

2) Les données sont :  $\lambda = 633$  nm, avant la lentille le waist est  $w_0 = 1$  mm. L'angle du faisceau conique avant la lentille est

$$\theta = \frac{h}{d} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

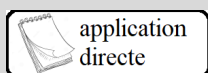
où  $h$  est la hauteur éclairée sur la lentille. et l'angle du faisceau conique après la lentille est

$$\theta' = \frac{h}{d'} = \frac{\lambda}{\pi w'_0}$$

donc

$$\frac{w'_0}{w_0} = \frac{d'}{d} = \frac{1}{2}$$

Aussi la nouvelle taille du faisceau après la lentille est  $w'_0 = 0,5$  mm.



### Exercice 20.13 pour s'entraîner Epuraton d'un faisceau LASER

Soit un faisceau laser gaussien peu divergent de rayon  $w_0$ .

On admet que l'amplitude scalaire de la vibration lumineuse émise par un laser est :

$$\tilde{A}(r, z, t) = \tilde{A}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{-i(\omega t - \varphi(z))} \text{ avec } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

1) Déterminer l'évolution de l'éclairement  $I(r, z)$  dans un plan transverse  $z$  à la propagation.

2) De façon à "épurer" le faisceau du laser, on positionne un diaphragme circulaire de rayon  $a$ , centré en  $z = 0$ .

2.a) Quelle est la proportion de l'énergie transmise à travers le diaphragme circulaire en fonction de  $a$  ?

2.b) Applications numériques :  $a = \frac{w_0}{2}$ ,  $a = \frac{3w_0}{4}$ ,  $a = w_0$  et  $a = 2w_0$ .

1) Comme  $I = k |\tilde{A}(r, z, t)|^2$ , on trouve

$$I(r, z, t) = I_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} \right)^2 = I_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-2\frac{r^2}{w(z)^2}} = I_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} e^{\frac{-2r^2}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}}$$

2) Diaphragme en  $z = 0$ .

2.a)

$$I(r, z = 0, t) = I_0 e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}}$$

L'énergie totale est donc

$$E_{tot} = I_0 \int \int e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}} d^2S = I_0 \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}} dr r d\theta = 2\pi I_0 \int_{r=0}^{\infty} r e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}} dr$$

tandis que l'énergie qui passe à travers le diaphragme est

$$E(a) = 2\pi I_0 \int_{r=0}^a r e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}} dr$$

Pour calculer l'intégrale, on peut faire le changement de variable suivant :  $t = r^2 \Rightarrow dt = 2r dr$ , soit

$$E(a) = \pi I_0 \int_{t=0}^{a^2} e^{-\frac{2t}{w_0^2}} dt = \pi I_0 \left[ \frac{w_0^2}{-2} e^{-\frac{2t}{w_0^2}} \right]_{t=0}^{a^2} = \frac{\pi I_0 w_0^2}{2} \left[ 1 - e^{-\frac{2a^2}{w_0^2}} \right]$$

Aussi, la fraction est

$$\frac{E(a)}{E_{tot}} = 1 - e^{-\frac{2a^2}{w_0^2}}$$

2.b) AN :  $\frac{E(a=\frac{w_0}{2})}{E_{tot}} = 0,39$ ,  $\frac{E(a=\frac{3w_0}{4})}{E_{tot}} = 0,67$ ,  $\frac{E(a=w_0)}{E_{tot}} = 0,86$ , et  $\frac{E(a=2w_0)}{E_{tot}} = 0,999$



application  
directe

**Exercice 20.14** pour s'entraîner

### Onde sphérique

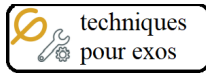
On s'intéresse à une onde sphérique monochromatique, de pulsation  $\omega$  et de centre  $O$ . Son amplitude est de la forme :  $A(\vec{r}, t) = a(r) \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

1) Donner l'expression du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans le repère sphérique en distinguant les deux cas : onde convergente ou onde divergente.

2) Pourquoi l'amplitude  $a(r)$  est-elle proportionnelle à l'inverse de la distance  $r$  ?

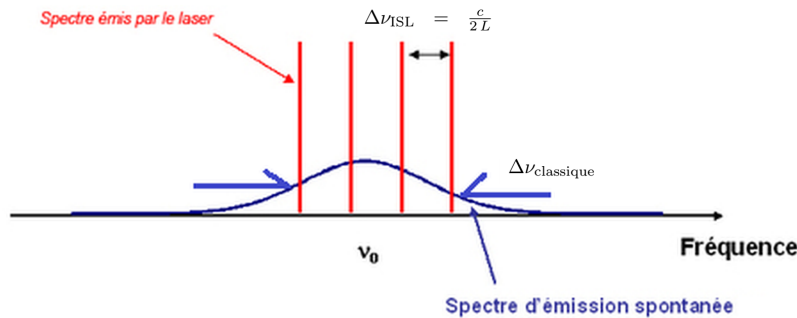
1)  $\vec{k} = +k \cdot \vec{u}_r$  dans le cas d'une onde divergente et  $\vec{k} = -k \cdot \vec{u}_r$  dans le cas d'une onde convergente.

2) Le vecteur de Poynting est  $\vec{\Pi} = C \cdot A(\vec{r}, t)^2 \cdot \vec{u}_r$  où  $C$  est une constante. Or son flux à travers une sphère de centre  $O$  de rayon  $r$  est le même  $\forall r$  :  $\oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint \text{div}(\vec{\Pi}) \cdot d^3\tau = D \Rightarrow C \cdot a(r)^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = D$ .

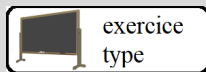


## Techniques pour passer du cours aux exercices (à maîtriser)

### Spectre d'un LASER



Le spectre d'un laser présente un "peigne de Dirac", avec des pics éloignés de l'intervalle spectral libre  $\Delta\nu_{\text{ISL}} = \frac{c}{2L}$  (où  $L$  est la longueur de la cavité), à l'intérieur de la raie de largeur  $\Delta\nu_{\text{classique}}$  obtenue dans le cas d'une source classique.



### Exercice 20.15 (le prof fait cet exercice type jeudi) Spectre d'un laser

1) Profil de raie lorentzien de l'élargissement naturel

On se place dans le modèle de l'électron élastiquement lié : un atome est composé d'un ion, supposé fixe (en  $O$ ), et d'un électron de masse  $m$ , et de charge  $q = -e$ . On soumet l'atome à une onde électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , plane polarisée suivant  $\vec{u}_z$ , de pulsation  $\omega$ . On associe à  $E_z = E_0 \cos(\omega t)$  le complexe  $\underline{E}_z = E_0 e^{j\omega t}$ . On admet que l'équation suivie par l'électron est :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m} E_z(t)$$

**1.a)** Montrer que l'atome se comporte comme un dipôle électrique oscillant dont on donnera le moment dipolaire  $\vec{p}$ .

On admet qu'un dipôle rayonne, dans une direction faisant un angle  $\theta$  (compté dans les coordonnées sphériques à partir de l'axe défini par  $\vec{p}$ ), une onde de champ électromagnétique  $\vec{E}(r, t) = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \sin\theta \vec{u}_\theta$  et  $\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$ .

**1.b)** Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  du rayonnement de l'atome. En déduire la puissance totale moyenne rayonnée par l'atome  $I(\omega)$ .

**1.c)** En déduire que la raie atomique, proche de la résonance, est lorentzienne :

$$I_{\text{Lorentz}}(\omega) = \frac{C_{\text{Lorentz}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_{\text{Lorentz}}^2}$$

Expliciter la largeur de la raie  $\Gamma_{\text{Lorentz}}$ . Quelle est la largeur à mi-hauteur ?

**1.d)** Pour la raie de l'He-Ne à 633 nm, la durée caractéristique est  $\Delta t = 1,2$  ms. Estimer les valeurs de  $A_{21}$  et  $\Gamma_{\text{Lorentz}}$ .

2) Profil gaussien

Du fait de l'effet Doppler, les photons émis à une fréquence  $\nu_0$  dans le référentiel de l'atome seront détectés à une fréquence  $\nu \neq \nu_0$  par l'observateur. Le décalage en fréquence d'un atome qui possède une vitesse  $v_x$  le long de la ligne de visée  $Ox$ , pour des vitesses non relativistes, vaut :  $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v_x}{c}$ .

La probabilité que l'atome de masse  $M$  à la température  $T$  ait la projection vitesse  $v_x$  sur l'axe  $Ox$  est proportionnelle au facteur de Boltzmann  $\exp\left(-\frac{M v_x^2}{2k_B T}\right)$ .

**2.a)** Exprimer alors la distribution des atomes en fonction de la pulsation  $\omega$  reçue par le récepteur dans la direction  $Ox$ . En déduire que le profil de la raie dû à l'élargissement par effet Doppler est gaussien :

$$I_{\text{Gauss}}(\omega) = C_{\text{Gauss}} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma_{\text{Gauss}}}\right)^2}$$

La largeur de la raie du néon à 633 nm est  $\Delta\nu_{\text{classique}} = 1,3$  GHz.

**2.b)** Montrer que l'effet Doppler est la source dominant d'élargissement de la raie du néon.

3) Modes du laser

Un laser hélium néon a une cavité de longueur  $L = 15$  cm.

**3.a)** Déterminer l'intervalle spectral libre  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$  entre deux modes pouvant exister dans la cavité.

**3.b)** Estimer le nombre de modes du laser.



## 1) Profil de raie lorentzien de l'élargissement naturel

**1.a)** L'équation de l'oscillateur étant linéaire, on a le droit de remplacer les grandeurs réelles par leurs grandeurs complexes associées.

Aussi,  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m} \underline{E}_z$  donne :  $(\omega_0^2 - \omega^2 + j \omega \frac{\omega_0}{Q}) z = -\frac{e}{m} \underline{E}_z$ .

Si on prend le module de l'équation complexe précédente, on trouve :

$$Z_0 = \frac{e E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

Le moment dipolaire est :  $\vec{p} = +e \cdot \vec{N} \vec{P} = -e \cdot z(t) \cdot \vec{u}_z$ , soit :

$$\vec{p} = -e Z_0 \cos(\omega t + \Phi) \vec{u}_z$$

**1.b)**  $\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) = \omega^2 \cdot e \cdot X_0 \cdot \cos(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi)$ .

Donc le champ électrique est :  $\vec{E}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\omega^2 \cdot e \cdot X_0}{r} \cos(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi) \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta$ .

Et le champ magnétique :  $\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot c} \cdot \frac{\omega^2 \cdot e \cdot X_0}{r} \cos(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi) \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_\varphi$ .

Le vecteur de Poynting est :  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , donc :

$$\vec{\Pi}(r, t) = \frac{\mu_0 \cdot \omega^4 \cdot e^2 \cdot X_0^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot c \cdot r^2} \cos^2(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi) \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{u}_r$$

La puissance totale est  $P = \oiint \vec{\Pi} \cdot \vec{d}^2\Sigma$  à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  :  $\vec{d}^2\Sigma = r^2 \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \vec{u}_r$ .

Aussi,  $P = \frac{\mu_0 \cdot \omega^4 \cdot e^2 \cdot Z_0^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot c} \cos^2(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi) \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$ .

En posant  $u = \cos \theta$ ,  $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \int_1^{-1} (1 - u^2)(-du) = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$ ,

on trouve  $P = \frac{\mu_0 \cdot \omega^4 \cdot e^2 \cdot Z_0^2}{6 \cdot \pi \cdot c} \cos^2(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi)$

Puisque  $\langle \cos^2(\omega t - \frac{\omega \cdot r}{c} + \Phi) \rangle = \frac{1}{2}$ , la puissance totale moyenne rayonnée par l'atome (diffusée) est :  $\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \cdot \omega^4 \cdot e^2 \cdot Z_0^2}{12 \cdot \pi \cdot c}$ .

Soit, en remplaçant  $Z_0$  par sa valeur,  $I = \frac{I_0 \cdot \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{Q}\right)^2}$ , avec :

$$I_0 = \frac{\mu_0 \cdot e^4}{12 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot c} \cdot E_0^2$$

**1.c)** Si  $\omega \approx \omega_0$ ,

$$I \approx \frac{I_0 \cdot \omega_0^4}{[(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)]^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{Q}\right)^2} = \frac{I_0 \cdot \omega_0^4}{4 \cdot \omega_0^2 \cdot (\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\omega_0^4}{Q^2}}$$

$C_{\text{Lorentz}} = \frac{I_0 \cdot \omega_0^4}{4 \cdot \omega_0^2} \Rightarrow I'_0 = \frac{I_0 \cdot \omega_0^2}{4}$  et  $\Gamma_{\text{Lorentz}} = \frac{\omega_0}{2 \cdot Q}$ , homogène à une pulsation.

Ainsi,  $I \approx \frac{I'_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\omega_0^2}{4 \cdot Q^2}}$  ;  $I(\omega \approx \omega_0) \approx \frac{I'_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_{\text{Lorentz}}^2}$

$I(\omega)$  est maximum lorsque le dénominateur est minimal, i.e. en  $\omega_{\text{max}} = \omega_0$ .

Largeur à mi-hauteur :  $I(\omega_{\text{max}} \pm \frac{\Delta\omega}{2}) = \frac{I(\omega_{\text{max}})}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{I'_0}{\frac{\Delta\omega^2}{4} + \Gamma_{\text{Lorentz}}^2} = \frac{1}{2} \frac{I'_0}{\Gamma_{\text{Lorentz}}^2} \Leftrightarrow \Delta\omega^2 = 4 \cdot \Gamma_{\text{Lorentz}}^2$ , soit :  $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$

**1.d)** La largeur naturelle d'une raie spectrale est la largeur minimale que la raie puisse présenter, due aux durées de vie des niveaux. Elle est directement reliée au coefficient d'Einstein d'émission spontanée.

Pour la raie de l'He-Ne à 633 nm, la durée caractéristique est  $\Delta t = 1,2$  ms. Donc  $\Gamma_{\text{Lorentz}} \approx A_{21} = 8 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ .

## 2) Profil gaussien

**2.a)** L'intensité de l'émission dans l'intervalle de fréquence de  $\nu$  à  $\nu + d\nu$  est proportionnelle à  $\exp\left(-\frac{M \cdot c^2 (\nu - \nu_0)^2}{2 \nu_0^2 k_B T}\right) d\nu$ . On a donc bien :

$$I_{\text{Gauss}}(\omega) = C_{\text{Gauss}} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma_{\text{Gauss}}}\right)^2}$$

avec

$$\Gamma_{\text{Gauss}}^2 = \frac{2\omega_0^2 k_B T}{M c^2} = \frac{8\pi^2 k_B T}{M \lambda^2}$$

**2.b)** La largeur de la raie du néon à 633 nm est  $\Delta\nu_{\text{classique}} \approx 10^9 \text{ Hz} \gg \Gamma_{\text{Lorentz}} \approx 10^3 \text{ Hz}$ . C'est donc l'effet Doppler qui est la source dominant d'élargissement de la raie du néon.

Vérification :

$$\Gamma_{\text{Gauss}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 k_B T}{M \lambda^2}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300}{20 \times 10^{-3} / (6,02 \times 10^{23}) \times (633 \times 10^{-9})^2}} \approx \sqrt{\frac{18 \times 10^2}{10^{-2} \times 10^{-14}}} = 4 \times 10^9 \text{ Hz}$$

C'est le bon ordre de grandeur.

**3)** Modes du laser

**3.a)** Les modes vérifient des nœuds de vibration pour  $\vec{E}$  sur les bords de la cavité :  $n \text{ in}\mathbb{N}$ ,

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} = n \frac{c}{2\nu_n} \Rightarrow \nu_n = n \frac{c}{2L}$$

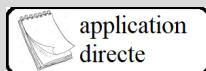
L'intervalle spectral libre est donc

$$\Delta\nu_{\text{ISL}} = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L} = \frac{3 \times 10^8}{0,3} = 10^9 \text{ Hz}$$

**3.b)** Le nombre de modes du laser est approximativement :

$$\frac{\Delta\nu_{\text{classique}}}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \approx \frac{10^9}{10^9} \approx 1$$

(quelques modes).



application  
directe

**Exercice 20.16** pour s'entraîner

### Bande d'amplification d'un LASER

Le milieu amplificateur d'un laser hélium néon émet un rayonnement à 633 nm. Ce milieu possède une bande spectrale d'amplification de  $\delta\nu = 1,275 \text{ GHz}$  (on suppose que le profil spectral est rectangulaire pour simplifier). La cavité linéaire du laser a une longueur de 30 cm.

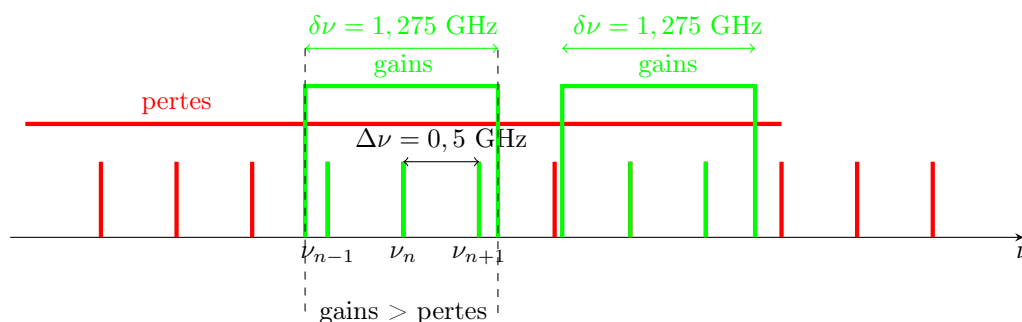
1) Estimer le nombre de modes du laser.

1) Deux modes sont éloignés de

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0,30} = 0,5 \text{ GHz}$$

Le nombre de modes est égal à la bande spectrale divisée par l'intervalle entre deux modes longitudinaux :

$$N = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{1,275}{0,5} = 2,55$$



Remarque : le nombre de modes pouvant osciller sera généralement de 2 mais il est possible que 3 modes oscillent si un mode est parfaitement au centre de la transition.



**Exercice 20.17** pour s'entraîner  
**Bande d'amplification d'un LASER (bis)**

Le milieu amplificateur d'un laser au  $CO_2$  émet un rayonnement à  $10,6 \mu\text{m}$ . Ce milieu possède une bande spectrale d'amplification de  $\delta\nu = 0,5 \text{ GHz}$  (on suppose que le profil spectral est rectangulaire pour simplifier). La cavité linéaire du laser a une longueur  $\ell = 1,0 \text{ m}$ .

1) Montrer que le laser a peu de chance d'osciller.

On positionne un des miroirs de la cavité du laser sur une cale piezo électrique qui permet de faire varier  $\ell$  de  $\delta\ell$ .

2) Estimer le déplacement maximal  $\delta\ell$  pour être sûr qu'un mode tombe dans la bande d'amplification.

1) Deux modes sont éloignés de

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\ell} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 1} = 1,5 \text{ GHz}$$

Le nombre de modes est égal à la bande spectrale divisée par l'intervalle entre deux modes longitudinaux :

$$N = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{0,5}{1,5} = 0,33$$

Si on ne fait rien, le laser a peu de chance d'osciller.

2) Dans le pire des cas, la bande spectrale d'amplification du  $CO_2$  est située exactement au milieu de deux modes. Dans ce cas, l'écart de fréquence qui sépare l'extrémité de la bande spectrale du mode le plus proche est :

$$d\nu = \frac{\Delta\nu}{2} - \frac{\delta\nu}{2}$$

Or la fréquence d'un mode peut s'exprimer sous la forme  $\nu_n = n \frac{c}{2\ell}$  où  $n \in \mathbb{N}$  (en général très grand). Si on bouge la cavité de  $\delta\ell$ , la fréquence bouge de  $d\nu$  avec :

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{\delta\ell}{\ell}$$

On veut donc

$$\delta\ell = \left( \frac{\Delta\nu}{2} - \frac{\delta\nu}{2} \right) \frac{\ell}{\nu} = \left( \frac{\Delta\nu}{2} - \frac{\delta\nu}{2} \right) \frac{\ell \lambda}{c} = \left( \frac{1,5 \times 10^9}{2} - \frac{0,5 \times 10^9}{2} \right) \frac{1 \times 10,6 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} = 17,6 \mu\text{m}$$



**Exercice 20.18** pour s'entraîner  
**Modes d'une cavité LASER (1)**

1) Donner l'écart en fréquence entre deux modes longitudinaux dans une cavité linéaire dont la longueur optique est  $L = 300 \text{ mm}$ .

L'écart entre deux modes longitudinaux consécutifs est  $c/2L$  avec  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Ici, cet écart vaut  $500 \text{ MHz}$ .



**Exercice 20.19** pour s'entraîner  
**Modes d'une cavité LASER (2)**

Un laser dont les modes sont synchronisés en phase est un laser à impulsion, chaque impulsion faisant un aller et retour dans la cavité LASER.

1) Quelle est la fréquence de répétition des impulsions d'un laser dont les modes sont synchronisés en phase et dont la cavité est de longueur optique égale à  $L = 1 \text{ m}$  ?

1) L'écart temporel entre deux impulsions issues d'un laser linéaire à modes synchronisés en phase est de  $2L/c$ . La fréquence est donc  $c/2L = 150$  MHz.



**Exercice 20.20** pour s'entraîner  
**Modes d'une cavité LASER (3)**

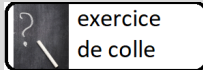
On dispose d'un laser Hélium-Néon, de longueur optique de cavité égale à 20 cm et émettant à 632,8 nm.

- 1) Quel est l'écart en fréquence entre deux modes longitudinaux consécutifs ?
- 2) En déduire l'écart en longueur d'onde.

1) L'écart en fréquence entre deux modes est de  $\Delta\nu = \frac{c}{2L} = 750$  MHz.

2) Comme  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ , on trouve

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\nu \lambda}{\nu} = \frac{\Delta\nu \lambda^2}{c} = \frac{\lambda^2}{2L} = 1 \text{ pm}$$



exercice  
de colle

### Exercice 20.21 Etude du faisceau d'un LASER hélium-néon

#### 1) Première modélisation de l'onde

On s'intéresse à l'onde électromagnétique issue du laser hélium-néon.

**1.a)** Donner l'expression du champ électrique complexe d'une onde plane progressive harmonique homogène. Expliquer pourquoi ce modèle est mis en défaut par une simple observation.

En fait, l'onde issue du laser hélium néon peut être modélisée par une onde gaussienne dont le champ électrique complexe s'écrit :

$$\underline{E}(r, z, t) = \underline{E}_0 e^{-j(\omega t - k z)} \frac{w_0 e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}}{w(z)} e^{j\left(\frac{k r^2}{2R(z)} - \varphi_G(z)\right)}$$

dans un repère cylindrique d'axe  $Oz$ , l'axe optique de la cavité, avec  $\varphi_G(z)$  telle que  $\tan \varphi_G(z) = \frac{z}{z_R}$ ,  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$  et  $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$ .

**1.b)** Donner les noms des constantes  $w_0$  et  $z_R$  ainsi que la relation qui lie ces constantes. Tracer, pour  $z \geq 0$ , les allures des évolutions avec  $z$  de  $w(z)$ , de  $R(z)$  et de  $\varphi_G(z)$ .

**1.c)** Montrer que l'intensité lumineuse est de la forme  $I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$ . Tracer sur un même graphique les allures de  $I(r, z = z_1)$  et  $I(r, z = z_2)$  avec  $z_2 > z_1$ . Dire si cela est cohérent avec l'observation.

#### 2) Deuxième modélisation de l'onde, par parties

**2.a)** Donner, dans le domaine  $|z| \ll z_R$  une simplification des fonctions  $w(z)$ ,  $R(z)$ ,  $\varphi_G(z)$  et de la divergence  $\theta(z)$  du faisceau. Proposer une modélisation de l'onde dans ce domaine (on donnera un qualificatif à cette onde et on donnera les limites géométriques dans lesquelles cette modélisation est valable).

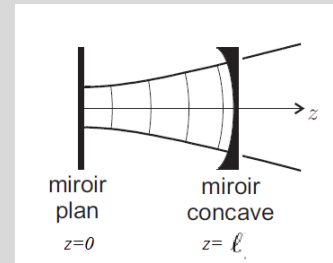
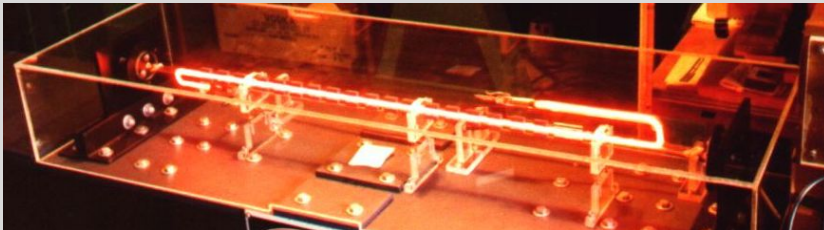
**2.b)** Faire de même dans le domaine  $|z| \gg z_R$ .

**2.c)** Définir la divergence  $\theta(z)$  du faisceau dans le dernier cas et donner son expression. Vérifier que la précédente modélisation est cohérente avec les lois de la diffraction.

#### 3) Caractéristiques du faisceau gaussien et cavité

On suppose que la cavité est composée

- en  $z = 0$  d'un miroir parfait plan (de rayon de courbure infini),
- en  $z = \ell = 30$  cm d'un miroir partiellement transparent concave, de rayon de courbure  $R_c = 1,0$  m.

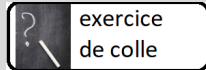


La forme des miroirs et la taille de la cavité imposent pour un laser les caractéristiques de l'onde gaussienne émise. En effet, le faisceau laser doit être tel que sa surface d'onde au niveau des miroirs épouse la forme des miroirs et donc que les rayons de courbure de l'onde gaussienne et du miroir soient égaux au niveau de ceux-ci.

**3.a)** Montrer que  $z_R = \sqrt{\ell (R_c - \ell)}$ .

**3.b)** Faire différentes applications numériques donnant  $z_R$ ,  $w_0$  et  $\theta$ .

**3.c)** Estimer le diamètre du faisceau du laser hélium néon en  $z = 10$  cm puis en  $z = 0, 10$  km en disant dans quel domaine de modélisation on se place à chaque fois.



exercice  
de colle

### Exercice 20.22

#### Des lasers pour la distance Terre-Lune et pour les CD

A la sortie du faisceau laser, son intensité est maximale au centre et décroît lorsqu'on s'écarte de son axe. Quelle est sa forme? On peut l'assimiler ce que l'on obtiendra il en illuminant perpendiculairement un trou circulaire. Dans un premier temps, le faisceau a une forme cylindrique, de section constante mais plus loin de l'ouverture, il devient conique, comme s'il était issu du centre du trou. C'est une manifestation du phénomène de diffraction : en franchissant un obstacle, la propagation de la lumière se modifie et n'est plus rectiligne.

Avec un trou circulaire, l'angle de divergence du faisceau est proche du rapport entre la longueur d'onde de la lumière et le diamètre du trou. Avant de devenir conique, le faisceau reste cylindrique jusqu'à ce que l'ouverture du cône soit comparable au diamètre du faisceau. Par exemple, un pointeur à laser rouge de 0,7 micromètre de longueur d'onde et de deux millimètres de diamètre a une divergence de 0,4 milliradian - cette divergence devient sensible à partir de deux mètres environ.

Pour diminuer la divergence, il faut un faisceau large. C'est critique lorsqu'on vise la Lune avec un laser ! La mission Apollo XI a déposé à la surface de notre satellite des catadioptrés qui réfléchissent la lumière dans la direction d'émission : si on éclaire depuis la Terre ces catadioptrés, la lumière nous revient et la durée de l'aller-retour renseigne sur la distance Terre- Lune (voir la figure 2).

Mais si le faisceau diverge trop, l'énergie se disperse dans l'espace et on ne capte plus rien. En utilisant un télescope, on dilate le rayon vert d'un laser, à 500 nanomètres de longueur d'onde, en un faisceau de 15 centimètres de diamètre. Son angle de divergence est de trois microradians (l'angle sous lequel on voit un objet de trois millimètres à une distance de un kilomètre). Les effets de la diffraction se manifestent à partir de 25 kilomètres. C'est peu à l'échelle des 400 000 kilomètres de la distance Terre-Lune. À cette distance, le faisceau crée, en théorie, une tache de plus de un kilomètre (sept en réalité, à cause des perturbations atmosphériques). Cela n'a pas que des inconvénients : on peut alors éclairer les catadioptrés sans trop les chercher !

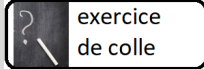
Comment focaliser le faisceau laser qui, à sa sortie, est cylindrique? En utilisant une lentille, qui le transforme en un faisceau conique convergent. On peut montrer (et même deviner, en vertu du principe du retour inverse de la lumière) que la taille de la tache focale est égale au rapport entre la longueur d'onde lumineuse et l'angle du cône formé, ou, plus exactement, pour les grands angles, le sinus de cet angle, nommé ouverture numérique du faisceau. Le sinus étant inférieur ou égal à un, la tache est toujours plus grande que la longueur d'onde.

Pour les CD, la lumière infrarouge de 785 nanomètres de longueur d'onde est focalisée avec une lentille d'ouverture numérique 0,45 et forme une tache de 1,56 micromètre. La densité d'information correspondante est de 0,65 gigaoctet pour un disque de 12 centimètres de diamètre. En jouant sur les deux paramètres (longueur d'onde et ouverture numérique), on peut augmenter la densité d'information. Ainsi, on a utilisé des longueurs d'onde plus courtes en passant au rouge à 650 nanomètres des DVD, puis au bleu à 405 nanomètres des Blu-Ray (voir la figure).



Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK *Idées de physique* © Pour la Science - n° 387 - Janvier 2010

- 1) On s'intéresse au pointeur à laser rouge dont parle le texte.
  - 1.a) Estimer son "waist" et sa longueur de Rayleigh.
  - 1.b) Tracer l'allure du faisceau gaussien d'un tel laser. On fera apparaître sur le schéma le "waist", la longueur de Rayleigh et l'angle de divergence à grande distance.
- 2) On s'intéresse au laser qui illumine la Lune dont parle le texte.
  - 2.a) Tracer le schéma du télescope qui permet d'élargir le faisceau. On fera apparaître les distances focales des deux lentilles convergentes ainsi que les "waists" avant et après le télescope.
  - 2.b) Estimer un ordre de grandeur pour le "waist" et la longueur de Rayleigh après le télescope.
  - 2.c) Vérifier, en utilisant ces valeurs, que sur la Lune, "le faisceau crée, en théorie, une tache de plus de un kilomètre".
- 3) Focalisation du faisceau d'un laser.
  - 3.a) Tracer le schéma du faisceau du laser focalisé grâce à une lentille convergente. On fera apparaître la distance focale de la lentille convergente, l'angle du cône formé ainsi que les "waists" avant et après la lentille.
  - 3.b) En se plaçant dans l'approximation de Gauss, exprimer l'ouverture numérique définie dans le texte et en déduire que la tache de focalisation du laser est au moins de l'ordre de la longueur d'onde.



### Exercice 20.23

#### L'expérience « laser - Lune »

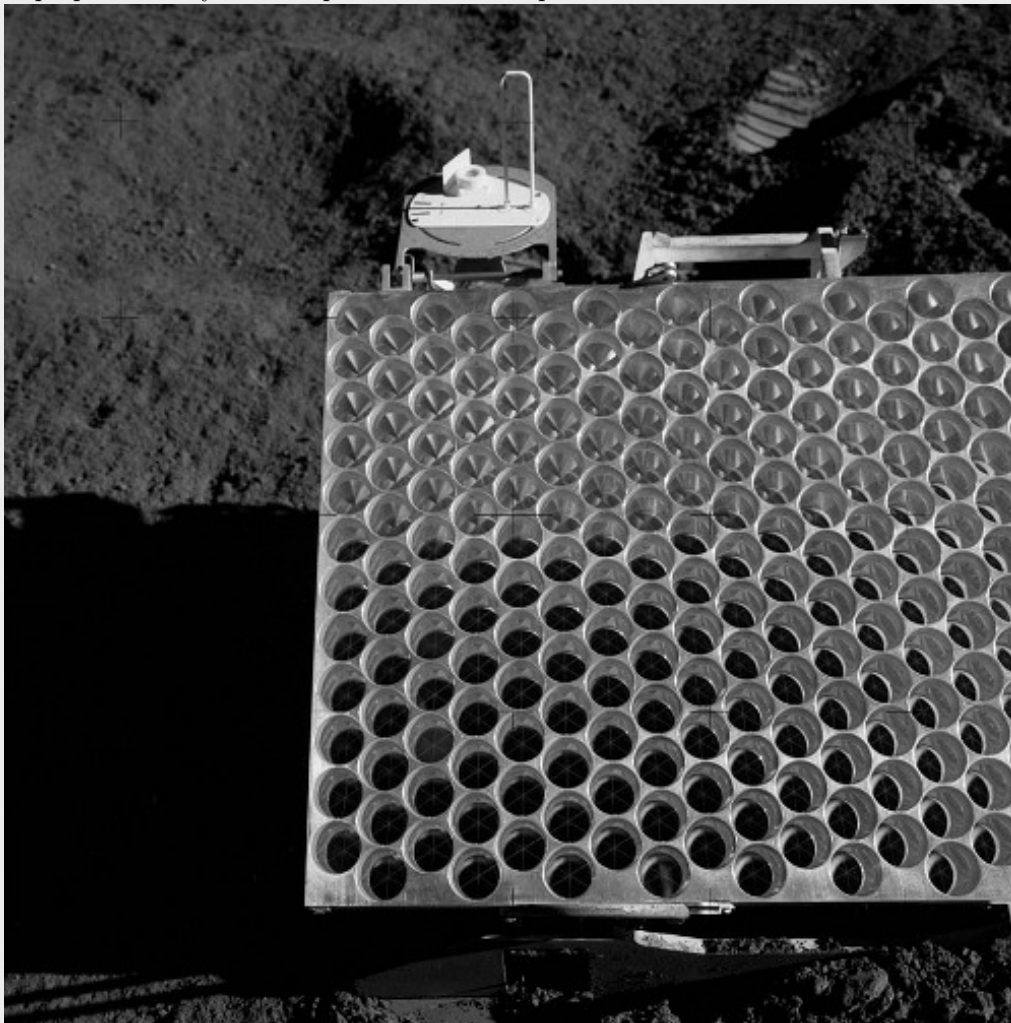
Extraits de l'expérience « laser-lune » (disponible en ligne : [culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/laser-distance-terre-lune.xml](http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/laser-distance-terre-lune.xml)) par Marie-Christine Artru. - Centre de recherche d'astrophysique de Lyon, ENS Lyon.

L'expérience « laser-lune » de l'Observatoire de La Côte d'Azur (OCA) a pour but la détermination précise de la distance terre-lune et de ses variations.

Le principe est la mesure de la durée d'aller-retour d'une impulsion laser émise du sol terrestre vers un réflecteur lunaire, soit  $\tau = 2,56$  s entre l'émission d'une impulsion et la réception du signal de retour correspondant. Actuellement, la distance terre-lune est déterminée au centimètre près, la précision atteinte sur la mesure de  $\tau$  étant de  $\delta\tau \approx 100$  ps.

Dans le cas du laser-lune la longueur d'onde est  $\lambda = 532$  nm (laser YAG-Nd doublé). Le diamètre du faisceau à la sortie du laser est de 1,2 cm. Le laser émet une centaine d'impulsions en 10 s. Chaque impulsion du laser émet une énergie  $E = 0,3$  J sur une durée de  $0,3 \mu\text{s}$  (puissance-crête de 1 MW!).

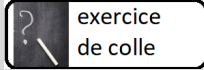
Le réflecteur lunaire est un panneau composé d'une mosaïque d'éléments catadioptriques, de type « coins de cube ». La proportion moyenne des photons détectés après réflexion sur la lune est inférieure à 1 sur  $10^{19}$ .



réflecteur déposé sur la Lune par les astronautes de la mission Appolo XV. C'est le plus grand des réflecteurs déposés sur la lune (dimensions 1 m x 0,6 m).

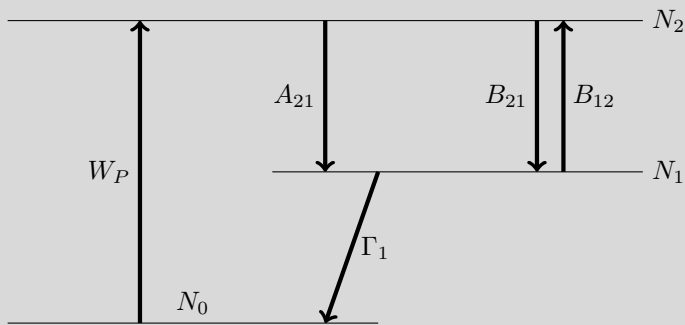
Source : NASA, Appolo XV Map and Image Library, image n° AS15-85-11468

- 1) Quel est le nombre de photons qui arrivent pour chaque impulsion sur le réflecteur posé sur la Lune ?



### Exercice 20.24

#### Étude d'un LASER à 3 niveaux



Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 3 niveaux est donné ci-contre.

On note  $u(\omega)$  la densité énergétique donnée par la loi de Planck.

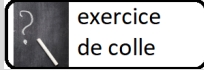
1) Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.

On pose  $N = N_0 + N_1 + N_2 = cste$  et  $N_2 = N_1 + \Delta N$ .

2) Exprimer  $\Delta N$  en fonction de  $N_0$  en régime stationnaire.

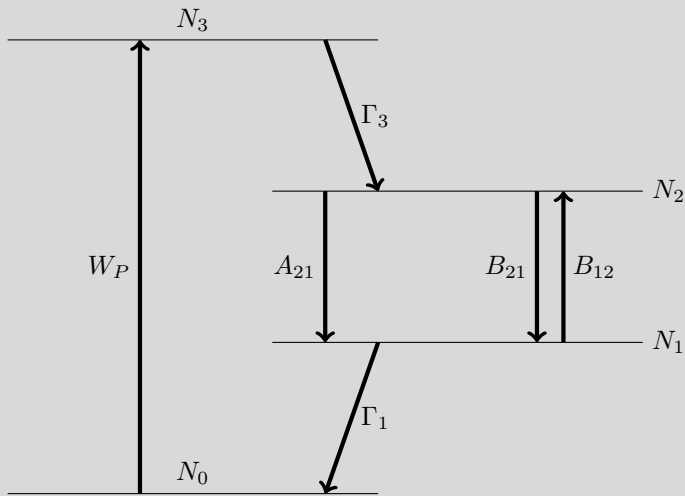
3) En déduire une condition pour l'inversion de population.





### Exercice 20.25

#### Étude d'un LASER à 4 niveaux



Le schéma des niveaux et des transitions d'un laser à 4 niveaux est donné ci-contre.

On note  $u(\omega)$  la densité énergétique donnée par la loi de Planck.

1) Écrire les équations d'évolution de chacun des niveaux.

On pose  $N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = \text{cste}$  et  $N_2 = N_1 + \Delta N$ .

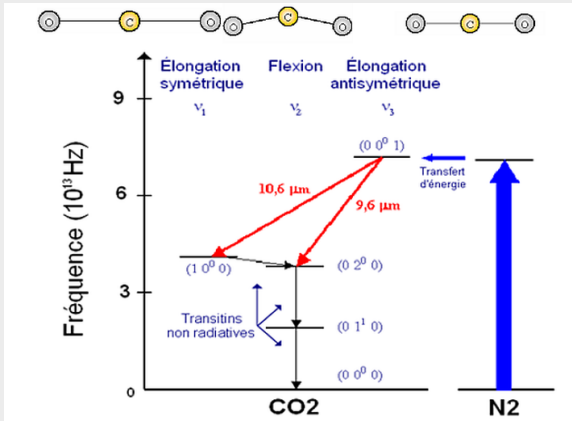
2) Exprimer  $\Delta N$  en fonction de  $N_0$  en régime stationnaire.

3) En déduire une condition pour l'inversion de population.

exercice de colle

**Exercice 20.26**  
**LASER au  $CO_2$**

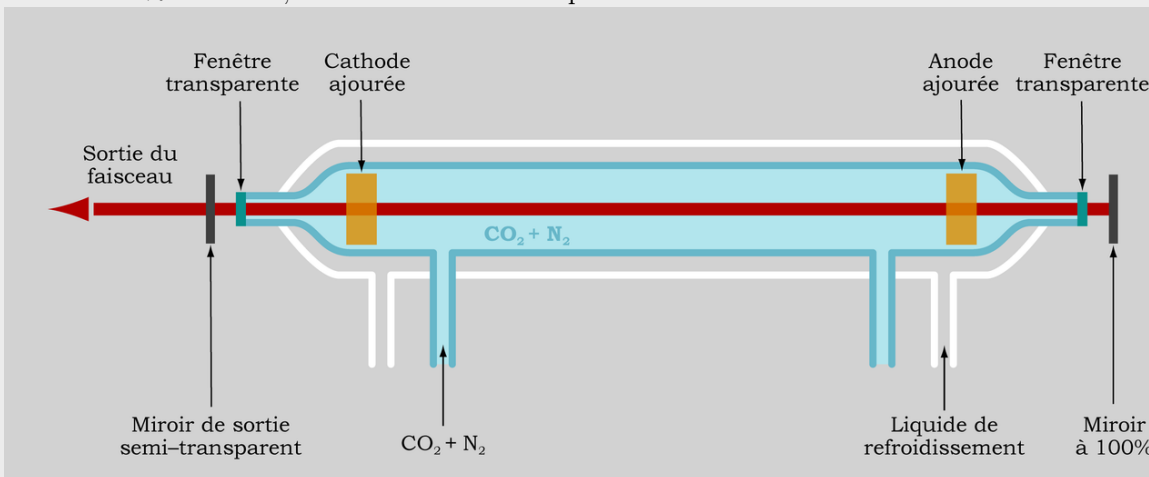
Les lasers au dioxyde de carbone en mode continu ont une grande puissance et sont aisément disponibles. Ils sont également très efficaces ; le rapport entre la puissance de pompage (puissance d'excitation) et la puissance de sortie atteint 20%. Les lasers au  $CO_2$  émettent dans l'infrarouge principalement à 10,6  $\mu\text{m}$  (micromètres).



L'inversion de population dans le laser est réalisée selon la séquence suivante :

- 1) la collision avec un électron induit un état excité vibratoire dans le diazote. Ses niveaux d'excitation vibratoires sont métastables et ont une grande durée de vie, ce qui ne permet pas de transfert radiatif spontané ;
- 2) le transfert de l'énergie de collision entre le diazote et le dioxyde de carbone induit une excitation vibratoire du dioxyde de carbone avec une énergie suffisante pour conduire à l'inversion de population souhaitée pour le fonctionnement du laser ;
- 3) les molécules restent dans un état excité inférieur.

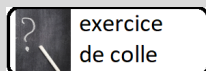
Le type le plus simple d'un laser au  $CO_2$  consiste en un tube à décharge fermé avec un mélange de gaz avec un miroir à 100% d'un côté, et un miroir semi-transparent du côté de la sortie.



Compte tenu des hautes puissances possibles associées à un coût raisonnable, les lasers au  $CO_2$  sont couramment utilisés dans l'industrie pour la découpe et la soudure, et, avec une moindre puissance, pour la gravure. On les retrouve aussi en chirurgie car ils opèrent sur une longueur d'onde très bien absorbée par l'eau, donc par les tissus vivants. Comme l'atmosphère terrestre est particulièrement transparente à l'infrarouge (surtout en dehors des raies d'absorption de l'eau), les lasers au  $CO_2$  sont aussi utilisés à des fins militaires (télémétrie) en utilisant les techniques du Lidar.

D'après [https://fr.wikipedia.org/wiki/Laser\\_au\\_dioxyde\\_de\\_carbone](https://fr.wikipedia.org/wiki/Laser_au_dioxyde_de_carbone).

- 1) Justifier que l'ordre de grandeur de l'élargissement de la raie du  $CO_2$  est  $\delta\nu \approx 0,1 \text{ GHz}$ .  
La cavité linéaire du laser a une longueur  $\ell = 30 \text{ cm}$ .
- 2) Montrer que le laser a peu de chance d'osciller.  
On positionne un des miroirs de la cavité du laser sur une cale piézo-électrique qui permet de faire varier  $\ell$  de  $\delta\ell$  précise au centième de micromètre sur plusieurs micromètres.
- 3) En estimant le déplacement maximal  $\delta\ell$  pour être sûr qu'un mode tombe dans la bande d'amplification, montrer que la cale piézo-électrique permet le démarrage du laser.



exercice  
de colle

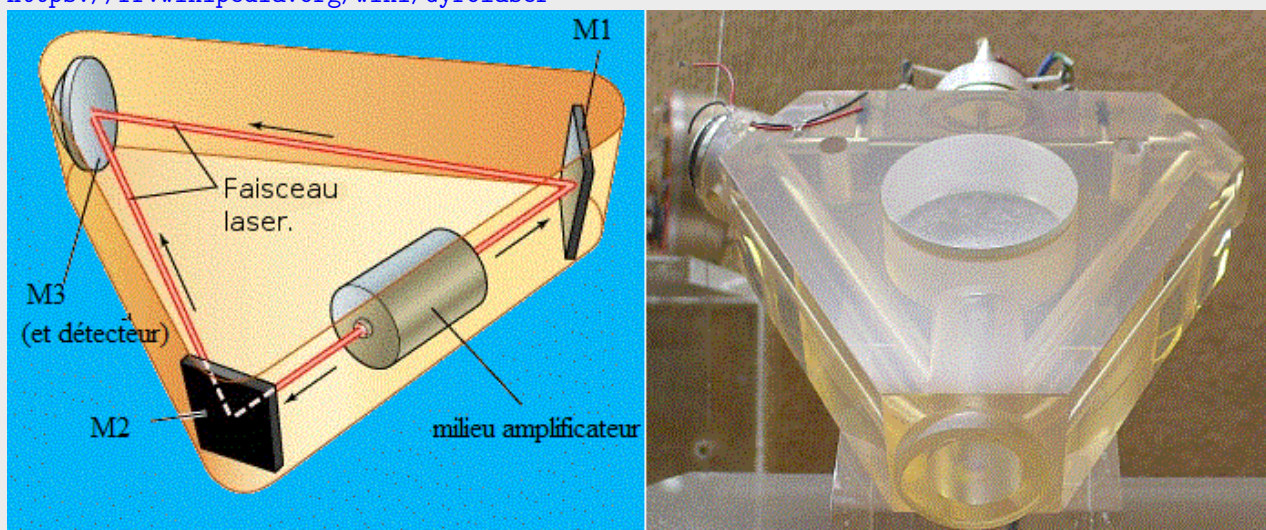
### Exercice 20.27 Gyrolaser

Le gyromètre laser est un capteur capable de mesurer une vitesse angulaire dans un plan. En associant trois gyromètres, il est possible de mesurer la vitesse angulaire d'un mobile dans l'espace. Cette mesure est utilisée dans les centrales à inertie qui équipent certains navires, avions, satellites, sous-marins.

Le gyromètre laser remplace les gyroscopes mécaniques utilisés précédemment et permet l'amélioration de la précision.

Le premier gyrolaser fut présenté aux États-Unis par Macek et Davis en 1963. La technologie a depuis été développée et industrialisée par un nombre restreint de sociétés autour du monde. Cette technologie est actuellement la technologie inertielle de haute performance la plus diffusée. Plus d'un million de gyrolasers sont utilisés dans le guidage inertielle et plusieurs centaines de milliers, en navigation inertielle.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Gyrolaser>



Données :

- Le chemin total parcouru par un rayon si le gyrolaser est fixe est  $L = 33$  cm.
- Pour le milieu amplificateur de longueur  $\ell$ , l'indice optique est  $n = 1,0 + j\alpha$  avec  $\alpha = 2 \times 10^{-8}$ ; en dehors du milieu amplificateur  $n = 1$ .
- Les coefficients de réflexion en amplitude des miroirs sont  $r_1 = r_2 = -0,999$ ; et  $r_3 = -0,990$ .
- la longueur d'onde est  $\lambda = 633$  nm.
- $S = 5,2 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup> est la surface des miroirs.

#### 1) Etude du laser (pas de rotation)

On suppose le laser fixe dans un référentiel galiléen. Le laser fonctionne en mode continu, en régime permanent.

La vibration lumineuse pour une onde (1) en un point  $A$  de la cavité est

$$\underline{s}_1 = \underline{s}_0 \exp(j\omega t)$$

**1.a)** Pourquoi  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  sont-ils négatifs? Pourquoi leurs modules sont-ils plus petits que 1? Pourquoi  $|r_3| < |r_1| = |r_2|$ ?

**1.b)** Déterminer l'expression de la vibration lumineuse  $\underline{s}_2$  pour l'onde (2) au même point  $A$  de la cavité après un tour.

**1.c)** On veut, pour la stabilité du laser, que  $\underline{s}_2 = \underline{s}_1$ . En déduire deux conditions puis calculer  $\ell$ .

#### 2) Etude du gyrolaser (en rotation)

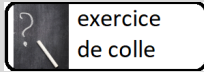
Le système est mis en rotation dans le sens trigonométrique à la vitesse  $\omega = 0,1$  rad · s<sup>-1</sup>, il est parcouru par des rayons dans les 2 sens. Le chemin parcouru vaut  $L \pm 2S\omega/c$ .

**2.a)** Montrer que la variation relative de chemin optique est infinitésimale.

**2.b)** Quel rayon voit son trajet augmenter?

**2.c)** Montrer qu'alors les fréquences des deux rayons laser changent. Commenter les relations trouvées pour les deux fréquences.

**2.d)** On place un capteur de temps de réponse  $10^{-6}$  s, sensible au carré de l'amplitude de l'onde en sortie du miroir 3, montrer comment ce dernier permet d'obtenir  $\omega$ .



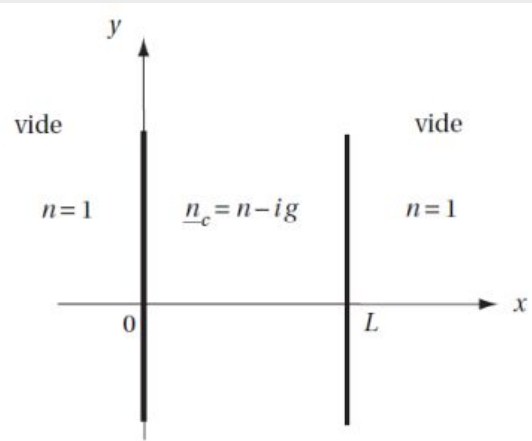
### Exercice 20.28 Modélisation électromagnétique d'une diode laser

Une diode laser est un composant opto-électronique à base de matériaux semi-conducteurs.

Elle émet de la lumière monochromatique cohérente (une puissance optique) destinée, entre autres, à transporter un signal contenant des informations sur de longues distances (dans le cas d'un système de télécommunications) ou à apporter de l'énergie lumineuse pour le pompage de certains lasers (lasers à fibre, laser DPSS) et amplificateurs optiques (OFA, Optical Fiber Amplifier). La diode laser est un composant essentiel des lecteurs et graveurs de disques optiques, dans ce cas elle émet le faisceau lumineux dont la réflexion sur le disque est détectée par une photodiode ou un phototransistor.

Elle trouve également son application dans les dispositifs électroniques de mesure de distance, de vitesse, de guidage et de pointage précis.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Diode\\_laser](https://fr.wikipedia.org/wiki/Diode_laser).



Un milieu amplificateur (diode laser) est située entre les plans d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L = 0,5$  mm. Son indice est  $\underline{n}_c = n - ig$  avec  $g \ll n = 3,4$ .

À l'intérieur du milieu amplificateur, l'onde incidente se met sous la forme :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp(i(kx - \omega t)) \vec{e}_y$$

On pose :  $k_0 = \omega/c$  et la longueur d'onde de l'onde dans le vide est  $\lambda_0 = 846$  nm.

- 1) Déterminer le champ électrique  $\underline{E}_2$  après deux réflexions sachant qu'à chaque réflexion il y a continuité du champ électromagnétique.
- 2) La condition d'accrochage est  $\underline{E}_2 = \underline{E}_i$ . Trouver deux conditions sur  $k_0$ . Calculer la valeur numérique de  $g$  et de l'écart  $\Delta f$  entre deux fréquences consécutives possibles de l'onde (intervalle spectral libre).
- 3) Donner l'expression du vecteur de Poynting.