Référentiels non galiléens

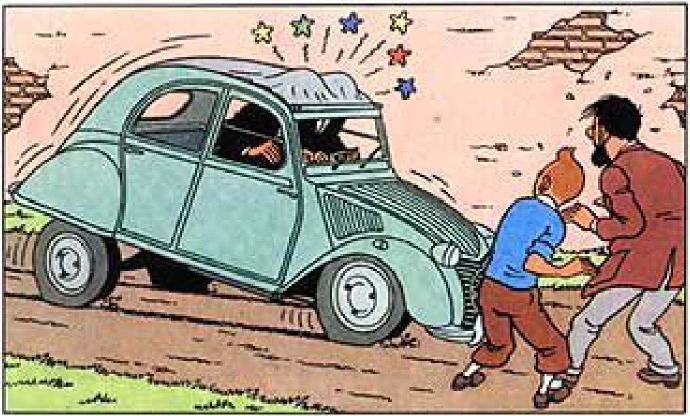
Mécanique

Saint Louis PC*1

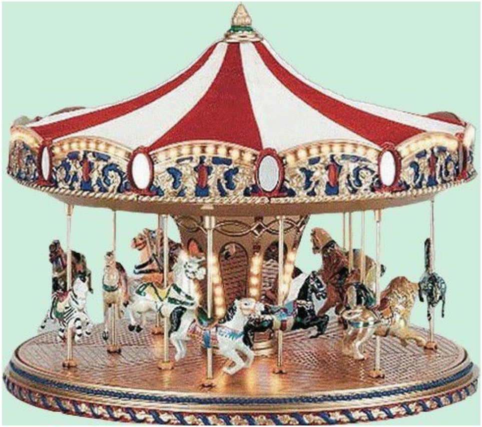
année scolaire 2018-2019

Comment créer une gravité artificielle dans un vaisseau spatial ?

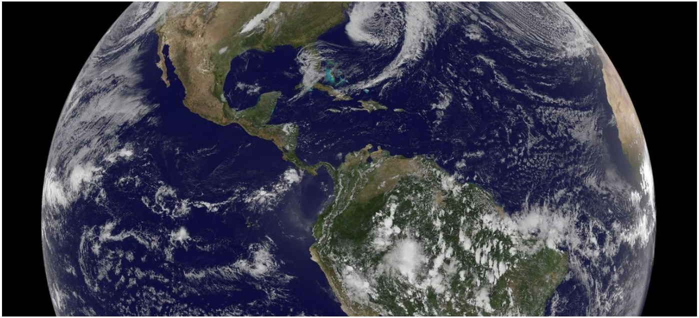
1) passer à un référentiel en translation accélérée



2) passer à un référentiel en rotation uniforme



3) étudier les effets propres au référentiel terrestre



Référentiel galiléen

un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique : un objet isolé (c'est à dire ne subissant aucune force) suit un mouvement rectiligne uniforme.

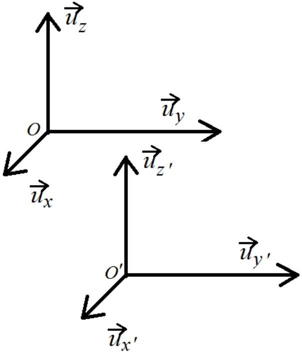
Dans un référentiel galiléen R, le principe fondamental de la dynamique s'applique :

$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\to M}$$

Exemples de référentiels

Le référentiel de Copernic : dans lequel le centre du système solaire et trois étoiles lointaines sont fixes
Galiléen avec une excellente approximation.
Le référentiel héliocentrique a pour point fixe le centre du Soleil.
Galiléen avec une excellente approximation.
Le référentiel géocentrique : dans lequel le centre de la Terre et trois étoiles lointaines sont fixes.
Il est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic.
Galiléen pour des expériences de durées courtes devant 1 an.
Le référentiel terrestre : lié à la Terre.
Il est en rotation uniforme autour d'un axe fixe du référentiel géocentrique.
Galiléen pour des expériences de durées courtes devant 24 h.

Deux référentiels en translation



- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ et d'une autre horloge.

Position du problème

Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en translation par rapport à R. Aussi, on peut choisir

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \vec{u}_x \\ \vec{u}_{y'} = \vec{u}_y \\ \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z \end{cases}$$

Un point matériel en M est repéré par

- $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\ \vec{u}_x + y(t)\ \vec{u}_y + z(t)\ \vec{u}_z$ dans R ;
- et $\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\ \vec{u}_x + y'(t)\ \vec{u}_y + z'(t)\ \vec{u}_z$ dans R'.

Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation
La vitesse du point matériel en M est

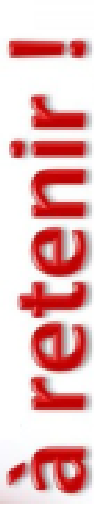
- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \dot{x}(t)\ \vec{u}_x + \dot{y}(t)\ \vec{u}_y + \dot{z}(t)\ \vec{u}_z$ **dans** R ;
- **et** $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R'} = \dot{x}'(t)\ \vec{u}_x + \dot{y}'(t)\ \vec{u}_y + \dot{z}'(t)\ \vec{u}_z$ **dans** R'.

Aussi,

$$\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R}(O') + \left(\frac{\mathrm{d}\left(x'(t)\ \vec{u}_x + y'(t)\ \vec{u}_y + z'(t)\ \vec{u}_z\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R}(O') + \left(\dot{x}'(t)\ \vec{u}_x + \dot{y}'(t)\ \vec{u}_y + \dot{z}'(t)\ \vec{u}_z\right)$$



Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en translation

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

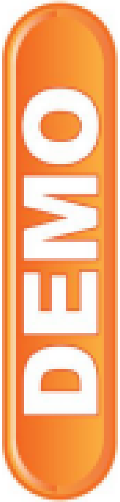
où $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement du référentiel R' par rapport à R.
$\vec{v}_e$ est la vitesse, dans R, du point coïncident P, qui se trouve au même endroit que M mais qui est fixe dans R'.

Exemple de point coïncident

si un train (assimilé au référentiel R' se déplace par rapport au sol (le référentiel R) et qu'on y lance une balle (le point matériel M), la trace laissée sur le sol à l'instant t est le point coïncident P.

Attention !

Le point coïncident change : à un instant t' ultérieur, le point P est différent du point M. On peut alors définir un nouveau point coïncident P'.



Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en translation
L'accélération du point matériel en M est

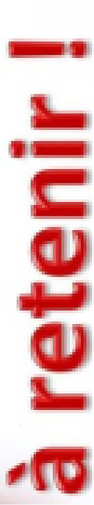
- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{/R}(M)(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \ddot{x}(t)\ \vec{u}_x + \ddot{y}(t)\ \vec{u}_y + \ddot{z}(t)\ \vec{u}_z$ **dans** R ;
- **et** $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{/R'}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R'} = \ddot{x}'(t)\ \vec{u}_x + \ddot{y}'(t)\ \vec{u}_y + \ddot{z}'(t)\ \vec{u}_z$ **dans** R'.

Or $\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e \Rightarrow$

$$\vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{/R'}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t}\right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\left(\dot{x}'(t)\ \vec{u}_x + \dot{y}'(t)\ \vec{u}_y + \dot{z}'(t)\ \vec{u}_z\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} + \vec{a}_e$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{/R}(M) = \left(\ddot{x}'(t)\ \vec{u}_x + \ddot{y}'(t)\ \vec{u}_y + \ddot{z}'(t)\ \vec{u}_z\right) + \vec{a}_e$$



Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en translation

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_e$$

où $\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement du référentiel R' par rapport à R.

$\vec{a}_e$ est l'accélération, dans R, du point coïncident P, qui se trouve au même endroit que M mais qui est fixe dans R'.

DEMO

Expression de la force d'inertie d'entraînement :
En partant du principe fondamental de la dynamique dans R

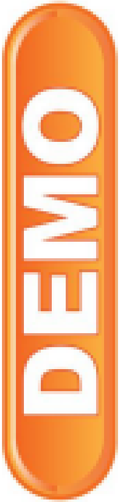
$$m\vec{a}_{/R}(M) = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} = m\vec{a}_{/R'}(M) + m\vec{a}_e$$

Expression de la force d'inertie d'entraînement : dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces $\vec{F}$ la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f_{ie}} = -m.\vec{a_e}$$

Loi galiléenne de composition des vitesses
Si R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R, la vitesse d'entraînement est partout la même et constante au cours du temps : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cste}$

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_0$$



Ensemble des référentiels galiléens

Si R' est en translation rectiligne uniforme dans R galiléen alors il n'y a pas de forces d'inertie à considérer dans R'. En effet, $\vec{v}_e = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0}$.

à retenir !

Ensemble des référentiels galiléens

Tout référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen R est lui même galiléen.

DEMO

Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une translation uniformément accélérée

Si $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors

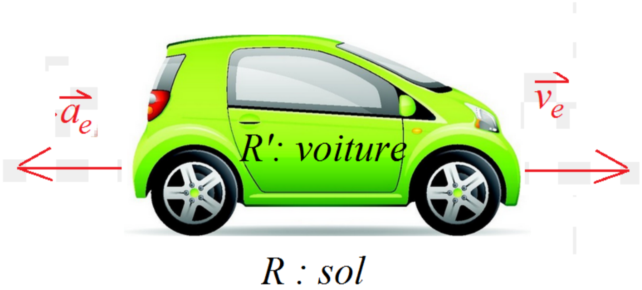
$$\vec{f}_{ie} = -m.\vec{a}_e = -m.a_0 \vec{u}_x = -\overrightarrow{grad}\ (m.a_0\, x)$$

à retenir !

Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une translation uniformément accélérée

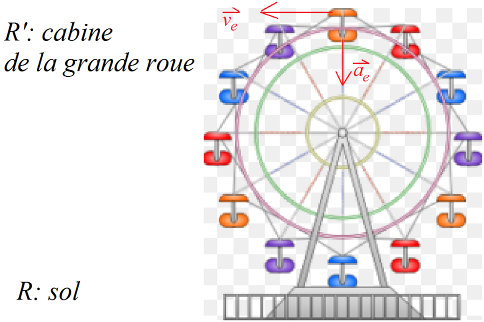
Dans le cas d'une translation uniformément accélérée $\vec{a}_e = a_0 \vec{u}_x$, alors la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = m\, a_0\, x$.

Voiture qui freine



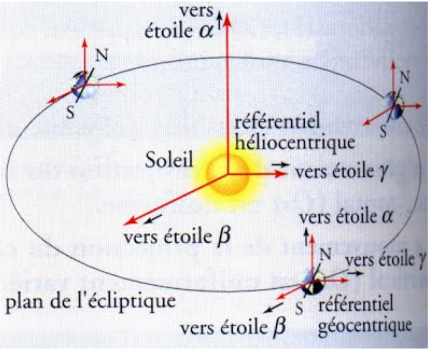
une voiture (le référentiel R') qui est en translation rectiligne dans le référentiel (R) du sol ($\vec{v}_e = +v(t)\,\vec{u}_x$), mais qui freine : $\vec{a}_e = -a\,\vec{u}_x$. La force d'inertie d'entraînement "pousse" les passagers vers l'avant du véhicule.

Grande roue



une cabine (le référentiel R') de grande-roue (de rayon R_0) qui est en translation circulaire uniforme dans le référentiel (R) du sol $(\vec{v}_e = +v_0\,\vec{u}_\theta)$: $\vec{a}_e = -\frac{v_0^2}{R_0}\,\vec{u}_r$.

référentiel géocentrique



le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel héliocentrique

Forces de marées (exercice)

On s'intéresse à la Terre de centre O seule dans l'univers avec un astre A (ce peut être la Lune ou le Soleil) de masse M_A à la distance d_0 de O.

☐ En utilisant le fait que O est fixe dans le référentiel géocentrique R_G, déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ de R_G dans un référentiel galiléen. On définit la force de marée comme la somme de l'attraction gravitationnelle de A et de la force d'inertie d'entraînement exercée sur une particule de masse m à la surface de la Terre (de l'eau par exemple).

☐ Montrer que l'effet de la force de marée est de générer deux "bourrelets" d'eau à la surface du globe terrestre. En déduire qu'il existe environ deux marées hautes par 24 heures.

Forces de marées (exercice)

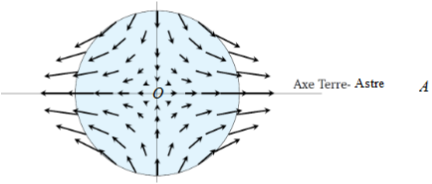
☐ O est fixe dans le référentiel géocentrique R_G, donc la somme des forces est nulles :

$$-G\frac{M_A\,M_T}{d_0^2}\,\vec{u}_{AO} - M_T\,\vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = -G\frac{M_A}{d_0^2}\,\vec{u}_{AO}$$

☐ La force de marée au point P est :

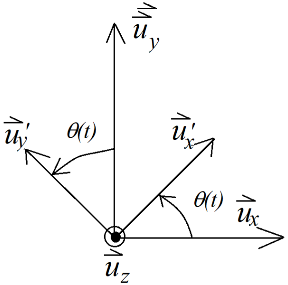
$$\vec{f}_m = -G\frac{M_A\,m}{AP^2}\,\vec{u}_{AP} - m\,\vec{a}_e = -G\frac{M_A\,m}{AP^2}\,\vec{u}_{AP} + G\frac{M_A\,m}{d_0^2}\,\vec{u}_{AO}$$

Si P est plus près de A que O, $\vec{f}_m$ est vers A et crée un bourrelet.
Si P est plus loin de A que O, $\vec{f}_m$ est opposé à la direction de A et crée un bourrelet.



Comme la Terre tourne en 24 heures dans le référentiel géocentrique, il existe environ (car il faut que l'astre A soit fixe,) deux marées hautes par 24 heures.

Deux référentiels en rotation



- R est le référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et d'une horloge ;
- R' est un autre référentiel muni d'un repère $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ et d'une autre horloge.

Position du problème

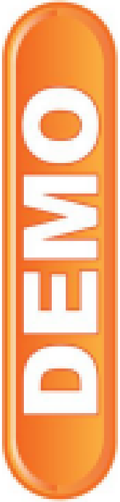
Si l'on néglige les effets relativistes, le temps s'écoule de la même façon dans les deux référentiels.

D'autre part, on suppose que R' est en rotation par rapport à un axe fixe dans R. Aussi, on peut choisir :

$$\left\{ \begin{array}{c} O' \text{ en } O \text{ et } \vec{u}_{z'} = \vec{u}_z \\ \vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z \text{ avec } \Omega_z = \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right.$$

Un point matériel en M est repéré par

- $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ dans R ;
- et $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{y'} + z\,\vec{u}_z$ dans R'.



Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en rotation
La vitesse du point matériel en M est

- $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$ **dans** R ;
- **et** $\vec{v}_{/R'}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R'} = \dot{x'}\,\vec{u}_{x'} + \dot{y'}\,\vec{u}_{y'} + \dot{z}\,\vec{u}_z$ **dans** R'.

Aussi,

$$\vec{v}_{/R}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \left(\frac{\mathrm{d}\left(x'\,\vec{u}_{x'} + y'\,\vec{u}_{y'} + z\,\vec{u}_z\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = \left(\dot{x'}\,\vec{u}_{x'} + \dot{y'}\,\vec{u}_{y'} + \dot{z'}\,\vec{u}_z\right) + \left(x'\,\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\,\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right)$$

or

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_{y'} = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t} = \Omega_z\left(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y\right) = \Omega_z\vec{u}_{y'} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t} = \Omega_z\left(-\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y\right) = -\Omega_z\vec{u}_{x'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \Omega_z\left(x'\,\vec{u}_{y'} - y'\,\vec{u}_{x'}\right) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

à retenir !

Loi de composition des vitesses pour deux référentiels en rotation

La vitesse $\vec{v}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à la vitesse $\vec{v}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_e$$

où $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du point coïncident.

Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en rotation
L'accélération du point matériel en M est

- $\vec{a}_{/R}(M) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{/R}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z$ **dans** R ;
- **et** $\vec{a}_{/R'}(M) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{/R'}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/R'} = \ddot{x'}\,\vec{u}_{x'} + \ddot{y'}\,\vec{u}_{y'} + \ddot{z}\,\vec{u}_z$ **dans** R'.

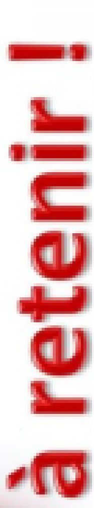
Or $\vec{v}_{/R}(M) = \left(\dot{x'}\,\vec{u}_{x'} + \dot{y'}\,\vec{u}_{y'} + \dot{z}\,\vec{u}_z\right) + \Omega_z\left(x'\,\vec{u}_{y'} - y'\,\vec{u}_{x'}\right) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{/R}(M) = \quad & \left(\ddot{x'}\,\vec{u}_{x'} + \ddot{y'}\,\vec{u}_{y'} + \ddot{z}\,\vec{u}_z\right) + \left(\dot{x'}\,\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + \dot{y'}\,\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}\right)\\ & +\dot{\Omega}_z\left(x'\,\vec{u}_{y'} - y'\,\vec{u}_{x'}\right)\\ & +\Omega_z\left(\dot{x'}\,\vec{u}_{y'} - \dot{y'}\,\vec{u}_{x'}\right) + \Omega_z\left(x'\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t} - y'\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{/R}(M) = \quad & \vec{a}_{/R'}(M) + \left(\dot{x'}\,\Omega_z\vec{u}_{y'} - \dot{y'}\,\Omega_z\vec{u}_{x'}\right)\\ & +\dot{\Omega}_z\left(x'\,\vec{u}_{y'} - y'\,\vec{u}_{x'}\right)\\ & +\Omega_z\left(\dot{x'}\,\vec{u}_{y'} - \dot{y'}\,\vec{u}_{x'}\right) + \Omega_z\left(-x'\,\Omega_z\vec{u}_{x'} - y'\,\Omega_z\vec{u}_{y'}\right)\end{aligned}$$

Si on pose

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2\,\Omega_z\left(\dot{x'}\,\vec{u}_{y'} - \dot{y'}\,\vec{u}_{x'}\right)$$



Loi de composition des accélérations pour deux référentiels en rotation

L'accélération $\vec{a}_{/R}(M)$ du point M dans le référentiel R est reliée à l'accélération $\vec{a}_{/R'}(M)$ du point M dans le référentiel R' par

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_C\,(M)$$

où l'accélération de Coriolis est

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M)$$

et l'accélération d'entraînement est l'accélération du point coïncident :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{/R}(P)$$

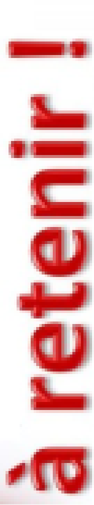
DEMO

Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen en rotation :
Puisque dans R galiléen

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_C\left(M\right) + \vec{a}_e\left(M\right) = \frac{1}{m}\sum \vec{f}_{\rightarrow M}$$

donc

$$m\vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{f}_{\rightarrow M} - m\,\vec{a}_C\left(M\right) - m\,\vec{a}_e\left(M\right)$$



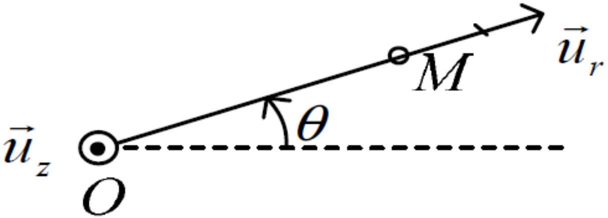
Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen en rotation :
dans R' non galiléen, il faut ajouter aux forces $\vec{f}_{\rightarrow M}$ la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}_e = -m\,\vec{a}_{/R}(P)$$

et la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{iC} = -m\,\vec{a}_C = -2\,m\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

Tige tournant par rapport au sol



On s'intéresse à une tige (le référentiel R'), qui fait à l'instant t un angle $\theta(t)$ avec l'axe Ox fixe dans le référentiel R du sol supposé galiléen. Cette tige tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Une perle est assimilée à un point matériel M sur cette tige à une distance $r(t)$ de O à l'instant t.

Tige tournant par rapport au sol (exercice)

☐ Déterminer le mouvement du point coïncident P dans R et celui de M dans R'.

☐ En déduire dans R' la vitesse du point M et dans R la vitesse du point coïncident P et celle du point M. Vérifier la loi de composition des vitesses.

☐ Déterminer dans R' l'accélération du point M et dans R l'accélération du point coïncident P et celle du point M. Vérifier la loi de composition des accélérations.

Tige tournant par rapport au sol (exercice)

□ Le point M est en mouvement rectiligne dans R' selon la tige. Le point coïncident est fixe dans R', à la distance r de O. Il a donc un mouvement circulaire avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

□ $\vec{v}_{/R'}(M) = \dot{r}\vec{u}_r$. et $\vec{v}_{/R}(P) = r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Dans R, la vitesse de M est

$$\vec{v}_{/R}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{v}_{/R}(P)$$

On a bien la loi de composition des vitesses.

□

$$\vec{v}_{/R'}(M) = \dot{r}\vec{u}_r \Rightarrow \vec{a}_{/R'}(M) = \ddot{r}\vec{u}_r$$

D'autre part P en mouvement circulaire dans R

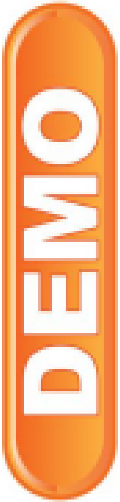
$$\vec{v}_{/R}(P) = r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a}_{/R}(P) = +r\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Dans R, l'accélération de M se calcule directement :

$$\vec{a}_{/R}(M) = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{z}\vec{u}_z = (\ddot{r}\vec{u}_r) + \left(-r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right) + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$$

On a bien la loi de composition des accélérations car :

$$\vec{a}_C = 2.\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2.\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{v}_{/R'}(M) = 2.\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \dot{r}\vec{u}_r = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$



Force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante
On reprend les calculs précédents avec $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$. On trouve

$$\vec{a}_{/R}(P) = +r\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$$

soit $\vec{f}_{ie} = m\,r\,\omega^2\,\vec{u}_r$.

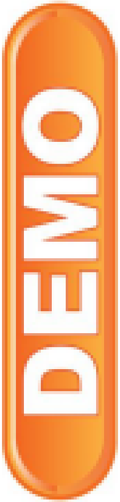
à retenir !

Force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz, la force d'inertie est axifuge (H est le projeté de M sur l'axe de rotation) :

$$\vec{f_{ie}} = m\,\omega^2\,\overrightarrow{HM} = m\,r\,\omega^2\,\vec{u}_r$$

en coordonnées cylindriques d'axe Oz.



Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante

Si $\vec{f}_{ie} = m\, r\, \omega^2\, \vec{u}_r$, alors

$$\vec{f}_{ie} = m.r.\omega^2\, \vec{u}_r = -\overrightarrow{grad}\,(E_p) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}E_p = -m\, r\, \omega^2\; \mathrm{d}r$ qu'on peut intégrer en

$$E_p = -\frac{1}{2}\, m\, r^2\, \omega^2$$

à retenir !

Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire constante

Dans le cas d'un référentiel R' qui tourne à une vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen R autour de son axe fixe Oz, la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $Ep = -\frac{1}{2} m\, r^2\, \omega^2$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

DEMO

Propriétés de la force d'inertie de Coriolis

La force de Coriolis s'appliquant toujours orthogonalement à la vitesse, cette force ne travaille pas.

à retenir !

Propriétés de la force d'inertie de Coriolis

La force d'inertie de Coriolis n'existe que :

- si le référentiel non galiléen R' est en rotation par rapport à R galiléen
- et si le point matériel M se déplace dans le référentiel non galiléen R'.

Le travail de la force d'inertie de Coriolis est toujours nul.

Calcul de la force d'inertie de Coriolis sur un manège : (exercice)

On s'intéresse à un manège qui tourne à une vitesse angulaire ω par rapport à un référentiel galiléen autour de son axe fixe Oz vertical.

□ Montrer que la force d'inertie de Coriolis ressentie par un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ horizontale tend à faire tourner le point matériel vers la droite si le manège tourne dans le sens trigonométrique, vers la gauche si le manège tourne dans le sens horaire.

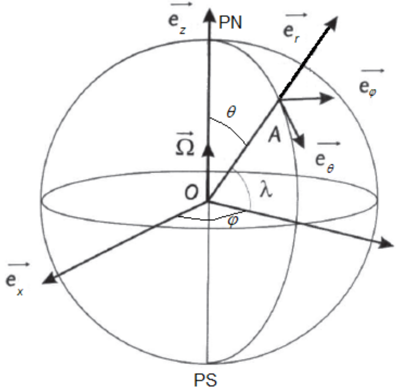
Calcul de la force d'inertie de Coriolis sur un manège : (exercice)

☐ Si $\vec{v} = +v\,\vec{u}_x$ et $\vec{\Omega} = +\Omega\,\vec{u}_z$, alors la force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f_{iC}} = -2\,m\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} = -2\,m\,\Omega\,\vec{u}_z \wedge +v\,\vec{u}_x = -2\,m\,v\,\Omega\,\vec{u}_y$$

qui est suivant $-\vec{u}_y$ donc vers la droite.

Référentiels terrestre et géocentrique



Le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe dans le référentiel géocentrique.
Le référentiel terrestre tourne autour de l'axe polaire Oz avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\, \vec{e}_z$.

Calcul de la force d'inertie d'entraînement à la surface de la Terre : (exercice)

On peut supposer le référentiel géocentrique galiléen. Par rapport à celui-ci, le référentiel terrestre est en rotation autour de l'axe polaire, avec un vecteur rotation $\Omega = \frac{2\pi}{24h}\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est orienté du Pôle Sud vers le Pôle Nord.

Soit un point à la surface de la Terre, de coordonnées dans le repère sphérique de centre O, le centre de la Terre : $r = R_T$ (le rayon de la Terre), $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$ (λ est la latitude) et φ, la longitude.

□ Montrer que la force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m en ce point est $\vec{f_{ie}} = m\,\omega^2\,R_T\,\cos\lambda\,(\cos\lambda\,\vec{e_r} - \sin\lambda\,\vec{e_\theta})$.

Calcul de la force d'inertie d'entraînement à la surface de la Terre : (exercice)

☐ La force d'inertie d'entraînement ressentie par un point matériel de masse m en ce point est

$$\vec{f_{ie}} = m\,\omega^{2}\,\overrightarrow{HM}$$

Or

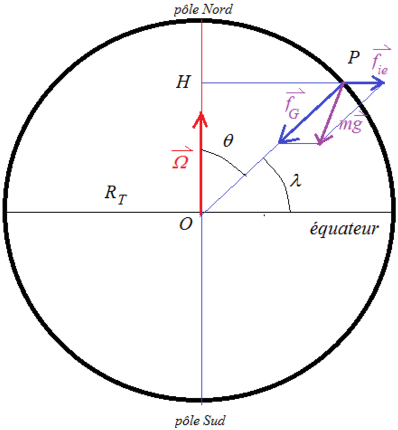
$$\overrightarrow{HM} = HM\,\frac{\overrightarrow{HM}}{HM} = R_T\ \cos\lambda\,\frac{\overrightarrow{HM}}{HM} = R_T\ \cos\lambda\,(\cos\lambda\,\vec{e_r} - \sin\lambda\,\vec{e_\theta})$$

(cqfd).

à retenir !

Le poids : (définition)
On définit le poids comme la somme de deux forces :
- l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet $\vec{f}_G$;
- la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre $\vec{f}_{ie}$.

Direction du poids



$\vec{f}_G = -G\frac{m\,M_T}{R_T^3}\overrightarrow{OP}$ et $\vec{f}_{ie} = m\,\Omega^2\,\overrightarrow{HP}$. La direction indiquée par un fil à plomb est celle de $\vec{g}$. Elle ne passe pas *a priori* par O.

Inhomogénéités du champ de pesanteur à la surface de la Terre :
La force d'inertie d'entraînement est la plus grande à l'équateur, là où l'on est le plus éloigné de l'axe de rotation. C'est donc à l'équateur que le poids d'un objet est le plus petit, et aux pôle qu'il est le plus grand.
De la même façon, plus l'altitude est élevée, plus l'attraction gravitationnelle est faible, et plus la force d'inertie est forte : un objet est moins lourd en altitude.

Le pendule de Foucault

Foucault met au point au XIXième siècle un pendule qui oscille suffisamment longtemps pour qu'on ait le temps de voir son plan d'oscillation tourner dans le référentiel terrestre.

Enoncé

Le pendule de Foucault au Pôle Nord (exercice)

On peut supposer le référentiel géocentrique galiléen. On s'intéresse à un pendule simple très long oscillant sans frottement accroché au Pôle Nord.

☐ Rappeler son mouvement dans le référentiel géocentrique. En déduire le mouvement de son plan d'oscillation dans le référentiel terrestre.

☐ En supposant que la masse accrochée au pendule se déplace dans un plan horizontal, déterminer le mouvement de son plan d'oscillation dans le référentiel terrestre.

Le pendule de Foucault au Pôle Nord (exercice)

☐ Dans le référentiel géocentrique, galiléen, mouvement d'oscillation dans un plan fixe. Comme la Terre tourne en 24 h, le plan d'oscillation du pendule tourne aussi en 24 h dans le référentiel terrestre.

☐ Dans le référentiel terrestre, il faut prendre en compte la force d'inertie de Coriolis, comme dans un manège qui tourne en 24 h. Si $\vec{v} = +v\,\vec{u}_x$ et $\vec{\Omega} = +\Omega\,\vec{u}_z$, alors la force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{f}_{iC} = -2\,m\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} = -2\,m\,\Omega\,\vec{u}_z \wedge +v\,\vec{u}_x = -2\,m\,v\,\Omega\,\vec{u}_y$$

qui est suivant $-\vec{u}_y$ donc vers la droite. Le plan d'oscillation du pendule tourne

donc vers la droite dans le référentiel terrestre.

La déviation vers l'est à l'équateur (exercice)

Un point matériel de masse m est lâché en altitude sur l'équateur, sans vitesse initiale dans le référentiel terrestre R'. On néglige les frottements.

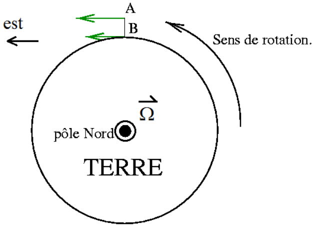
Montrer que le mobile est dévié vers l'est lors de sa chute en étudiant le mouvement :

☐ dans le référentiel géocentrique

☐ dans le référentiel terrestre.

La déviation vers l'est à l'équateur (exercice)

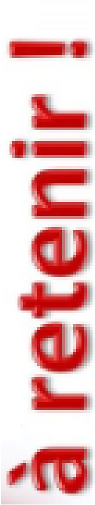
☐ Dans le référentiel géocentrique, il s'agit d'une chute libre.



La vitesse horizontale du mobile se conserve donc. Or, la vitesse initiale dans le référentiel géocentrique R supposée galiléen est non nulle et plus importante que celle du sol (en B), plus proche de l'axe de rotation.

☐ Dans le référentiel terrestre, si on suppose que la vitesse est principalement verticale : $\vec{v} = v_x(t)\,\vec{e}_x$. On intègre $m\,\vec{a} = -m\,\vec{e}_x - 2\,\Omega\,v_x\vec{e}_y$:

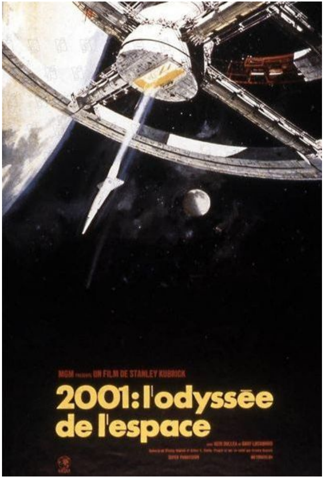
$v_x(t) = -g\,t$ et $v_y = 2\,\Omega\,g\,t > 0$: déviation vers l'est.



Effets de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel terrestre

La force d'inertie de Coriolis :

- dévie vers la droite un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère nord ;
- dévie vers la gauche un objet qui se déplace horizontalement dans l'hémisphère sud ;
- dévie vers l'est un objet qui se déplace verticalement vers le bas.



Dans le film "2001 l'odyssée de l'espace" de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore de rayon R tourne autour de son axe Oz avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega \, \vec{e}_z$ constante dans un référentiel galiléen.

1) Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre : ils sont soumis à une gravité artificielle. Evaluer les valeurs numériques de R et de ω pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, à 10% près entre les pieds et la tête.

2) Dans une des scènes du film, un astronaute (Poole) fait un jogging dans le tore.
Expliquer pourquoi il peut être très fatigant pour Poole de courir dans la station spatiale (on choisira des valeurs numériques pour illustrer le raisonnement).
Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?