Mathématiques pour la physique

physique
math spé PC
lycée Janson de Sailly

2014/2015

Table des matières

Annexe A

Mathématiques et sciences physiques

A.1 Rédiger en sciences physiques

Le correcteur attend du candidat des explications claires : il ne s'agit pas de lancer sur le papier des équations mais de dire en détail ce que l'on fait. Il faut bien souvent :

- définir le système physique (et étudier son type : système ouvert ou fermé, système de points matériels ou particule, gaz, solide, mélange réactionnel,...) ;
- définir le cadre de l'étude (quel est le référentiel, quelle est la transformation, quelles sont les forces appliquées, que valent les quantités de matière en fonction de l'avancement de la réaction, etc) ;
- dire de quels prérequis on part (le théorème du cours, le résultat de la question précédente, tel principe, ...).

A.2 Mener un calcul littéral

La partie mathématisée peut alors commencer. Mais elle doit vérifier un certain nombre de règles.

- Notations utilisées

  Il faut utiliser les notations de l'énoncé. Si on veut définir d'autres grandeurs, il faut le faire explicitement (déclarer : "je pose...") sans reprendre une notations déjà utilisée préalablement, ni une notation traditionnellement dévolue à une constante universelle (cf. tableau A.1).

Nom de la constante	Valeur numérique
Charge élémentaire	$q_e = 1,6021892.10^{-19}C$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,854187817.10^{-12}F.m^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H.m^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2,99792458.10^{8}m.s^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626176.10^{-34}J.s$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,054589.10^{-34}J.s$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,380662.10^{-23}J.K^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,022045.10^{23}mol^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31441J.K^{-1}.mol^{-1}$
Constante de Faraday	$F = 96484,56C.mol^{-1}$
Constante de Stefan	$\sigma = 56,7032.10^{-9}W.m^{-2}.K^{-4}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma_B = 0,756464.10^{-15\cdot}J.m^{-3}.K^{-4}$
Température du point triple de l'eau	$T_Y = 273,16K$
Constante de gravitation	$G = 6,67259.10^{-11}m3.^{k}g^{-1}.s^{-2}$

TABLE A.1 – Constantes universelles

On a les relations suivantes entre les constantes :

$$\begin{cases} \hbar = \frac{h}{2.\pi} \\ \varepsilon_0.\mu_0 = \frac{1}{c^2} \\ F = N_A.q_e \\ R = N_A.k_B \\ \sigma_B = \frac{4.\sigma}{c} \end{cases}$$

NB : l'alphabet grec (cf. tableau A.2) peut élargir le panel de lettres à votre disposition.

Majuscule	minuscule	nom
A	α	alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon
Z	ζ	zéta
H	η	Eta
Θ	θ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mu
N	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omicron
Π	π	Pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Upsilon
Φ	φou ϕ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

TABLE A.2 – Alphabet grec

Attention à ne pas confondre deux lettres, à bien noter les exposants et les indices.

- Des chiffres et des lettres

  Il faut impérativement mener les calculs de façon littérale (c'est à dire avec des lettres qui remplacent les grandeurs physiques, et pas directement la valeur numérique).

  NB : un nombre entier peut être considéré comme une lettre (!).

- De l'homogénéité des formules

  Les équations (ou les inégalités) doivent être homogènes, c'est à dire en particulier que les deux membres doivent pouvoir s'exprimer dans les mêmes unités (cf. les unités du système international dans le tableau A.3).

  NB : les variables des fonctions mathématiques (logarithme, exponentielle, sinus,...) doivent être sans dimension (homogène à 1, sans unité).

  Il est bon de temps en temps, et obligatoire en fin de calcul, de vérifier l'homogénéité de la formule que l'on manipule : toute équation non homogène est nécessairement fausse !

A.3 Faire une application numérique

Après un calcul littéral, une application numérique peut être demandée.

grandeur mesurée	nom	symbole	dimension
longueur	mètre	m	m
masse	kilogramme	kg	kg
temps	seconde	s	s
intensité électrique	ampère	A	A
température	kelvin	K	K
quantité de matière	mole	mol	mol
intensité lumineuse	candela	cd	cd
angle	radian	rad	1
angle solide	stéradian	sr	1
activité radioactive	becquerel	Bq	s^{-1}
capacité électrique	farad	F	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
champ magnétique	tesla	T	$kg^{-1}.s^{-2}.A^{-1}$
charge électrique	coulomb	C	$s.A$
conductance	siemens	S	$m^2.kg^1.s^3.A^2$
dose absorbée	gray	Gy	$m^2.s^{-2}$
éclairement lumineux	lux	lx	$m^{-2}.cd.sr$
énergie	joule	J	$m^2.kg.s^{-2}$
flux magnétique	weber	Wb	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
équivalent de dose	sievert	Sv	$m^2.s^{-2}$
flux lumineux	lumen	lm	$cd.sr$
force	newton	N	$m.kg.s^{-2}$
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
inductance	henry	H	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
luminance	nit	nt	$m^{-2}.cd$
pression	pascal	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
puissance	watt	W	$m^2.kg.s^{-3}$
résistance électrique	ohm	Ω	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
tension électrique	volt	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
vergence	dioptrie	δ	m^{-1}

TABLE A.3 – Unités du système international (SI)

- Faire le calcul numérique

  Il est bon, pour éviter les erreurs, de convertir les données numériques de l'énoncé dans le système des unités international (SI, cf. tableaux A.3 et A.4). D'autre part, on retrouvera dans le tableau A.1 la valeur de la plupart des constantes universelles dans le système SI.
- Unités d'une application numérique

  Toute application numérique comporte des unités (cf. tableaux A.3 et A.4) s'il s'agit d'une quantité dimensionnée.

sous multiplicatif	nom	symbole	multiplicatif	nom	symbole
10^{-1}	déci	d	10^{+1}	déca	da
10^{-2}	centi	c	10^{+2}	hecto	h
10^{-3}	milli	m	10^{+3}	kilo	k
10^{-6}	micro	μ	10^{+6}	méga	M
10^{-9}	nano	n	10^{+9}	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{+12}	téra	T
10^{-15}	femto	f	10^{+15}	péta	P
10^{-18}	atto	a	10^{+18}	exa	E

TABLE A.4 – Multiples et sous multiples

- Nombre de chiffres significatifs

  La précision d'une valeur numérique est liée au nombre de chiffres significatifs avec laquelle elle est donnée. Exemples :

$$\begin{array}{cl} 3,5 & \rightarrow \text{2 chiffres significatifs} \\ 0,035 & \rightarrow \text{2 chiffres significatifs} \\ 3,50 & \rightarrow \text{3 chiffres significatifs} \\ 0,350.10^3 & \rightarrow \text{3 chiffres significatifs} \\ 300 & \rightarrow \text{3 chiffres significatifs} \end{array}$$

  NB : un nombre entier est connu parfaitement, aussi il comporte en fait un nombre infini de chiffres significatifs :

$$2 = 2,00000000000000000... \rightarrow \infty \text{ chiffres significatifs}$$

  Il convient de donner le résultat trouvé avec un nombre de chiffres significatifs qui est le minimum parmi les nombres de chiffres significatifs des données numériques utilisées pour faire l'application numérique.

Annexe B

Géométrie

B.1 Produit vectoriel

B.1.1 Définition du produit vectoriel

En général

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}| \,.\, |\vec{w}| \,.\, \sin\theta.\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases}$.

Son sens est obtenu par la règle du tire bouchon, ou bien celle de la main droite ou bien encore celle du bonhomme d'Ampère.

Expression dans un repère cartésien : dans un repère cartésien direct (x, y, z),

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y.w_z - w_y.v_z \\ v_z.w_x - w_z.v_x \\ v_x.w_y - w_x.v_y \end{pmatrix}$$

B.1.2 Formules relatives au produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right).\left(\vec{C} \wedge \vec{D}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right).\left(\vec{B}.\vec{D}\right) - \left(\vec{A}.\vec{D}\right).\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

B.2 Angle solide

B.2.1 Définition de l'angle solide

Position du problème : soit S une surface qui s'appuie sur un contour C. Le signe des faces de S se déduit de l'orientation de C conformément à la règle de la main droite. Soit une sphère de centre O et de rayon R. Le cône K de sommet O et de directrice C découpe sur cette sphère une aire Σ.

L'angle solide sous lequel on voit S de O est

$$\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$$

Convention d'orientation : Ω étant compté positivement si on voit de O la face négative de S.

Unité d'angle solide : Ω est un nombre sans dimension (rapport de deux longueurs au carré). L'habitude est d'exprimer Ω en stéradian (symbole : sr). Stéradian signifie "radian dans l'espace", la notion d'angle solide généralisant à l'espace à trois dimensions la notion d'angle dans le plan.

Propriétés :

- Ω ne dépend pas du rayon R de la sphère choisie pour le définir.
- Deux surfaces S et S' qui s'appuient sur le même contour C sont vues de O sous le même angle solide. On peut aussi bien parler de l'angle solide sous lequel on voit de O le contour C.
- Deux contours de même orientation tracés sur K sont vus de O sous le même angle solide, pourvu que l'on voie de O des faces de même signe (orientées par le contour).

B.2.2 Quelques angles solides

Angle solide élémentaire : le cône de sommet O qui a pour directrice le contour de l'élément de surface découpe sur la sphère de centre O et de rayon OM une aire $d^2\Sigma$.

L'angle solide qui correspond à ce cône est :

$$d^2\Omega = \frac{d^2\Sigma}{r^2} = \frac{\cos\theta.d^2S}{r^2} = \frac{\vec{u}.d^2\vec{S}}{r^2}$$

On peut donc considérer l'angle solide comme le flux du vecteur $\frac{\vec{u}.}{r^2}$.

Angle solide de l'espace tout entier : l'aire d'une sphère est $\Sigma = 4.\pi.R^2$, donc l'angle solide sous lequel on voit toute la sphère (c'est à dire tout l'espace) est

$$\Omega_{tot} = 4.\pi$$

Angle solide d'un cône : l'aire d'un cône de sommet O, et de demi-angle α est : $S = \int_0^\alpha 2\pi.R^2.\sin\theta.d\theta = 2\pi.R^2\left(1-\cos\theta\right)$, donc l'angle solide sous lequel on voit ce cône est

$$\Omega = 2\pi.\left(1-\cos\theta\right)$$

B.3 Trigonométrie

B.3.1 Définitions des fonctions trigonométriques

Définitions géométriques des grandeurs trigonométriques : le cercle de rayon R de la figure B.1, présente les grandeurs trigonométriques habituelles.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Relation entre grandeurs trigonométriques et exponentielles complexes

$$\cos\theta = \frac{e^{j.\theta} + e^{-j.\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j.\theta} - e^{-j.\theta}}{2j}$$

$$\cos\theta = \Re\left(e^{j.\theta}\right) = \Re\left(e^{-j.\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \Im\left(e^{j.\theta}\right) = -\Im\left(e^{-j.\theta}\right)$$

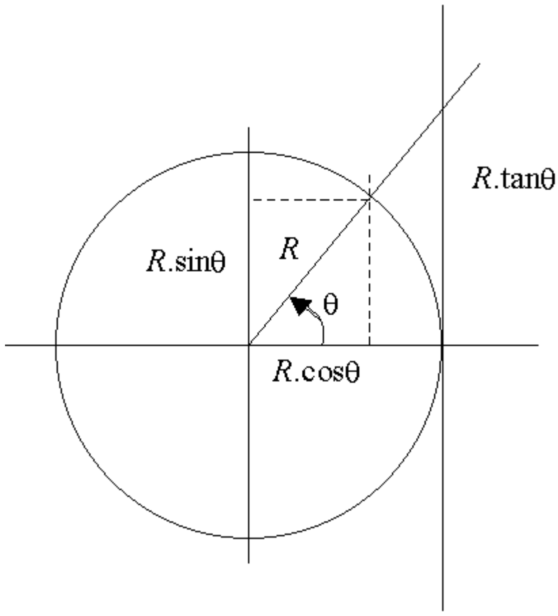

FIGURE B.1 – Définitions géométriques des grandeurs trigonométriques

B.3.2 Formules trigonométriques

Somme de fonctions trigonométriques

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2.\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2.\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produit de fonctions trigonométriques

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Somme et différences d'angles

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha.\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot g\beta}$$

Décalage d'un quart de tour

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\alpha$$

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos\alpha$$

$$\tan\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$$

Angles moitiés

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Angles doubles

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2.\sin^2(\alpha) = 2.\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2.\tan}{1-\tan^2(\alpha)}$$

Annexe C

Développements limités

C.1 Exponentielles et logarithme

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + 0(x^n)$$

C.2 Fonctions trigonométriques

$$\cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n})$$

$$\sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + 0(x^5)$$

$$Arc\sin\ x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + 0(x^7)$$

$$Arc\tan\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)} + 0(x^{2n+1})$$

C.3 Fonctions hyperboliques

$$ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n})$$

$$sh\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1})$$

$$th\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + 0(x^5)$$

$$Argsh\ x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + 0(x^7)$$

$$Argth\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + 0(x^{2n+1})$$

Annexe D

Séries de Fourier

D.1 Décomposition d'un signal périodique

D.1.1 Décomposition en sinus et cosinus

$$s(t) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n . \cos(n\omega t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n . \sin(n\omega t)\right]$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} s(t) . \cos(n\omega t) . dt \\ B_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} s(t) . \sin(n\omega t) . dt \end{array} \right.$$

D.1.2 Décomposition en exponentielles complexes

$$s(t) = Re\left(\tilde{s}(t)\right)$$

avec : $\tilde{s}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\tilde{C}_n . \exp(jn\omega t)\right]$

où : $n \geq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{C}_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} s(t) . \exp(-jn\omega t) . dt \\ \tilde{C}_n = A_n - j.B_n \end{array} \right.$

et $\tilde{C}_0 = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} s(t) . dt = \frac{A_0}{2}$.

D.1.3 Décomposition en cosinus

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n . \cos(n\omega t + \phi_n)\right]$$

avec :

$$\tilde{C}_n = C_n . e^{j.\phi_n} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_n = \left|\tilde{C}_n\right| \\ \phi_n = Arg\left(\tilde{C}_n\right) \end{array} \right.$$

Donc $n \geq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \tan \phi_n = -\frac{B_n}{A_n} \end{array} \right.$

D.2 Définitions

D.2.1 Le continu et l'ondulation

$$s(t) = s_{continu} + s_{ond}(t)$$

avec le continu :

$$s_{continu} = C_0 = \frac{A_0}{2}$$

et l'ondulation :

$$s_{ond}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n. \cos(n\omega t + \phi_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n. \cos(n\omega t) + B_n. \sin(n\omega t)]$$

D.2.2 Fondamental et harmoniques

Le fondamental est :

$$C_1. \cos(\omega t + \phi_1) = A_1. \cos(\omega t) + B_1. \sin(\omega t)$$

et l'harmonique de rang n est :

$$C_n. \cos(n\omega t + \phi_n) = A_n. \cos(n\omega t) + B_n. \sin(n\omega t)$$

D.3 Propriétés des coefficients de Fourier

D.3.1 Valeur moyenne

$$s_{moyen} = \langle s(t) \rangle = C_0 = \frac{A_0}{2}$$

D.3.2 Valeur efficace

$$s_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}$$

(formule de Parseval).

D.3.3 Parité

s paire $\Rightarrow s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n. \cos(n\omega t)]$

s impaire $\Rightarrow s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n. \sin(n\omega t)]$

D.3.4 Continuité

La série converge $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} C_n = 0$

Si s est continue (mathématiquement), $C_n \approx \frac{1}{n^2}$ si $n \to +\infty$;

Si s est discontinue (mathématiquement), $C_n \approx \frac{1}{n}$ si $n \to +\infty$.

Annexe E

Repères

E.1 Repère de Frenet

Vecteurs de base : $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$
Position : repérée par l'abscisse s
Vitesse : $\vec{v} = \dot{s}.\vec{T}$
Accélération : $\vec{a} = \ddot{s}.\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire.

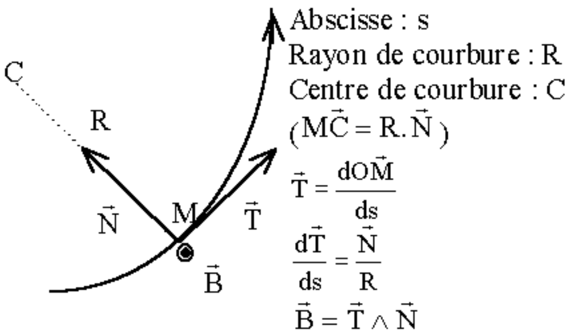

FIGURE E.1 – Repère de Frénet

E.2 Repère cartésien

Vecteurs de base : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
Position : $\vec{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$
Vitesse : $\vec{v} = \dot{x}.\vec{e}_x + \dot{y}.\vec{e}_y + \dot{z}.\vec{e}_z$
Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}.\vec{e}_x + \ddot{y}.\vec{e}_y + \ddot{z}.\vec{e}_z$
Elément de volume : $d^3\tau = dx.dy.dz$

E.3 Repère cylindrique

Vecteurs de base : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$
Position : $\vec{OM} = r.\vec{e}_r + z.\vec{e}_z$
Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{z}.\vec{e}_z$
Accélération : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right).\vec{e}_r + \left(2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}\right).\vec{e}_\theta + \ddot{z}.\vec{e}_z$

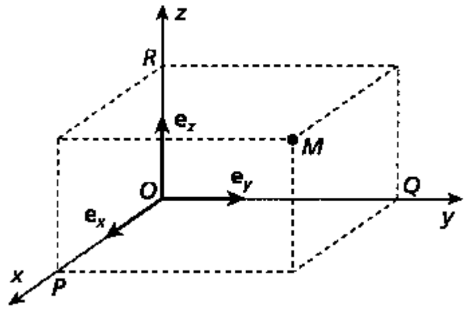

FIGURE E.2 – Repère cartésien

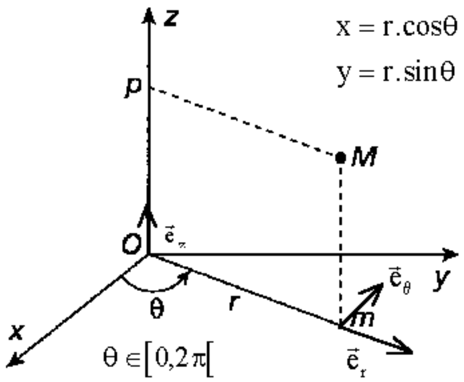

FIGURE E.3 – Repère cylindrique

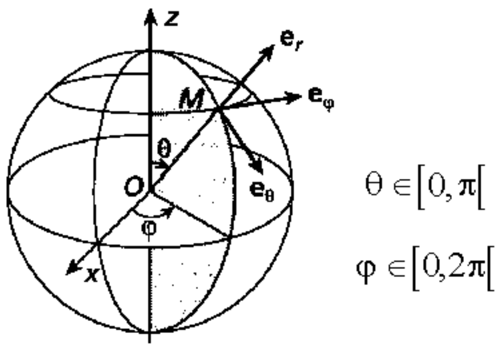

FIGURE E.4 – Repère sphérique

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \end{cases}$$

Expression dans le repère cartésien :

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta \\ y = r.\cos\theta \\ z = z \end{cases}$$

Elément de volume : $d^3\tau = dr.(r.d\theta).dz$

E.4 Repère sphérique

Vecteurs de base : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$
Position : $\vec{OM} = r.\vec{e}_r$
Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.\dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi$
Expression dans le repère cartésien :

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$

Elément de volume : $d^3\tau = dr.(r.d\theta).(r.\sin\theta.d\varphi)$

E.5 Généralisation

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	x	y	z	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	r	θ	z	1	r	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	r	θ	φ	1	r	$r.\sin\theta$

TABLE E.1 – Généralisation pour les repères

Déplacement élémentaire :

$$\vec{d\ell} = \sum_i \mu_i.ds_i.\vec{u}_i$$

Elément de volume :

$$d^3\tau = \prod_i \mu_i.ds_i$$

Annexe F

Analyse vectorielle

F.1 Opérateurs vectoriels

F.1.1 Opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x . \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y . \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z . \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes seulement !!!

F.1.2 Gradient

Différentielle d'un champ scalaire f :

$$df = \vec{grad}\,(f)\,.\vec{dl}$$

Expression avec l'opérateur nabla

$$\vec{grad}\,(f) = \vec{\nabla} f$$

Expression dans un repère quelconque

$$\vec{grad}\,(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} . \frac{\partial f}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} . \frac{\partial f}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} . \frac{\partial f}{\partial s_3} \end{pmatrix}$$

Interprétation le gradient de f est orthogonal aux surfaces iso-f, il va vers les f croissants.

Expression intégrale

$$\int_a^b \vec{grad}\,(f)\,\vec{dl} = f(b) - f(a)$$

Propriété

$$\oint \vec{grad}\,(f)\,\vec{dl} = 0$$

F.1.3 Rotationnel

Expression avec l'opérateur nabla

$$\vec{rot}\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Expression dans un repère quelconque

$$\vec{rot}\left(\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2.\mu_3}\left[\frac{\partial(\mu_3.A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2.A_2)}{\partial s_3}\right] \\ \frac{1}{\mu_3.\mu_1}\left[\frac{\partial(\mu_1.A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3.A_3)}{\partial s_1}\right] \\ \frac{1}{\mu_1.\mu_2}\left[\frac{\partial(\mu_2.A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1.A_1)}{\partial s_2}\right] \end{pmatrix}$$

Interprétation : les lignes de champ “tournent” autour de leur rotationnel.

Formule de Stokes

$$\oint \vec{A}.\vec{dl} = \iint \vec{rot}\left(\vec{A}\right).d^2\vec{S}$$

Propriétés

$$\vec{rot}\left(\vec{grad}(f)\right) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}f) = 0$$

Le rotationnel d'un gradient est nul.

F.1.4 Divergence

Expression avec l'opérateur nabla

$$div\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

Expression dans un repère quelconque

$$div\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{\mu_1.\mu_2.\mu_3}\left(\frac{\partial\left(\mu_2.\mu_3.A_1\right)}{\partial s_1} + \frac{\partial\left(\mu_3.\mu_1.A_2\right)}{\partial s_2} + \frac{\partial\left(\mu_1.\mu_2.A_3\right)}{\partial s_3}\right)$$

Formule d'Ostrogradsky

$$\oiint \vec{A}.d^2\vec{S} = \iiint div\left(\vec{A}\right).d^3\tau$$

Propriétés

$$div\left(\vec{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

La divergence d'un rotationnel est nulle.

Le long d'un tube de champ d'un vecteur à divergence nulle le flux se conserve.

F.1.5 Laplacien scalaire

Expression avec l'opérateur nabla

$$\Delta f = \nabla^2 f = div\left[\vec{grad}\left(f\right)\right] = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}f\right)$$

Expression dans un repère quelconque

$$\Delta f = \frac{1}{\mu_1.\mu_2.\mu_3}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\mu_2.\mu_3}{\mu_1}.\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\mu_3.\mu_1}{\mu_2}.\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) + \frac{\partial}{\partial s_3}\left(\frac{\mu_1.\mu_2}{\mu_3}.\frac{\partial f}{\partial s_3}\right)\right]$$

F.1.6 Laplacien vectoriel

Expression avec le laplacien scalaire

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Expression avec l'opérateur nabla

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$

F.2 Formulaire

F.2.1 Formules locales

$$\vec{\nabla}\left(U+V\right) = \vec{\nabla}U + \vec{\nabla}V$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\vec{A} + \vec{\nabla}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} + \vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}U\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right) = \nabla^2 U$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \nabla^2.\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\left(U.V\right) = \left(\vec{\nabla}U\right).V + U.\left(\vec{\nabla}V\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(U.\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}U\right).\vec{A} + U.\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(U.\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}U\right)\wedge\vec{A} + U.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right).\vec{B} - \vec{A}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right).\vec{A} - \left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right).\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A} - \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{A}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) + \vec{B}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) + \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A}$$

F.2.2 Formules intégrales

Formule de Kelvin

$$\oint f.\vec{dl} = \iint \vec{d^2S}\wedge \vec{grad}\left(f\right)$$

Formule de Stokes

$$\oint \vec{A}.\vec{dl} = \iint \vec{rot}\left(\vec{A}\right).\vec{d^2S}$$

Formule du gradient

$$\oiint f.\vec{d^2S} = \iiint \vec{grad}\left(f\right).d^3\tau$$

Formule d'Ostrogradsky

$$\oiint \vec{A}.\vec{d^2S} = \iiint div\left(\vec{A}\right).d^3\tau$$

Formule du rotationnel

$$\oiint \vec{d^2S}\wedge\vec{A} = \iiint \vec{rot}\left(\vec{A}\right).d^3\tau$$

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	x	y	z	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	r	θ	z	1	r	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	r	θ	φ	1	r	$r.\sin\theta$

TABLE F.1 – Repères

Annexe G

Equations différentielles

G.1 Définitions

Equations différentielles : (la fonction est notée u, et la variable est conventionnellement le temps t)

- linéaires : (pas de multiplication, carré, racine, puissance de la fonction u ou de ses dérivées $\dot{u}$ et $\ddot{u}$) ;
- du premier ordre : $\dot{u} + k.u = f(t)$;
- du second ordre : $a.\ddot{u} + b.\dot{u} + c.u = f(t)$;
- avec second membre : $f(t) \neq 0$;
- sans second membre : $f(t) = 0$.

G.2 Solution particulière (régime permanent)

G.2.1 Second membre constant (régime continu)

$$f(t) = f_0.$$

Equations différentielles du premier ordre

$$\dot{u} + k.u = f_0 \Rightarrow u_{\text{part}} = \frac{f_0}{k}$$

Equations différentielles du second ordre

$$a.\ddot{u} + b.\dot{u} + c.u = f_0 \Rightarrow u_{\text{part}} = \frac{f_0}{c}$$

Equations différentielles sans second membre : le cas sans second membre est un cas particulier de second membre constant (nul !)

$$f_0 = 0 \Rightarrow u_{\text{part}} = 0$$

G.2.2 Second membre sinusoïdal (régime sinusoïdal forcé)

Forme des solutions : si le second membre est sinusoïdal

$$f(t) = f_0.\cos(\omega.t + \varphi_0)$$

la solution particulière est aussi sinusoïdale

$$u_{\text{part}}(t) = u_0.\cos(\omega.t + \varphi)$$

Il faut chercher les deux constantes réelles positives u_0 et φ.

Complexes associés : pour rechercher u_0 et φ, le plus simple est de s'intéresser aux grandeurs complexes associées

$$u(t) = \Re(\tilde{u}(t))$$

avec

$$\tilde{u}(t) = u_0.e^{j.(\omega.t+\varphi)}$$

NB : on peut choisir $\tilde{u}(t) = u_0.e^{-j.(\omega.t+\varphi)}$.

Les équation différentielles sont linéaires, elles sont donc vérifiées par les complexes associés.

Equation du second ordre :

$$a.\ddot{\tilde{u}} + b.\dot{\tilde{u}} + c.\tilde{u} = f_0.e^{j.(\omega.t+\varphi_0)}$$

soit

$$u_0.e^{j.\varphi}\left[a.(j.\omega)^2 + b.(j.\omega) + c\right] = f_0.e^{j.\varphi_0}$$

(la variation temporelle a disparu !)

La dernière équation complexe peut être décomposée en deux équations réelles.

- Le module donne :
$$u_0.\sqrt{\left(c - a.\omega^2\right)^2 + (b.\omega)^2} = f_0$$
on en déduit u_0 ;
- l'argument donne :
$$\varphi + \arg\left[\left(c - a.\omega^2\right) + j.\omega.b\right] = \varphi_0$$
on en déduit φ.

G.3 Solution générale

G.3.1 Solution générale de l'équation différentielle du premier ordre

Equation différentielle à résoudre : on cherche ici une solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre ($\dot{u} + k.u = 0$).

Solution : $du = -k.u.dt \Rightarrow \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u} = -k.\int_0^t dt$, soit : $Ln\left[\frac{u(t)}{u_0}\right] = -k.t \Rightarrow$

$$u_{\text{gene}}(t) = u_0.e^{-k.t}$$

Conditions initiales : on détermine la constante u_0 grâce aux conditions initiales. Si u est continue, alors

$$u\left(t = 0^+\right) = u\left(t = 0^-\right)$$

Relaxation (exponentielle décroissante) : si $k = \frac{1}{\tau} > 0$,

$$u_{\text{gene}}(t) = u_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$$

τ (en secondes) est donc la durée caractéristique du régime transitoire.

La courbe caractéristique de l'exponentielle décroissante est telle que la tangente à l'origine croise l'asymptote (la moyenne du régime permanent) en $t = \tau$.

Divergence exponentielle : si $k < 0$, la solution générale croît (en valeur absolue !) de façon exponentielle. On ne peut alors parler de transitoire.

Bien souvent, on a à faire à une saturation : des phénomènes physique que l'on n'avait pas pris en compte font que u reste dans un domaine fini (penser en particulier à la tension de sortie d'un ampli op qui est toujours entre $-V_{sat}$ et $+V_{sat}$.)

G.3.2 Solution générale de l'équation différentielle du second ordre

Equation différentielle à résoudre : $a.\ddot{u} + b.\dot{u} + c.u = 0$, que l'on peut souvent réécrire dans le cas des oscillateurs

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{u} + \omega_0^2.u = 0$$

où ω_0 est la pulsation propre (en $rad.s^{-1}$) et Q (sans unité) le facteur de qualité de l'oscillateur.

Equation caractéristique : il faut d'abord résoudre le trinôme du second degré

$$a.r^2 + b.r + c = 0$$

dont les solutions sont r_+ et r_-.

La solution de l'équation différentielle est :

$$u_{gene}(t) = A_+.e^{r_+.t} + A_-.e^{r_-.t}$$

Posons donc $\Delta = b^2 - 4.a.c = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. Suivant le signe de Δ, trois cas se présentent.

- Relaxation pseudo-périodique
  Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, les deux racines sont complexes conjuguées :

$$r_\pm = \frac{-b \pm j.\sqrt{-\Delta}}{2.a} = -\frac{\omega_0}{2.Q} \pm j.\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$$

  La solution de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_{\text{gene}}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}.\cos(\Omega.t + \varphi)$$

  avec :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$$
$$\tau = \frac{2.Q}{\omega_0}$$

  Les coefficients $(A_+; A_-)$ ou $(A; \varphi)$ sont déterminés grâce aux conditions initiales.
- Relaxation apériodique
  Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$, les deux racines sont réelles :

$$r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = -\omega_0\left(\frac{1}{2.Q} \mp \sqrt{\frac{1}{4.Q^2} - 1}\right)$$

  ou

$$r_\pm = -\frac{1}{\tau_\pm} < 0$$

  La solution de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_{\text{gene}}(t) = A_+.e^{-\frac{t}{\tau_+}} + A_-.e^{-\frac{t}{\tau_-}}$$

  où les coefficients $(A_+; A_-)$ sont déterminés grâce aux conditions initiales.
- Relaxation critique
  Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$, la racine est réelle :

$$r_0 = \frac{-b}{2.a} = -\omega_0$$

  La solution de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_{gene}(t) = (A.t + B).e^{-\omega_0.t}$$

  où les coefficients $(A; B)$ sont déterminés grâce aux conditions initiales.

Annexe H

Oscillateurs

H.1 Définitions

Equation différentielle : on appelle oscillateur un système dont une des variables (x) suit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2.x = e(t)$$

où $e(t)$ l'excitation qu'il subit.

Pulsation propre de l'oscillateur : ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (en $rad.s^{-1}$).

Facteur de qualité : Q est son facteur de qualité (sans unité).

H.2 Oscillations libres - relaxation

H.2.1 Relaxation

Equations : dès que $t > 0$, on n'impose plus aucune force volontaire sur l'oscillateur (l'opérateur le laisse évoluer librement) ; c'est à dire que le second membre de l'équation différentielle est nul : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2.x = 0$.

Solution générale : la solution est la solution générale de l'équation sans second membre : $x(t > 0) = x_{generale}(t)$.

Régime transitoire : le régime est nécessairement transitoire : après un temps de l'ordre de quelques τ, on atteint la solution particulière qui est nulle $x_{particuliere}(t) = 0 \Rightarrow x(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Conditions initiales : la solution dépend des conditions initiales (en position $x(t = 0^-)$ et vitesse $v_x(t = 0^-)$).

H.2.2 Régimes de relaxation

Selon la valeur de Q, il existe trois régimes (le graphe H.1 permet de comparer les trois régimes avec les mêmes conditions initiales).

- Relaxation apériodique
  Si les frottements sont forts ($Q < \frac{1}{2}$) la solution est de type :
  $$x_{aperiodique}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B.e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$
- Relaxation pseudo - périodique
  Si les frottements sont faibles ($Q > \frac{1}{2}$), on peut réécrire les solutions dans le cas pseudo-périodique sous la forme :
  $$x_{pseudo}(t) = C.e^{-\frac{t}{\tau}}.\cos(\omega.t + \varphi).$$
  Ainsi, il apparaît que la solution, dans le cas pseudo-périodique, est une sinusoïde d'amplitude modulée par une exponentielle décroissante.

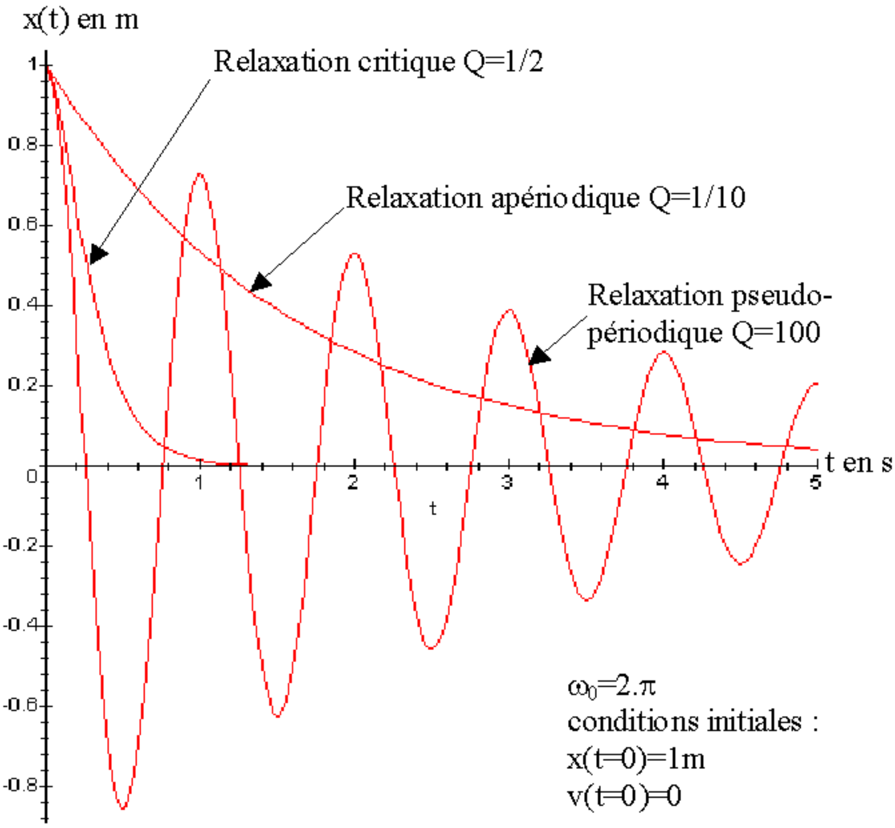

FIGURE H.1 – Les trois régimes de relaxation de l'oscillateur

- Relaxation critique
  Dans le cas des frottements intermédiaires ($Q = \frac{1}{2}$), la relaxation critique suit la loi :

$$x_{critique}(t) = (A + B.t).e^{-\frac{t}{\tau_{critique}}}.$$

L'amortissement optimal (c'est à dire le plus rapide), se fait dans le régime critique, avec un temps caractéristique : $\tau_{critique} = \frac{1}{\omega_0}$.

H.3 Oscillations forcées - résonance

H.3.1 Oscillations forcées

Equation différentielle : on s'intéresse à un oscillateur en régime permanent excité de façon sinusoïdale, c'est à dire que le second membre de l'équation différentielle est sinusoïdal : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2.x = \frac{f_0}{m}\cos(\omega.t)$.

Solution particulière : la solution est la solution particulière de l'équation avec second membre : $x(t) = x_{particuliere}(t) = x_0.\cos(\omega.t + \varphi)$.

Régime permanent : le régime est permanent : après un temps de l'ordre de quelques τ, le régime transitoire est terminé car la solution générale de l'équation différentielle sans second membre est nulle $x_{generale}(t \gg \tau) = 0$.

Passage aux grandeurs complexes : puisque l'équation différentielle à résoudre est linéaire, elle est vérifiée par les grandeurs complexes associées (il est beaucoup plus simple de les utiliser).

H.3.2 Résonance en vitesse

Amplitude : il n'y a qu'un maximum, il existe toujours, et il se trouve toujours en ω_0 (cf. figures H.2 et H.3) :

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow v_0 = v_{max} = \frac{Q}{\omega_0}\frac{f_0}{m}$$

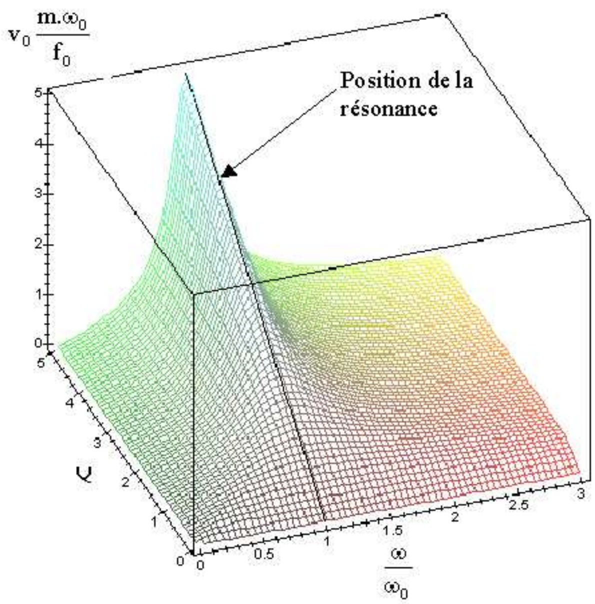

FIGURE H.2 – Résonance de vitesse en amplitude

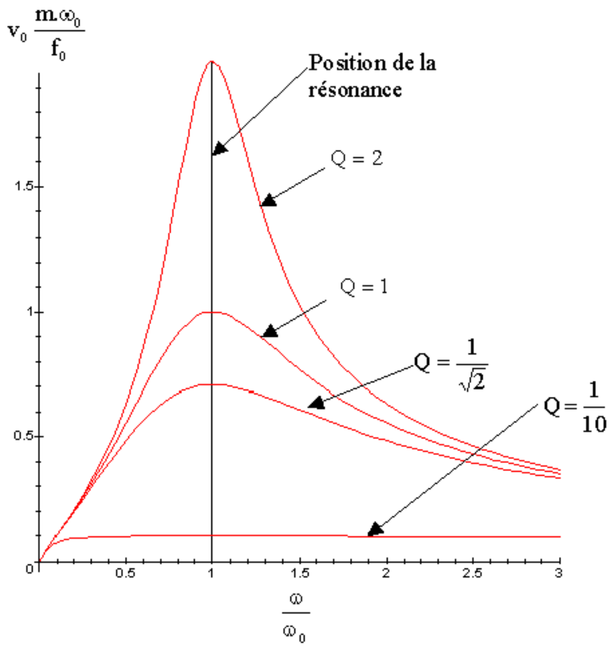

FIGURE H.3 – Résonance de vitesse en amplitude

Acuité de la résonance : la largeur du pic $\Delta\omega$ est définie par $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$, pulsations telles que : $v_0\,(\omega_1) = v_0\,(\omega_2) = \frac{v_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.

La résolution donne :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

(la résonance est d'autant plus fine que le facteur de qualité est grand), soit une acuité $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$ (la résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité est grand).

Phase : la phase de la vitesse varie entre $\psi\,(\omega \to 0) = \frac{\pi}{2}$ et $\psi\,(\omega \to +\infty) = -\frac{\pi}{2}$. D'autre part, à la résonance : $\psi\,(\omega = \omega_0) = 0$. Le tracé de la phase est donné par les figures H.4 et H.5.

H.3.3 Résonance en élongation

Amplitude : la résonance en élongation n'a lieu que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La résonance en élongation a lieu en

$$\omega_r < \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}}$$

La position du maximum dépend du facteur de qualité de l'oscillateur (cf. figures H.6 et H.7) : il varie entre $\omega_r\left(Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et $\omega_r\,(Q \to +\infty) = \omega_0$.

Phase : la phase en élongation est $\varphi \in [-\pi; 0]$ (l'élongation est toujours en retard sur l'excitation).

En particulier $\varphi\,(\omega \to 0) = 0$, $\varphi\,(\omega = \omega_0) = \frac{-\pi}{2}$ et $\varphi\,(\omega \to +\infty) = -\pi$. Le tracé de la phase est donné dans les graphiques H.8 et H.9.

Oscillateur à faible frottement $(Q \gg 1)$: si $Q \gg 1$, la résonance en élongation existe toujours et a lieu en :

$$\omega_r \underset{Q\gg 1}{\approx} \omega_0$$

A la résonance, si $Q \gg 1$, l'élongation est en quadrature retard sur l'excitation.

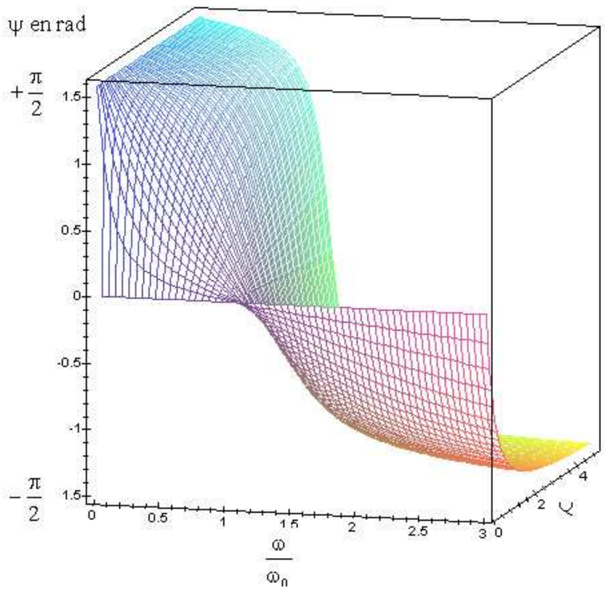

FIGURE H.4 – Résonance de vitesse en phase

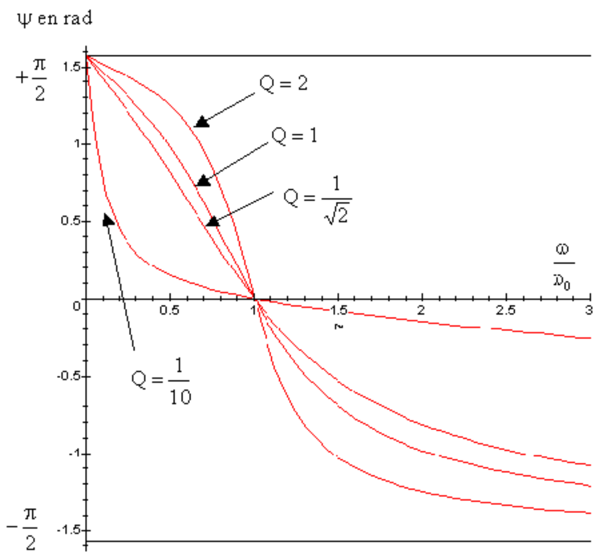

FIGURE H.5 – Résonance de vitesse en phase

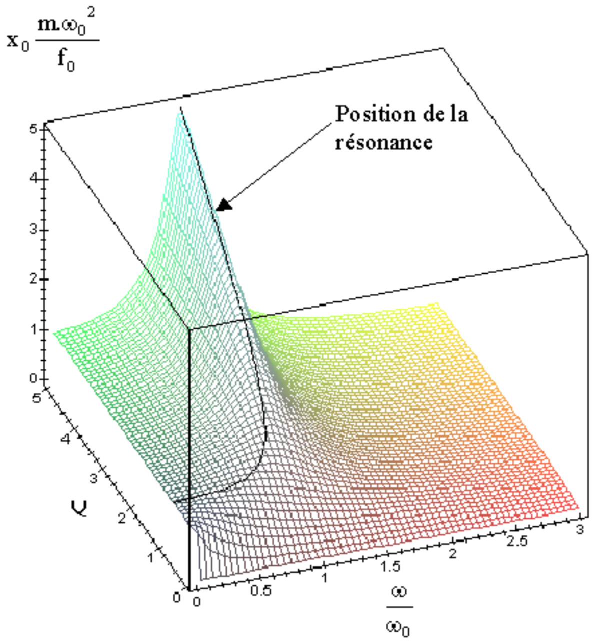

FIGURE H.6 – Résonance d'élongation en amplitude

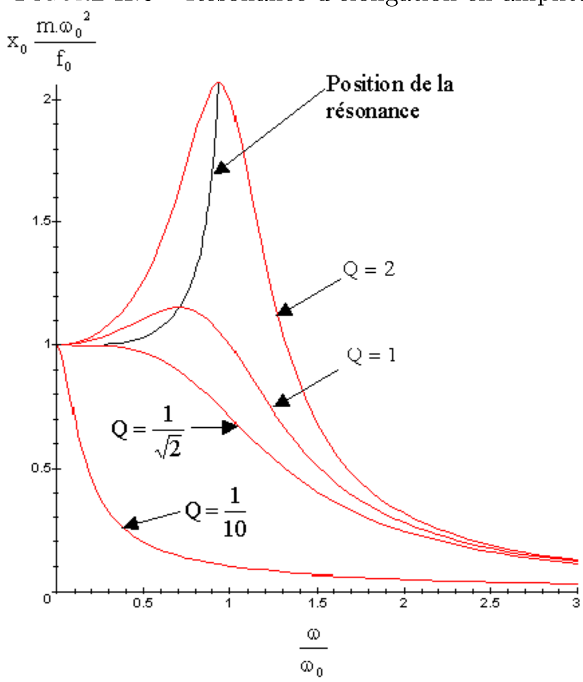

FIGURE H.7 – Résonance d'élongation en amplitude

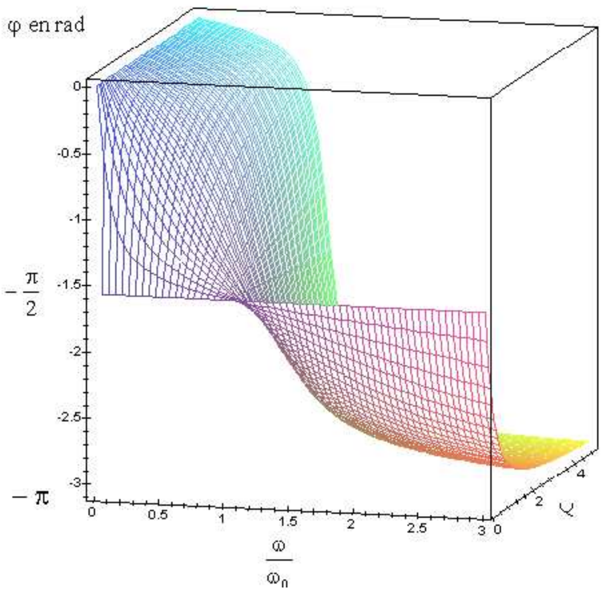

FIGURE H.8 – Résonance d'élongation en phase

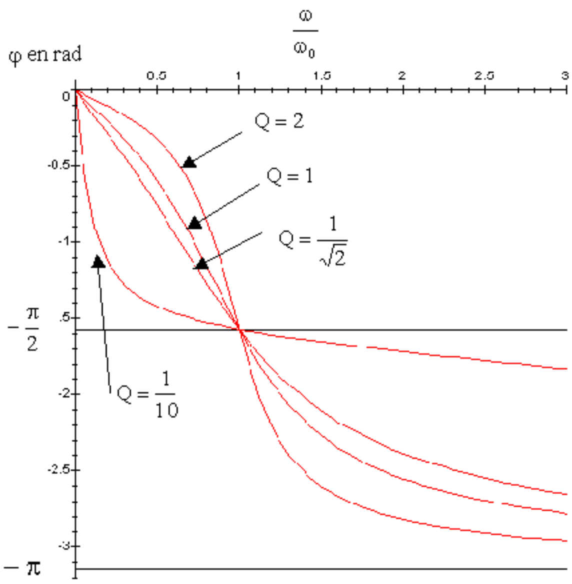

FIGURE H.9 – Résonance d'élongation en phase

De la même façon que précédemment, on peut définir une largeur du pic $\Delta\omega$ par $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$. Les calculs ne sont pas simples, mais on trouve : $\Delta\omega \underset{Q \gg 1}{\approx} \frac{\omega_0}{Q}$.

On se rappellera donc que la résonance en élongation est identique à la résonance en vitesse pour peu que $Q \gg 1$.

Annexe I

Fonctions de plusieurs variables

I.1 Fonction de plusieurs variables

I.1.1 Variance

Imaginons pour simplifier que le nombre de variables est 2 et nommons les x et y (en thermodynamique, on dira que la variance v est égale à 2). On généralisera sans peine.

I.1.2 Fonction d'état

Les fonctions d'état thermodynamiques sont des grandeurs thermodynamiques qui ne dépendent que de l'état d'équilibre thermodynamique. Ce sont des fonctions mathématiques de v variables où v est la variance.

Exemple $f : (x; y) \mapsto f(x; y)$

I.2 Dérivées explicites ou dérivées partielles

I.2.1 Définition de dérivées partielles

La dérivée explicite de f à y constant est $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, elle est obtenue en considérant y comme constante dans l'expression de f lors de la dérivation.

De la même façon, on définit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$.

I.2.2 Propriétés des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

I.3 Transformations

I.3.1 Transformation infinitésimale et différentielle totale

Lors d'une transformation infinitésimale ($x \to x + dx$ et $y \to y + dy$), la variation δf de f est alors une différentielle totale et est notée df. La fonction d'état f va passer de f à $f + df$ avec :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

I.3.2 Transformation finie et variation intégrale

Lors d'une transformation finie :

$$\left.\begin{array}{c} E_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} E_2 \\ x_2 = x_1 + \Delta x \\ y_2 = y_1 + \Delta y \end{array}\right.$$

quel que soit le "chemin suivi" par la transformation, la fonction d'état f va passer de f_1 à f_2 avec :

$$\Delta f = \int_{f_1}^{f_2} df = f_2 - f_1$$

qui ne dépend pas du chemin suivi, seulement des états initial (E_1) et final (E_2).

I.3.3 Transformation infinitésimale et forme différentielle

Lors d'une transformation infinitésimale ($x \rightarrow x + dx$ et $y \rightarrow y + dy$),

$$\delta g = \alpha.dx + \beta.dx$$

δg est appelée forme différentielle.

I.3.4 Transformation finie dépendant du chemin suivi

$g = \int\limits_{1 \rightarrow 2} \delta g$ dépend a priori du chemin suivi de l'état initial à l'état final

$$g\,(\text{chemin } A) \neq g\,(\text{chemin } B)$$

I.3.5 Condition pour qu'une forme différentielle soit une différentielle totale

$$\delta g = \alpha.dx + \beta.dy = dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y .dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x .dy \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_x$$

exemple	travail	énergie potentielle
Transformation infinitésimale	$\delta W = \alpha.dx + \beta.dy$	$dE_p = \gamma.dx + \varepsilon.dy$
	forme différentielle	différentielle totale ou exacte
Dérivées partielles ou explicites	$\alpha \neq \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_y$ (cette notation n'a aucun sens !)	$\gamma = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_y$ $\varepsilon = \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_x$
propriété caractéristique	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_x \neq \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_y$	$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}$
à l'état d'équilibre A	$W(A)$ n'est pas défini	$E_p(A)$ est définie
	ce n'est pas une fonction d'état.	c'est une fonction d'état : $E_p\,(A) = f(x_A, y_A)$
Transformation finie $A \rightarrow B$	$W = \int\limits_{A \rightarrow B} \delta W$	$\Delta E_P = \int\limits_A^B dE_p$ $\Delta E_P = E_p\,(B) - E_p\,(A)$
	ce n'est pas une intégrale au sens mathématique (pas de primitive)	c'est une intégrale au sens mathématique (il y a une primitive, c'est E_p)
	W dépend du chemin suivi	ΔE_P ne dépend pas du chemin suivi

Table I.1 – Comparaison entre forme différentielle et différentielle totale en physique

Annexe J

Torseurs

J.1 Relation d'antisymétrie

Un torseur est un champ de vecteur qui suit la relation d'antisymétrie

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BA}$$

$\vec{M}_A$ est appelé moment du torseur au point A, et $\vec{R}$ est la résultante du torseur (qui ne dépend pas du point de l'espace).

Un torseur est donc parfaitement défini par la donnée de sa résultante $\vec{R}$ et d'un moment en un point quelconque ($\vec{M}_A$ par exemple, ou bien $\vec{M}_B$). Aussi, il suffit de 6 réels pour le définir totalement.

En mécanique, il existe plusieurs champs torseurs (cf.tableau J.1).

Torseur	Moment	Résultante	Relation d'antisymétrie
cinématique (pour les solides uniquement)	Vitesse du point du solide $\vec{v}_A$	Vecteur rotation $\vec{\Omega}$	$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \vec{BA}$
cinétique	Moment cinétique $\vec{\sigma}_A$	Résultante cinétique $\vec{P} = M.\vec{v}_G$	$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \vec{P} \wedge \vec{BA}$
des forces (ou des actions)	Moment de la force $\vec{M}_A$	Résultante des actions $\vec{F}$	$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{F} \wedge \vec{BA}$

TABLE J.1 – Torseurs en mécanique

J.2 Moment par rapport à un axe orienté

Soit un axe orienté (Oz) (ou bien un vecteur unitaire $\vec{u}_z$). On appelle moment suivant (Oz) la projection suivant $\vec{u}_z$ du moment vectoriel $\vec{M}_O$, pour tout point O de l'axe (Oz) :

$$M_{Oz} = \vec{M}_O.\vec{u}_z \forall O \in (Oz)$$

Cette définition a bien un sens car, si on prenait un autre point O' de (Oz), on aurait $\vec{M}_{O'}.\vec{u}_z = \left(\vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}\right).\vec{u}_z$ d'après la relation d'antisymétrie, soit $\vec{M}_{O'}.\vec{u}_z = \vec{M}_O.\vec{u}_z + \left(\vec{R} \wedge \vec{OO'}\right).\vec{u}_z = M_{Oz}$ car $\vec{OO'}//\vec{u}_z \Rightarrow \left(\vec{R} \wedge \vec{OO'}\right).\vec{u}_z = 0$.

Attention : le moment suivant l'axe M_{Oz} n'est pas un vecteur, mais une grandeur algébrique (réel positif, négatif ou nul).

J.3 Divers types de torseurs

- Couples
  On appelle couple un torseur dont la résultante est nulle :
  $$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_A = \vec{M}_B \forall (A, B)$$
- Glisseurs
  Un glisseur est un torseur tel qu'il existe un point O où le moment est nul :
  $$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_A = \vec{R} \wedge \vec{OA} \forall A$$
  O est souvent nommé point d'application du glisseur.
- Autres types de torseurs
  Certains torseurs ne sont ni des glisseurs, ni des couples !

J.4 Opération entre torseurs

Soient deux torseurs
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{1_A} = \vec{M}_{1_B} + \vec{R}_1 \wedge \vec{BA} \\ \vec{M}_{2_A} = \vec{M}_{2_B} + \vec{R}_2 \wedge \vec{BA} \end{array} \right.$$

Le torseur somme est tel que
$$\vec{M}_{3_A} = \vec{M}_{3_B} + \vec{R}_3 \wedge \vec{BA}$$
avec :
$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{M}_{3_A} = \vec{M}_{1_A} + \vec{M}_{2_A} \\ \vec{R}_3 = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \end{array} \right.$$

Le produit des deux torseurs, défini par
$$P = \vec{M}_{1_A}.\vec{R}_2 + \vec{R}_1.\vec{M}_{2_A}$$
(un réel algébrique), ne dépend pas du point considéré.

En effet, $P = \left(\vec{M}_{1_B} + \vec{R}_1 \wedge \vec{BA}\right).\vec{R}_2 + \vec{R}_1.\left(\vec{M}_{2_B} + \vec{R}_2 \wedge \vec{BA}\right)$
or $\left(\vec{R}_1 \wedge \vec{BA}\right).\vec{R}_2 = -\vec{R}_1.\left(\vec{R}_2 \wedge \vec{BA}\right)$,
donc : $P = \vec{M}_{1_B}.\vec{R}_2 + \vec{R}_1.\vec{M}_{2_B}$.